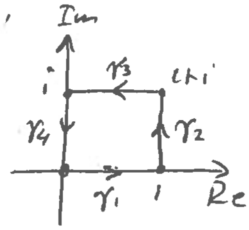
Kompleksianalyysi b 2013
Harjoitus 2, Ratkaisut

(1) Ääriviiva C voidaan esittää muodossa $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$, (katso kuva), missä käyrien γ_j parametrisoinneiksi saadaan



γ_1: $z_1(t)=(1-t)\cdot 0+t\cdot 1=t$, $t\in[0,1]$,

$z_1'(t)=1$,

γ_2: $z_2(t)=(1-t)\cdot 1+t(1+i)=1+ti$, $t\in[0,1]$,

$z_2'(t)=i$,

γ_3: $z_3(t)=(1-t)(1+i)+ti=1-t+i$, $t\in[0,1]$,

$z_3'(t)=-1$,

γ_4: $z_4(t)=(1-t)i+t\cdot 0=i-ti$, $t\in[0,1]$,

$z_4'(t)=-i$.

Täten

$$\int_{\gamma_1} e^z\,dz=\int_0^1 e^t\,dt=e-1,$$

$$\int_{\gamma_2} e^z\,dz=\int_0^1 e^{1+ti}\,i\,dt=\Big/_0^1 e^{1+ti}=e^{1+i}-e,$$

$$\int_{\gamma_3} e^z\,dz=\int_0^1 e^{1-t+i}(-1)\,dt=\Big/_0^1 e^{1-t+i}=e^i-e^{1+i},$$

$$\int_{\gamma_4} e^z\,dz=\int_0^1 e^{i-ti}(-i)\,dt=\Big/_0^1 e^{i-ti}=1-e^i.$$

Näin ollen

$$\int_C e^z\,dz=\cancel{e}-\cancel{1}+\cancel{e^{1+i}}-\cancel{e}+\cancel{e^i}-\cancel{e^{1+i}}+\cancel{1}-\cancel{e^i}=0.$$

(2) Nyt käyrän γ parametrisoinnille $z(t)=t+it^2$, $t\in[0,1]$, on $z'(t)=1+2it$, $t\in[0,1]$, joten

$$\int_\gamma (x-2xyi)\,dz=\int_\gamma(\operatorname{Re} z-2\operatorname{Re} z\operatorname{Im} z\cdot i)\,dz$$

$$=\int_0^1(t-2t\cdot t^2\cdot i)(1+2it)\,dt=\int_0^1(t+i2t^2-i2t^3+4t^4)\,dt$$

$$=\Big/_0^1\left(\frac{t^2}{2}+i\frac{2}{3}t^3-i\frac{2}{4}t^4+\frac{4}{5}t^5\right)=\frac{1}{2}+i\frac{2}{3}-i\frac{1}{2}+\frac{4}{5}=\frac{13}{10}+i\frac{1}{6}.$$

(3) Tehtävän 1 merkinnöillä saadaan

$$\int_{\gamma_1} \bar z^2\,dz = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},$$

$$\int_{\gamma_2} \bar z^2\,dz = \int_0^1 (1-ti)^2\, i\,dt = -\Big/_0^1 \frac{1}{3}(1-ti)^3 = -\frac{1}{3}(1-i)^3 + \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(-2-2i) + \frac{1}{3} = 1 + i\frac{2}{3},$$

$$\int_{\gamma_3} \bar z^2\,dz = \int_0^1 (1-t-i)^2(-1)\,dt = \Big/_0^1 \frac{1}{3}(1-t-i)^3 = \frac{1}{3}(-i)^3 - \frac{1}{3}(1-i)^3$$

$$= \frac{i}{3} - \frac{1}{3}(-2-2i) = \frac{2}{3} + i,$$

$$\int_{\gamma_4} \bar z^2\,dz = \int_0^1 (-i+ti)^2(-i)\,dt = -\Big/_0^1 \frac{1}{3}(-i+ti)^3 = -\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}(-i)^3 = \frac{i}{3}.$$

Näin ollen

$$\int_C \bar z^2\,dz = \frac{1}{3} + 1 + i\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + i + \frac{i}{3} = 2 + 2i.$$

(4) Totta: Jos $|z| = 1$, niin $z = e^{it}$ jollekin $t \in [0, 2\pi)$. Tällöin

$$\bar z = \overline{e^{it}} \; (= \cos t - i\sin t = \cos(-t) + i\sin(-t))$$

$$= e^{-it} = \frac{1}{e^{it}} = \frac{1}{z}.$$

Väite seuraa.

Huom! Tehtävän voi ratkaista myös laskemalla molemmat integraalit. Niiden arvoiksi saadaan $2\pi i$.

(5) Käytetään lausetta 1.2.11:

(a) Jos $|z| = 3$, niin

$$\left|\frac{1}{z^2-i}\right| = \frac{1}{|z^2-i|} \le \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{8},$$

joten (L. 1.2.11)

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2-i}\right| \le \frac{1}{8}\, l(C) = \frac{1}{8}\cdot 2\pi\cdot 3 = \frac{3\pi}{4}.$$

(b) Jos $z \in \gamma$, niin $\operatorname{Re} z = R > 0$, jolloin

$$\left|\frac{e^{3z}}{1+e^z}\right| \le \frac{|e^{3\operatorname{Re} z} e^{i3\operatorname{Im} z}|}{|e^{\operatorname{Re} z} e^{i\operatorname{Im} z}| - 1} = \frac{e^{3R}}{e^R - 1}.$$

Siten

$$\left|\int_\gamma \frac{e^{3z}}{1+e^z}\,dz\right| \le \frac{e^{3R}}{e^R-1}\, l(\gamma) = \frac{2\pi e^{3R}}{e^R-1}.$$

(c) Jos $z \in \Gamma$, niin $z = e^{it}$ jollekin $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, jolloin

$$|\mathrm{Log}\, z| = |\underbrace{\mathrm{Log}|z|}_{=0} + i \,\mathrm{Arg}\, z| = |\mathrm{Arg}\, z| = t \le \frac{\pi}{2}.$$

Siten

$$\left|\int_\Gamma \mathrm{Log}\, z\, dz\right| \le \frac{\pi}{2} l(\Gamma) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

(d) Jos $z \in \gamma$, niin $\mathrm{Re}\, z = 0$ ja $y := \mathrm{Im}\, z \in [0,1]$, jolloin

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = \frac{i}{2}(e^{y} - e^{-y}),$$

eli $\mathrm{Re}\, \sin z = 0$. Siis $|e^{\sin z}| = e^{\mathrm{Re}\, \sin z} = e^0 = 1$, joten

$$\left|\int_\gamma e^{\sin z}\, dz\right| \le 1 \cdot l(\gamma) = 1.$$

6 Polynomi $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ on jatkuva kompleksitasossa $\mathbb{C}$ ja sillä on primitiivi

$$Q(z) = \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} z^n + \dots + \frac{a_1}{2} z^2 + a_0 z + C, \quad C \in \mathbb{C},$$

($Q'(z) = P(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$) kompleksitasossa. Korollaarin 1.3.4 nojalla $\int_\Gamma P(z)\, dz = 0$ kaikille suljetuille ääriviivoille $\Gamma \subset \mathbb{C}$. $\square$

7 Olkoon $\varepsilon > 0$ mv. Koska f on jatkuva pisteessä z, niin $\exists \delta > 0$ siten, että

$$|f(z + t\Delta z) - f(z)| < \varepsilon,$$

kun

$$(0<)|z + t\Delta z - z| = t|\Delta z| < \delta.$$

Näin ollen Lauseen 1.2.11 nojalle

$$\left|\int_0^1 f(z+t\Delta z)\, dt - f(z)\right| = \left|\int_0^1 f(z+t\Delta z)\, dt - \int_0^1 f(z)\, dt\right|$$

$$= \left|\int_0^1 (f(z+t\Delta z) - f(z))\, dt\right| \overset{\text{L.1.2.11}}{\le} \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon,$$

kun $0 < |\Delta z| < \delta$ $(t|\Delta z| \le |\Delta z|)$. Raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{\Delta z \to 0} \int_0^1 f(z + t\Delta z)\, dt = f(z). \square$$

(8) Olkoon $z_1, z_2 \in D$ mielivaltaisia, ja olkoon γ jana pisteestä z_1 pisteeseen z_2. (voidaan olettaa, että $z_1 \neq z_2$). Tällöin $\gamma \in D$. Koska f' on jatkuva yksikkökiekossa ja f on sen primitiivi ($\frac{d}{dz} f(z) = f'(z)$), niin Lauseen 1.3.1 nojalla

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1).$$

Näin ollen Lauseen 1.2.11 nojalla

$$|f(z_2) - f(z_1)| = \left| \int_\gamma f'(z)\,dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f'(z)| \cdot l(\gamma)$$

$$\leq M \cdot |z_2 - z_1|. \square$$