Kompleksianalyysi b 2013
Harjoitus 3, Ratkaisut

① Funktion $z(s,t)$ tulee toteuttaa Määritelmän 1.4.1 ehdot. Nyt käyrälle Γ_0 saadaan parametrisointi (ks. vihje)

$$x(t) = 2\cos(2\pi t), \quad y(t) = 3\sin(2\pi t), \quad t \in [0,1]$$

ja käyrälle Γ_1 vastaavasti

$$x(t) = \cos(2\pi t), \quad y(t) = \sin(2\pi t), \quad t \in [0,1].$$

Näin ollen voidaan valita esimerkiksi

$$z(s,t) = (2-s)\cos(2\pi t) + i(3-2s)\sin(2\pi t),$$

missä $0 \le s \le 1$ ja $0 \le t \le 1$. Tällöin $z(0,t)$ parametrisoi käyrän Γ_0, $z(1,t)$ parametrisoi käyrän Γ_1 ja selvästi $z(s,t)$ parametrisoi jonkin silmukan alueessa D $\forall s \in [0,1]$.

② (a) Nyt $f(z) := \sin(3z)$ on kokonainen ja $\frac{\pi}{2}$ on käyrän C sisällä, joten Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\int_C \frac{\sin(3z)}{z-\frac{\pi}{2}}\,dz = 2\pi i\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi i.$$

(b) Funktio $f(z) = 5z^2+2z+1$ on kokonainen ja piste i on C:n sisällä, joten yleistetyn Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\int_C \frac{5z^2+2z+1}{(z-i)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} f^{(2)}(i) = 10\pi i.$$

(c) Nyt pisteistä 0 ja 4 (integrandin nimittäjän nollakohdat) piste 0 on käyrän C sisällä ja 4 sen ulkopuolella. Näin ollen funktio $f(z) = \frac{\sin z}{z-4}$ on analyyttinen käyrällä C ja sen sisällä, joten yleistetty Cauchyn integraalikaava antaa

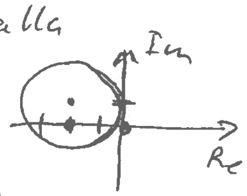
$$\int_C \frac{\sin z}{z^2(z-4)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \frac{-4}{(-4)^2} = -i\frac{\pi}{2}.$$

③ (a) Integrandin nimittäjän nollakohdista piste 0 on C:n sisällä ja -2 sen ulkopuolella, joten $f(z) = \frac{z+i}{z+2}$ on analyyttine C:llä ja sen sisällä. Yleistetyn Cauchyn integraalikaavan nojalle

$$\int_C \frac{z+i}{z^2(z+2)}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \frac{2-i}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi i.$$

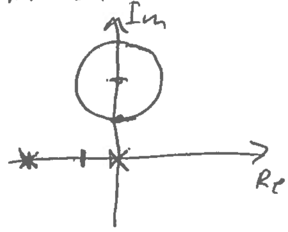
(b) Nyt piste 0 on käyrän C ulkopuolella ja -2 sen sisällä, joten Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\left(f(z) = \frac{z+i}{z^2} \right)$$



$$\int_C \frac{z+i}{z^2(z+2)}\,dz = 2\pi i\, f(-2) = 2\pi i\, \frac{-2+i}{4} = -\frac{\pi}{2} - \pi i.$$

(c) Nyt pisteet 0 ja -2 ovat molemmat käyrän C ulkopuolella, joten funktio $\frac{z+i}{z^2(z+2)}$ on analyyttinen suljetulla käyrällä C ja sen sisällä. Näin ollen Cauchyn integraalilauseen nojalla



$$\int_C \frac{z+i}{z^3+2z^2}\,dz = 0.$$

(4) Oletuksen nojalla on olemassa yhdesti yhtenäinen alue D siten, että f on analyyttinen siinä ja ääriviivalle Γ pätee $\Gamma \subset D$. Lauseen 1.5.6 nojalla myös f' on analyyttinen alueessa D. Näin olle Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 2\pi i\, f'(z_0), & z_0 \in Int(\Gamma) \\ 0, & z_0 \in Ext(\Gamma). \end{cases}$$

Toisaalta yleistetty Cauchyn integraalikaava antaa

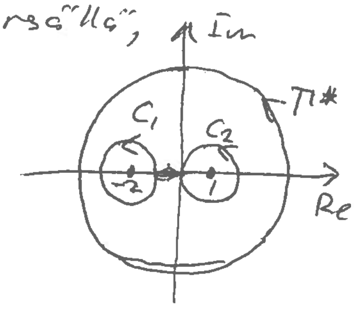
$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = \begin{cases} 2\pi i\, f'(z), & z_0 \in Int(\Gamma) \\ 0, & z_0 \in Ext(\Gamma). \end{cases}$$

Väite seuraa.

(5) (a) Kyllä (b) Ei voida, sillä pistettä 4 ei voida ylittää.

(c) Kyllä (d) Ei voida, sillä mitään pisteistä 0, $2i$ ja 4 ei voida ylittää.

(6) Olkoon Γ^* ympyrä $|z|=4$ kuljettava kerran vastapäivään. Nyt pisteet -2 ja 1 ovat molemmat Γ^*:n sisällä, joten deformoidaan Γ^* jatkuvasti ääriviivaksi Γ_0 (ks. kuva). Tällöin



$$\int_{\Gamma^*} \frac{z}{(z+2)(z-1)}\,dz = \int_{C_1} \frac{z}{(z+2)(z-1)}\,dz + \int_{C_2} \frac{z}{(z+2)(z-1)}\,dz.$$

Näin saadut integraalit voi nyt laskea haluamallaan tavalla, esimerkiksi käyttäen osamurtokehitelmää

$$\frac{z}{(z+2)(z-1)} = \frac{2/3}{z+2} + \frac{1/3}{z-1}$$

ja Esimerkissä 1.2.7. käytetään nyt kuitenkin Cauchyn integraalikaavaa, jolla saadaan

$$\int_{C_1} \frac{z/(z-1)}{z+2}\,dz = 2\pi i\,\frac{-2}{-3} = \frac{4}{3}\pi i$$

ja

$$\int_{C_2} \frac{z/(z+2)}{z-1}\,dz = 2\pi i\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi i.$$

Muistaen kiertävän Γ^* valinta saadaan siis

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{(z+2)(z-1)}\,dz = -2\left(\frac{4}{3}\pi i + \frac{2}{3}\pi i\right) = -4\pi i.$$

(7) Nytkin nimittäjän $(z^2+1)^2 = (z+i)^2(z-i)^2$ nollakohdat i ja $-i$ ovat molemmat käyrän Γ sisällä. Voitaisiin toimia kuten edellisessä tehtävässä (deformoida Γ "kaksipiiriksi"), mutta toimitaan esimerkin ja vaihtelun vuoksi hieman toisin ja käytetään osamurtokehitelmää

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{(z-i)^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{(z+i)^2},$$

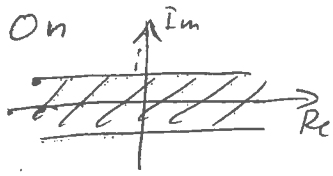
missä $A = -\frac{1}{4}i$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}i$ ja $D = -\frac{1}{4}$. Nyt yleistetty Cauchyn integraalikaava antaa $(f(z) = e^{iz})$

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = A\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z-i}\,dz + B\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\,dz + C\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z+i}\,dz + D\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\,dz$$

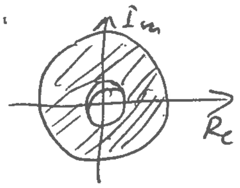
$$= 2\pi i\left(A f(i) + B f'(i) + C f(-i) + D f'(-i)\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{4} i e^{-1} - \frac{1}{4}\cdot i e^{-1} + \cancel{\frac{1}{4} i e} - \cancel{\frac{1}{4} i e}\right) = \pi e^{-1}.$$

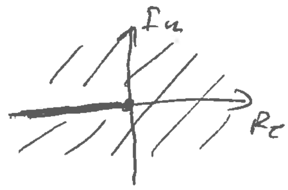
(8) (a) On



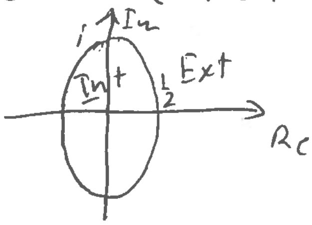
(b) Ei



(c) On



(d) On (e) Ei



(f) On.