

---

**Kompleksianalyysi b****Syksy 2016****Harjoitus 3, 24.11.2016 klo 8-10, M303**Lisää tehtäviä paperin toisella ja neljännellä sivulla.

---

1. Esitä funktio  $z(s, t)$ , joka deformerii jatkuvasti silmukan  $\Gamma_0$  silmukaksi  $\Gamma_1$  alueessa  $D$ , missä  $\Gamma_0$  on ellipsi  $x^2/4 + y^2/9 = 1$  kuljettuna kerran vastapäivään alkaen pisteestä  $(2, 0)$ ,  $\Gamma_1$  on ympyrä  $|z| = 1$  kuljettuna kerran vastapäivään alkaen pisteestä  $(1, 0)$  ja  $D$  on rengasalue  $1/2 < |z| < 4$ . *Vihje:* Tarkastele silmukan  $\Gamma_0$  parametrisointia  $x(t) = 2 \cos(2\pi t)$ ,  $y(t) = 3 \sin(2\pi t)$ , missä  $0 \leq t \leq 1$ .

2. Olkoon  $C$  ympyrä  $|z| = 2$  kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan. Laske:

$$(a) \int_C \frac{\sin(3z)}{z - \frac{\pi}{2}} dz, \quad (b) \int_C \frac{5z^2 + 2z + 1}{(z - i)^3} dz, \quad (c) \int_C \frac{\sin(z)}{z^2(z - 4)} dz.$$

3. Laske

$$\int_C \frac{z + i}{z^3 + 2z^2} dz,$$

missä  $C$  on

- (a) ympyrä  $|z| = 1$  kuljettuna kerran vastapäivään;
  - (b) ympyrä  $|z + 2 - i| = 2$  kuljettuna kerran vastapäivään;
  - (c) ympyrä  $|z - 2i| = 1$  kuljettuna kerran vastapäivään.
4. Olkoon  $f$  analyyttinen sekä suljetulla yksinkertaisella ääriviivalla  $\Gamma$  että sen sisällä. Osoita Luvun 1.5 tulosten avulla, että

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

kaikilla  $z_0 \notin \Gamma$ .

5. Olkoon  $D$  kompleksitaso, josta on poistettu pisteet  $0$ ,  $2i$  ja  $4$ , ja olkoon  $\Gamma$  ääriviiva Kuvassa 1(a) (ks. Sivun 2, paperin toinen puoli). Mitkä seuraavista ääriviivoista voidaan jatkuvasti deformoida ääriviivaksi  $\Gamma$  alueessa  $D$ :

- (a) ääriviiva  $\Gamma_0$  Kuvassa 1(a);
- (b) ympyrä  $|z| = 3$  kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan alkaen pisteestä  $z = 3$ ;
- (c) ympyrä  $|z| = 10^4$  kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan alkaen pisteestä  $z = 10^4$ ;
- (d) ympyrä  $|z - 2| = 1$  kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan alkaen pisteestä  $z = 3$ .

6. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz,$$

missä  $\Gamma$  on ympyrä  $|z| = 4$  kuljettuna kahdesti myötäpäivään.

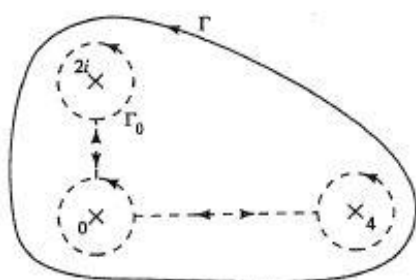
7. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz,$$

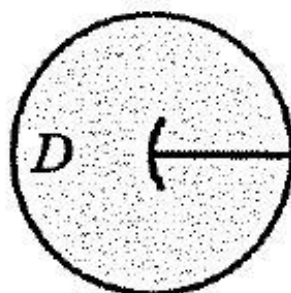
missä  $\Gamma$  on ympyrä  $|z| = 3$  kuljettuna kerran vastapäivään.

8. Mitkä seuraavista alueista ovat yhdesti yhtenäisiä:

- (a) vaakasuora kaistale  $|\operatorname{Im} z| < 1$ ;
- (b) rengasalue  $1 < |z| < 2$ ;
- (c) kompleksitaso pois lukien ei-positiivinen reaaliakseli;
- (d) ellipsin  $4x^2 + y^2 = 1$  sisäosa;
- (e) ellipsin  $4x^2 + y^2 = 1$  ulko-osa;
- (f) alue  $D$  Kuvassa 1(b).



(a) Ääriovi Tehtävässä 5.



(b) Onko  $D$  yhdesti yhtenäinen?

Kuva 1: Tehtävissä tarvittavat kuvat.

---

**Kompleksianalyysi b****Syksy 2016****Harjoitus 4, 24.11.2016 klo 12-14, M303**

---

1. Olkoon  $f$  yksikkökierokossa  $\mathbb{D}$  analyyttinen funktio, jolle pätee  $|f(z)| < 1/(1 - |z|)$  kaikilla  $z \in \mathbb{D}$ . Osoita, että

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n(1-R)}, \quad 0 < R < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Millä arvolla  $R$  yläraja on pienimmillään?

2. Etsi kiekossa  $D(0, R)$  analyyttiset funktiot, joille  $f(0) = i$  ja  $|f(z)| \leq 1$  kaikilla  $z \in D(0, R)$ .
3. Olkoon  $f$  analyyttinen rajoitetussa alueessa  $D$ , ja jatkuva sekä alueessa  $D$  että sen reunalla. Jos  $f$  on nollasta poikkeava alueessa  $D$ , osoita että  $|f(z)|$  saa pienimmän arvonsa alueen  $D$  reunalla. *Vihje:* Tarkastele funktiota  $1/f$ .
4. Olkoot  $a, b \in \mathbb{C}$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Osoita, että  $\max_{|z| \leq 1} |az^n + b| = |a| + |b|$ .
5. Todista seuraava väite: Jos  $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$  suppenee, niin tällöin  $c_j \rightarrow 0$  kun  $j \rightarrow \infty$ . *Vihje:* Tarkastele osasummien erotusta  $S_n - S_{n-1}$ .
6. Osoita, että sarja  $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$  hajaantuu, kun  $|c| \geq 1$ .
7. Etsi suhdetestin avulla kompleksitason alueet, jossa seuraavat funktiotermiset sarjat suppenevat:
- (a)  $\sum_{j=1}^{\infty} jz^j$ ,
  - (b)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{2^k}$ ,
  - (c)  $\sum_{k=0}^{\infty} (z+5i)^{2k}(k+1)^2$ .
8. Todista, että  $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}$  suppenee kun  $p > 1$ . *Vihje:* Tulkitse integraali  $\int_1^N x^{-p} dx$  ja summa  $\sum_{j=2}^N j^{-p}$  pinta-aloina, ja vertaa.