Kompleksianalyysi b 2013

Harjoitus 4, Ratkaisut

① Olkoon äärivirra Γ positiivisesti suunnistettu origokeskinen R-säteinen ympyrä, $0<R<1$. Tällöin yleistetyn Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi-0)^{n+1}}\,d\xi \quad , \; n \in \mathbb{N}.$$

Näin ollen Lauseen 1.2.11 nojalla saadaan

$$|f^{(n)}(0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}}\,d\xi\right| \le \frac{n!}{2\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| l(\Gamma)$$

$$< \frac{n!}{2\pi}\,\frac{1}{R^{n+1}(1-R)}\cdot 2\pi R = \frac{n!}{R^{n}(1-R)}.\ \square$$

Tarkastellaan funktiota $g(R) = R^n(1-R)$ välillä $[0,1]$. Koska $g(0)=g(1)=0$ ja selvästi $g(R)\ge 0$ $\forall R\in[0,1]$, niin g saa suurimman arvonsa välillä $[0,1]$ derivaatan g' nollakohdassa. Nyt

$$g'(R) = nR^{n-1}-(n+1)R^n = R^{n-1}(n-(n+1)R),$$

joten $g'(R)=0 \iff R=0$ tai $R=\frac{n}{n+1}$. Näin ollen yläraja $\frac{n!}{R^n(1-R)}$ on pienimmillään, kun $R=\frac{n}{n+1}$.

② Vaaditut ehdot toteuttava funktio f on analyyttinen kiekossa $D(0,R)$ ja

$$|f(z)| \le 1 = |i| = |f(0)|$$

$\forall z\in D(0,R)$. Näin ollen maksimiperiaatteen nojalla f on vakio joukossa $D(0,R)$, ja koska $f(0)=i$, niin $f(z)=i$ $\forall z\in D(0,R)$.

③ Jos f on vakiofunktio, niin väite on triviaalisti tosi. Oletetaan, että f ei ole vakio, ja olkoon $z_0\in\overline{D}$ s.e. $|f(z_0)|\le|f(z)|$ $\forall z\in\overline{D}$ (tällainen piste on olemassa, koska f on jatkuva kompaktissa joukossa $\overline{D}$).

Antiteesi: $z_0\in D$.

Olkoon $g=\frac{1}{f}$. Koska $f(z)\ne 0$ $\forall z\in D$, niin g on analyyttinen alueessa D. Lisäksi

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{1}{|f(z_0)|} = |g(z_0)|$$

$\forall z \in D$, mikä on ristiriidassa maksimiperiaatteen kanssa, sillä g ei ole vakio. Näin ollen $z_0 \in \partial D$. □

(4) Kolmioepäyhtälön nojalla $\forall z \in \mathbb{D}$ pätee

$$|az^n + b| \leq |a||z|^n + |b| \leq |a| + |b|,$$

joten $\max_{|z|\leq 1} |az^n + b| \leq |a| + |b|$. Merkitään $a = re^{i\theta}$ ja $b = \rho e^{i\varphi}$, ja olkoon $z_0 = e^{i\frac{\varphi-\theta}{n}}$, jolloin $|z_0| = 1$. Tällöin $|a| + |b| = r + \rho$ ja

$$|az_0^n + b| = |re^{i\theta}(e^{i\frac{\varphi-\theta}{n}})^n + \rho e^{i\varphi}|$$

$$= |re^{i\theta}e^{i(\varphi-\theta)} + \rho e^{i\varphi}| = |re^{i\varphi} + \rho e^{i\varphi}|$$

$$= |e^{i\varphi}||r + \rho| = r + \rho = |a| + |b|,$$

joten $\max_{|z|\leq 1} |az^n + b| \geq |a| + |b|$. Väite seuraa. □

(5) Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ suppenee, niin $\exists S \in \mathbb{C}$ ja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|\sum_{j=0}^{n} c_j - S\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Jos nyt $n \geq n_\varepsilon + 1$, niin

$$|c_n| = \left|\sum_{j=0}^{n} c_j - \sum_{j=0}^{n-1} c_j\right| \leq \left|\sum_{j=0}^{n} c_j - S\right| + \left|S - \sum_{j=0}^{n-1} c_j\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Raja-arvon määritelmän nojalla $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. □

(6) Antiteesi: $\exists c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ s.e. $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ suppenee.

Tällöin tehtävän 5 nojalla

$$0 \overset{\text{teht. 5}}{=} \lim_{j\to\infty} |c^j| = \lim_{j\to\infty} |c|^j \geq \lim_{j\to\infty} 1^j = 1 > 0.$$

Ristiriita, ja väite seuraa. □

(7) Huom! Suhdetestillä löydetyt suppenemisalueet eivät välttämättä ole suurimpia $\mathbb{C}$:n alueita, joissa kyseiset sarjat suppenevat.

(a) Saadaan

$$\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| = \left|\frac{(j+1)z^{j+1}}{jz^j}\right| = \frac{j+1}{j}|z| \xrightarrow{j\to\infty} |z|,$$

joten jos $|z|<1$, niin sarja suppenee suhdetestin nojalla. Sarjan sarjan $\sum_{j=1}^{\infty} jz^j$ suppenemisalue on siis $\mathbb{D} = D(0,1)$.

(b) Nyt

$$\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| = \left|\frac{(z-i)^{j+1}}{2^{j+1}} \cdot \frac{2^j}{(z-i)^j}\right| = \frac{|z-i|}{2} \xrightarrow{j\to\infty} \frac{|z-i|}{2},$$

joten sarja suppenee suhdetestin nojalla, jos $|z-i|/2 < 1 \iff |z-i|<2$. Saatu suppenemisalue on siis $D(i,2)$.

(c) Nyt

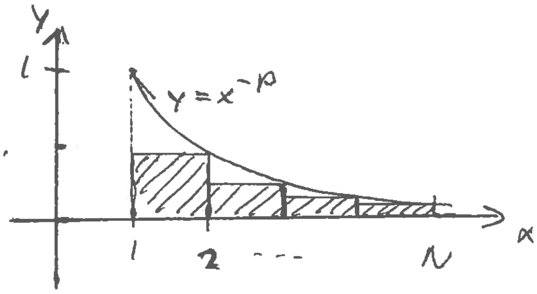
$$\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}\right| = \left|\frac{(z+5i)^{2(j+1)}(j+2)^2}{(z+5i)^{2j}(j+1)^2}\right| = |z+5i|^2\left(\frac{j+2}{j+1}\right)^2$$

$$\xrightarrow{j\to\infty} |z+5i|^2,$$

joten sarja suppenee suhdetestin nojalla, jos $|z+5i|^2<1 \iff |z+5i|<1$. Saatu suppenemisalue on siis $D(-5i,1)$.

(8) Olkoon $p>1$, ja merkitään $f(x)=x^{-p}$, $x\in[1,\infty)$. Nyt oheisessa kuvassa varjostetun alueen pinta-ala on

$$1\cdot 2^{-p} + \dots + 1\cdot N^{-p} = \sum_{j=2}^{N} j^{-p}, \quad N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$



Koska tämä on selvästikin vähemmän kuin käyrän $y=f(x)$ ja x-akselin välillä $[1,N]$ rajaaman alueen pinta-ala, niin $\forall N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ pätee

$$\sum_{j=2}^{N} j^{-p} \le \int_1^N x^{-p}\,dx.$$

Koska $f(x)=x^{-p}\ge 0$ $\forall x\ge 1$ ja

$$\int_1^\infty x^{-p}\,dx = \Big/_1^\infty \frac{1}{1-p}x^{1-p} = \frac{1}{p-1},$$

niin

$$\sum_{j=1}^{N} j^{-p} = 1 + \sum_{j=2}^{N} j^{-p} \le 1 + \int_1^N x^{-p}dx \le 1 + \int_1^\infty x^{-p}dx = 1+\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Näin ollen osasummien $\sum_{j=1}^{N} j^{-p}$ jono on kasvava ($j^{-p} > 0 \;\forall j \in \mathbb{N}$) ja ylhäältä rajoitettu, ja siten sillä on äärellinen raja-arvo. Siis sarja $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}$ suppenee (ja edellä olevan nojalla sen summalle pätee

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p} \leq \frac{p}{p-1}).\ \square$$