
Kompleksianalyysi b**Syksy 2016****Harjoitus 5, keskiviikkona 30.11.2016 klo 8-10**

1. Osoita vertailutestin ja Harjoitusten 4 Tehtävän 8 avulla, että seuraavat sarjat suppenevat.

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+i)},$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^{\frac{3}{2}}},$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{5k+8}{k^3-1}.$

2. Osoita, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ ei suppene tasaisesti kohti funktiota $1/(1-z)$ avoimessa yksikkökierokossa $\mathbb{D}$.

3. Johda seuraavat Taylorin sarjakehitelmät etsimällä yleinen kaava luvuille $f^{(j)}(z_0)$.

(a) $e^{-z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z)^j}{j!}, z_0 = 0,$

(b) $\cosh z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{(2j)!}, z_0 = 0,$

(c) $\operatorname{Log}(1-z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-z^j}{j}, z_0 = 0.$

4. Etsi seuraavien funktioiden Taylorin sarjaesitykset annettujen pisteiden suhteen, ja tarkastele sarjakehitelmien suppenemista näiden pisteiden ympäristöissä.

(a) $\frac{1}{1+z}$, pisteessä $z_0 = 0,$

(b) $\frac{1+z}{1-z}$, pisteessä $z_0 = i,$

(c) $\frac{z}{(1-z)^2}$, pisteessä $z_0 = 0.$

5. Esitä eksplisiittisesti sellainen analyyttinen funktio f , jolla on Maclaurinin sarjaesitys $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$. *Vihje:* Tunnetusti $(1-z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

6. Onko olemassa potenssisarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, joka suppenee pisteessä $z = 2 + 3i$ ja hajaantuu pisteessä $z = 3 - i$?

7. Etsi kolme ensimmäistä nollasta poikkeavaa kerrointa funktion $f(z) := \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta$ Maclaurinin sarjassa. *Vihje:* Etsi funktion e^{ζ^2} sarjakehitelmä.

8. Olkoon g jatkuva reaalivälillä $[0, 1]$ ja määritellään

$$H(z) := \int_0^1 \frac{g(t)}{1-zt^2} dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Osoita, että H on analyyttinen yksikkökierokossa $\mathbb{D}$.