

HS ratkaisut

(1.) Vertailutesti kertoo, että jos $|c_j| \leq M_j \quad \forall j \in \mathbb{N}, j \geq j_0$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ suppenee, niin myös $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ suppenee. on olemassa j.s.e.

a) Koska $\forall j \in \mathbb{N} \quad j \leq |j+1|$,

on $\forall j \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{1}{j(j+1)} \right| \leq \frac{1}{j^2}.$$

Koska (H4T8) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ suppenee, vertailut. nojalla siis myös $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}$ suppenee.

b) Nyt $\forall k \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{\sin(k^2)}{k^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{k^{3/2}}$, sillä $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leq 1$. Koska (H4T8)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ suppenee, myös

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^{3/2}}$ suppenee vertailutestin nojalla.

c) Ensinnäkin $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ on

$$\left| (-1)^k \frac{5k+8}{k^3-1} \right| = \frac{5k+8}{k^3-1}. \quad \text{Toisaalta } 5k+8 \leq 6k \Leftrightarrow k \geq 8$$

ja $k^3-1 \geq \frac{1}{2}k^3 \Leftrightarrow k^3 \geq 2$ eli $k \geq 8 \quad (k \in \mathbb{N})$, joten kun $k \geq 8$,

$$\frac{5k+8}{k^3-1} \leq \frac{6k}{\frac{1}{2}k^3} = 12/k^2. \quad \text{H4T8 nojalla}$$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{12}{k^2}$ suppenee, joten myös $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{5k+8}{k^3-1}$

suppenee vertailutestin nojalla.

2. Osoitettava:

sarja $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ ei suppene tasaisesti kohti
funktiota $1/(1-z)$ avoimessa yksikkökieroksessa ID .

tod: Merk. sarjan n:tä osasummaa S_n ;
siis $S_n(z) = \sum_{j=0}^n z^j$.

Tälle äärelliselle summalle on mahdollista
johtaa kaava seuraavasti, kun $z \neq 1$:

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^n z^j = 1 + \sum_{j=1}^n z^j = 1 + z \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j \right) = 1 + z(S_n(z) - z^n)$$

$$\Rightarrow S_n(z) = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}. \quad \text{Siis jos } |z| < 1, \text{ niin}$$

$$\left| S_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \left| \frac{-z^{n+1}}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}.$$

Toisaalta $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1/2 \leq n+1\sqrt{1/2} < 1$, (jossa $n+1\sqrt{1/2}$
siis $1/2$ on positiivinen reals reaaliluku), joten
jos val. $z = n+1\sqrt{1/2}$, on $|1-z| < 1/2$, joten

$$\left| S_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} > 2 \cdot \left(n+1\sqrt{1/2} \right)^{n+1} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Siis $\forall n \in \mathbb{N}$ on olemassa $z \in ID$ s.e.

$$\left| S_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| > 1.$$

$\Rightarrow \{S_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ei supp. tasaisesti kohti
 $1/(1-z) : aa,$ eli sarja
 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ei supp. tasaisesti kohti
 $1/(1-z) : aa.$

3.

3/9

a) $f(z) = e^{-z}$:

Myt

$$f'(z) = -e^{-z}$$

$$f''(z) = e^{-z}$$

⋮

$$\forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad f^{(j)}(z) = (-1)^j e^{-z}, \quad \text{joten} \quad f^{(j)}(0) = (-1)^j.$$

Sis funktion f Taylorin sarja pisteen

0 suhteen on

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (z-0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-z)^j}{j!}$$

b) $f(z) = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

Myt $f'(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$f''(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

⋮

$$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad f^{(j)}(z) = \frac{e^z + (-1)^j e^{-z}}{2}, \quad \text{eli} \quad f^{(j)}(0) = \frac{1 + (-1)^j}{2} = \begin{cases} 1, & j \text{ parill.} \\ 0, & j \text{ pariton.} \end{cases}$$

Sis fin Taylorin sarja pisteen 0 suhteen on

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (z-0)^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} (z)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

c) Funktio $f(z) = \text{Log}(1-z)$ on analyyttinen, jos

$z \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty[$, ja tällöin

$$f'(z) = \frac{-1}{1-z}$$

$$f''(z) = -\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f'''(z) = -\frac{2}{(1-z)^3}$$

$$\Rightarrow f^{(j)}(z) = -\frac{(j-1)!}{(1-z)^j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow f^{(j)}(0) = \begin{cases} \text{Log } 1 = 0, & j=0 \\ -\frac{(j-1)!}{(1-0)^j} = -(j-1)!, & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(3. jatkun.)
 joten f in Taylorin sarja pisteen 0
 suhteen on

4/8

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (z-0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-(-j-1)!}{j!} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{z^j}{j}\right).$$

(4.)

a) Oletetaan
 Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{1+z}.$$

$$f'(z) = -\frac{1}{(1+z)^2} = -(1+z)^{-2}$$

$$f''(z) = (-2)(-1)(1+z)^{-3}$$

$$f'''(z) = (-3)(-2)(-1)(1+z)^{-4}$$

⋮

$$f^{(j)}(z) = (-1)^j j! (1+z)^{-(j+1)}, \quad \text{kun } j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\text{eli } f^{(j)}(0) = (-1)^j j!.$$

Sii funktion f Taylorin sarja pist. 0
 suhteen on

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (z-0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j.$$

Koska f on analyyttinen kiekossa $D(0,1)$
 (f analyyttinen $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ ssä), on kun $|z| < 1$

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{j=0}^{\infty} (-z)^j \quad (\text{L 2.2.2}).$$

Toisaalta kun $|z| \geq 1$, sarja ei edes suppene
 (H4 T6), joten se ei suppene erittäen $f(z)$:n.

(4. jatkuna)

5/9

b) $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ pist. $z_0 = i$:

Nyt $f'(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$

$$f''(z) = 2 \cdot \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$f'''(z) = 3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{(1-z)^4} \quad \text{ja edelleen}$$

⋮

$$f^{(j)}(z) = 2 \cdot (j-1)! \cdot \frac{1}{(1-z)^{j+1}}, \quad \text{kun } j \in \mathbb{N},$$

joten $f^{(j)}(i) = 2 \frac{j!}{(1-i)^{j+1}} = \frac{2}{1-i} \frac{j!}{(1-i)^j}, \quad \text{kun } j \in \mathbb{N}.$

Sis. f on Taylorin sarja pist. i suhteen on

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(i)}{j!} (z-i)^j = f(i) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{1-i} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^j = \frac{1+i}{1-i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{1-i} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^j$$

Koska f on analyyttinen $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:ssä, ja

$D(i, \sqrt{2}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{1\}$, Taylorin sarja suppenee kuhti $f(z)$:aa

$D(i, \sqrt{2})$:ssa (L 2.2.2). Toisaalta tämä tarkoittaa

samaa kuin $|z-i| < \sqrt{2} = |1-i|.$

H4T6 nojalla Taylorin sarja hajaantuu,

kun $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| \geq 1$ eli $|z-i| \geq |1-i|.$

c) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, pisteen 0 suhteen:

Nyt voisi laskea derivattoja kuten b)-kohdassa;

huomataan kuitenkin, että $f(z) = z \cdot \frac{1}{(1-z)^2}$

merk. $f_1(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$. Nyt $f_1'(z) = (-1)(-2)(1-z)^{-3}$

$$f_1''(z) = (-1)(-3) \cdot 2(1-z)^{-4} \quad \text{ja edelleen}$$

$$f_1^{(j)}(z) = (j+1)! (1-z)^{-(j+2)} \Rightarrow f_1^{(j)}(0) = (j+1)!.$$

(4. jatkuv.)

6/9

siiis funktion f , Taylorin sarja pist 0 suhteen

$$\text{on } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) z^j.$$

Tämä supp. kohti arvoa $f(z)$ kiekossa $B(0,1)$,
sillä f , on analyyttinen $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:ssä, ts.

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) z^j, \text{ kun } |z| < 1.$$

siiis

$$f(z) = z f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) z^{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} j z^j, \text{ kun } |z| < 1.$$

(jos $|z| \geq 1$, sarja ei suppene)
H4 T6

5.

Esittäm analyyttisen (0:n ympäristössä)
funktio f , jolla Maclaurinin sarjaesitys

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$$

ratk: On tunnettua, että kun $|z| < 1$, niin

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} := f_1(z). \text{ Siiis L 2.2.4 nojalla}$$

f_1 'in Maclaurinin sarja on f_1 'in vastaavasta
termiteittäin derivoimalla saatava

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1}, \text{ joka supp. kohti } f_1' \text{ia kun } |z| < 1,$$

$$\text{ts. } \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \text{ kun } |z| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k.$$

(5. jatkuu)

7/9

Toistamalla tämä menettely funktiolle $f_2(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ saadaan

$$f_2'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^{k-1}, \quad \text{kun } |z| < 1$$

$$\text{eli } \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k = z f_2'(z) = z \left(\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{2z}{(1-z)^3} \right) = z \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

(kun $|z| < 1$).

Siis haluttu f on $f(z) = z \frac{1+z}{(1-z)^3}$.

6. Onko olemassa potenssisarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, joka suppenee pisteessä $z = 2+3i$ ja hajaantuu pisteessä $z = 3-i$?

Vast: Ei. Jos nimittäin potenssisarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ suppenee pisteessä $z = 2+3i$, sen suppenemisraja R (L2.3.2) on $> |2+3i| = \sqrt{13}$. Koska $|3-i| = \sqrt{10} < \sqrt{13}$, tulisi siis sarjan supeta myös pisteessä $z = 3-i$.

7. Ensinnäkin funktio $z \mapsto e^z$ on kokonainen, ja sillä on Maclaurinin sarjaesitys

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \text{joka suppenee } \forall z \in \mathbb{C},$$

ja suppenee tasaisesti ainakin joukoissa

$$\overline{D(0, R)}, \quad R > 0.$$

$$\text{Siis } \forall z \in \mathbb{C} \quad e^{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k!}.$$

(7. jatkun)

8/9

joka siis on e^z in Maclaurinin sarja.

Tämän suppenemisominaisuudet ovat samat kuin e^z in vastaavan.

Tarkastellaan nyt funktiota $f(z) = \int_0^z e^{c^2} dc$.

(koska $c \mapsto e^{c^2}$ kokonainen, integraali aina määriteltä ja polulla ei väliä). Nyt jos $z \in \mathbb{C}$,

e^{c^2} in Maclaurin sarja supp. tas. ~~jos~~ jatkossa $\overline{D(0, |z|)}$,

ts. $\sum_{k=0}^n \frac{c^{2k}}{k!} \rightarrow e^{c^2}$ tasaisesti, kun $n \rightarrow \infty$.

Täten (L 2.3.5) jos integrointipoluksi valitaan jana $0 \rightarrow z$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z e^{c^2} dc = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^z \left(\sum_{k=0}^n \frac{c^{2k}}{k!} \right) dc = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\int_0^z \frac{c^{2k}}{k!} dc \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)k!}. \end{aligned}$$

Kolme ensimmäistä termiä:

$$k=0 : z$$

$$k=1 : z^3/3$$

$$k=2 : z^5/10.$$

8. Osoitettava: Jos $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ jva, niin

$H(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{1-zt^2} dt$ ($z \in \mathbb{D}$) on analyyttinen ($\mathbb{D}$:ssä).

tod: jo: Sarja $\sum_{k=0}^{\infty} (zt^2)^k g(t)$ suppenee tasaisesti $[0,1]$:ssä

Kohti: funktioita $t \mapsto \frac{g(t)}{1-zt^2}$, kun $z \in \mathbb{D}$ kiinnitetty:

Olkoon $z \in \mathbb{D}$. Nyt kun $t \in [0,1]$, on $|zt^2| < 1$

$$\text{eli: } \frac{1}{1-zt^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (zt^2)^k \quad \text{j} \ddot{\text{a}} \quad \frac{g(t)}{1-zt^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (zt^2)^k g(t).$$

Toisaalta koska g on jatk., on sen moduli rajoitettu $[0,1]$:ssä eli $\exists M > 0$ s.e.
 $|g(t)| \leq M \quad \forall t \in [0,1]$.

Koska nyt $\forall k \in \mathbb{N}, t \in [0,1]$

$$|(zt^2)^k g(t)| \leq M |z|^k, \quad \text{j} \ddot{\text{a}} \quad \sum_{k=0}^{\infty} M |z|^k \text{ suppenee}$$

positiivitermien sarja ($|z| \in \mathbb{D} \Rightarrow |z| < 1$), Weierstrassin M -testin nojalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} (zt^2)^k g(t) \text{ suppenee tasaisesti } [0,1] \text{ :ssä}$$

2^o Nyt lön j} \ddot{a} L 2.3.5 nojalla, kun $z \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} H(z) &= \int_0^1 \frac{g(t)}{1-zt^2} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (zt^2)^k g(t) \right) dt \stackrel{(L 2.3.9)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (zt^2)^k g(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^1 t^{2k} g(t) dt. \end{aligned}$$

$$\text{Koska } \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \left| \int_0^1 t^{2k} g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |t^{2k} g(t)| dt \leq M,$$

t} \ddot{a} m} \ddot{a} sarja suppenee. Siis L 2.3.7 nojalla

$H(z)$ on analyyttinen $\mathbb{D}$:ssä.