
Kompleksianalyysi b
Syksy 2016
Harjoitus 6, 8.12.2016 klo 12-14, M303

1. Määää funktion

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)}$$

Laurentin sarja seuraavissa alueissa: (a) $\mathbb{D}$, (b) $D(0, 2) \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ja (c) $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, 2)}$.

2. Esitä funktion $\sin(2z)/z^3$ Laurentin sarja joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. Mikä on suurin origokeskinen rengasalue, jossa Laurentin sarja

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{z^j}{2^{|j|}}$$

suppenee?

4. Olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Määää funktion

$$f_n(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^n}$$

Laurentin sarja joukossa $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, |\alpha|)}$.

5. Olkoon $P(z) = a_n(z - z_1)^{d_1}(z - z_2)^{d_2} \cdots (z - z_r)^{d_r}$. Näytä, että kun $P(z) \neq 0$,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d_1}{z - z_1} + \frac{d_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{d_r}{z - z_r}.$$

(Vihje: Tiedetään että kolmelle funktiolle f , g ja h pätee $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$. Sama pätee myös jos funktioita on r kappaletta.)

6. Olkoon P polynomi jolla ei ole nollakohtia yksinkertaisella suljetulla positiivisesti (vastapäivään) suunnistetulla polulla Γ . Todista että P :llä on nollakohtia (ml. kertaluvut) polun Γ sisällä täsmälleen

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

kappaletta.