1. Laskemalla osamurtokehitelmä saadaan

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)} = \frac{1/3}{z+1} + \frac{2/3}{z-2}.$$

Seuraavaksi pyritään esittämään oikean puolen termit geometrisen sarjan summakaavan avulla.

(a) Jos $z \in \mathbb{D}$, niin $|-z|<1$ ja $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, joten

$$\frac{1/3}{z+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}(-z)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{3}z^j,$$

ja

$$\frac{2/3}{z-2} = -\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{-1}{3\cdot 2^j}z^j. \qquad (1)$$

Saadaan siis

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left((-1)^j - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)z^j, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(b) Jos $z \in D(0,2)\setminus\overline{\mathbb{D}}$, niin $\left|-\frac{1}{z}\right|<1$ ja $\left|\frac{z}{2}\right|<1$, joten (1) on voimassa ja

$$\frac{1/3}{z+1} = \frac{1}{3z}\,\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})} = \frac{1}{3z}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{3}\,\frac{1}{z^{j+1}}. \qquad (2)$$

Täten

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{3}\,\frac{1}{z^{j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{-1}{3\cdot 2^j}z^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j z^j,$$

missä

$$a_j = \begin{cases}\dfrac{-1}{3\cdot 2^j}, & \text{kun } j \geq 0\\[2mm] \dfrac{(-1)^{-j-1}}{3}, & \text{kun } j<0;\end{cases} \quad z \in D(0,2)\setminus\overline{\mathbb{D}}.$$

(c) Jos $z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D(0,2)}$, niin $\left|-\frac{1}{z}\right|<1$ ja $\left|\frac{2}{z}\right|<1$, joten (2) on voimassa ja

$$\frac{2/3}{z-2} = \frac{2}{3z}\,\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{2}{3z}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j+1}}{3}\,\frac{1}{z^{j+1}}.$$

Siten

$$\frac{z}{(z+1)(z-2)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{3}\,\frac{1}{z^{j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{j+1}}{3}\,\frac{1}{z^{j+1}} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j z^j, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\overline{D(0,2)},$$

missä

$$a_j = \begin{cases}0, & \text{kun } j \geq 0\\[2mm] \frac{1}{3}\left((-1)^{-j-1}+2^{-j}\right), & \text{kun } j<0.\end{cases}$$

2. Koska (Esimerkki 2.2.5)

$$\sin(2z) = 2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \dots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}(2z)^{2j+1} \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

niin

$$\frac{\sin(2z)}{z^3} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}2^{2j+1}z^{2j-2} \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

3. Nyt
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{z^j}{2^{|j|}} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{z^j}{2^{-j}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j z^j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{2^j} =: S_1 + S_2,$$
missä S_1 suppenee, kun $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \iff |z| > \frac{1}{2}$, ja hajaantuu, kun $|z| < \frac{1}{2}$, ja S_2 suppenee, kun $\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \iff |z| < 2$, ja hajaantuu, kun $|z| > 2$ (nämä on helppo tarkistaa esimerkiksi suhdetestillä), Näin ollen laajin origo-keskinen rengasalue, jossa annettu sarja suppenee, on $A(0; \frac{1}{2}, 2) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\} = D(0,2) \setminus \overline{D(0, 1/2)}$.

4. Jos $|w| < 1$, niin termeittäin derivoimalla saadaan
$$\frac{1}{1-w} = \sum_{j=0}^{\infty} w^j \Rightarrow \frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j w^{j-1}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{(1-w)^3} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j!}{(j-2)!} w^{j-2} \quad \ldots$$
ja yleisesti
$$\frac{(n-1)!}{(1-w)^n} = \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{j!}{(j-(n-1))!} w^{j-(n-1)}. \qquad (*)$$
Kun $|z| > |\alpha|$ ($\iff z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,|\alpha|)}$), niin f_n on analyyttinen ja $\left|\frac{\alpha}{z}\right| < 1$. Siten kaavan $(*)$ nojalla
$$\frac{1}{(z-\alpha)^n} = \frac{1}{z^n} \frac{1}{(1-\frac{\alpha}{z})^n} = \frac{1}{z^n (n-1)!} \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{j!}{(j-n+1)!} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^{j-n+1}$$
$$= \sum_{j=n-1}^{\infty} \binom{j}{n-1} \alpha^{j-n+1} \frac{1}{z^{j+1}}.$$

5. Vihjeen nojalla tiedetään että $P'(z)$ on muotoa

$$\begin{aligned}P'(z) = &\, a_n d_1 (z-z_1)^{d_1-1}(z-z_2)^{d_2}\cdots(z-z_r)^{d_r}\\ &+ a_n(z-z_1)^{d_1} d_2 (z-z_2)^{d_2-1}\cdots(z-z_r)^{d_r}\\ &+\cdots\\ &+ a_n(z-z_1)^{d_1}(z-z_2)^{d_2}\cdots d_r(z-z_r)^{d_r-1}.\end{aligned}$$

Jaetaan jokainen $P'(z)$:n termi funktiolla

$$P(z) = a_n(z-z_1)^{d_1}(z-z_2)^{d_2}\cdots(z-z_r)^{d_r},$$

ja saadaan

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{d_1}{z-z_1} + \frac{d_2}{z-z_2} + \ldots + \frac{d_r}{z-z_r}.$$

6. Edellisen tehtävän nojalla väitetty nollakohtien määrä on

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d_1}{z-z_1}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d_2}{z-z_2}\,dz + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d_r}{z-z_r}\,dz.$$

Tiedetään että jos esim z_j on käyrän Γ sisällä niin $\int_\Gamma \frac{1}{z-z_j}\,dz = 2\pi i$, ja jos ei, niin $\int_\Gamma \frac{1}{z-z_j}\,dz = 0$. Tällöin, jos z_j on käyrän Γ sisällä oleva nollakohta, niin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d_j}{z-z_j}\,dz = \frac{1}{2\pi i} d_j 2\pi i = d_j.$$

Koska d_j on nollakohdan z_j kertaluku, niin väite seuraa.
(Huom! Tehtävän tulos pätee myös yleisemmässä tapauksessa, jos polynomi P korvataan meromorfisella funktiolla f (siis f on analyyttinen tai sillä on napa kussakin määrittelyalueen pisteessä). Tällöin vastaavan integraalin arvo on funktion f nollakohtien määrä – napojen määrä käyrän Γ sisällä. Tulos tunnetaan argumentin periaatteena, ja siihen palataan tarkemmin kurssin lopussa.)