
Kompleksianalyysi b**Kertaustehtävät****Syksy 2016, tiistai** 13.12.2016 klo 8-10, sali M303

1. Olkoon C jana pisteestä 1 pisteeseen $1 + i$, ja olkoon Γ yksikköympyrä (yksi kierros, positiivinen suunnistus).

- (i) Esitä käyrän C hyväksyttävä parametrisointi, ja laske $\int_C dz/z$.
(ii) Esitä suljetun käyrän Γ hyväksyttävä parametrisointi, ja laske

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin(z)}{z-a} dz,$$

missä $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| \neq 1$.

2. Olkoot $m, n \in \mathbb{N}$, ja olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$. Konstruoi esimerkkifunktiot f_1, f_2, f_3 ja f_4 siten, että

- (a) funktiolla f_1 on m -kertainen nollakohta pisteessä z_0 ;
(b) funktiolla $f_1 f_2$ on n -kertainen napa pisteessä z_0 ;
(c) funktiolla $f_1 + f_3$ on $(m-1)$ -kertainen nollakohta pisteessä z_0 (missä nollakertainen nollakohta ymmärretään pisteeksi, joka ei ole nollakohta);
(d) funktiolla $f_1 + f_4$ on oleellinen erikoispiste pisteessä z_0 .

3. Olkoon $f(z) = 1/(1-z^2)$.

- (i) Esitä funktion f Maclaurin sarja. Mikä on sarjan suppenemissäde?
(ii) Esitä funktion f (origo-keskinen) Laurentin sarja joukossa $|z| > 1$.

4. Olkoon f kokonainen funktio, jolla on Maclaurin sarja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ja olkoon $j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ kiinnitetty.

- (i) Osoita, että

$$|a_j| r^j \leq \max_{|z| \leq r} |f(z)|, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (\star)$$

- (ii) Voidaanko kaavassa $(\star)$ $\max_{|z| \leq r} |f(z)|$ korvata maksimilla $\max_{|z|=r} |f(z)|$?
Perustele vastauksesi.

5. Osoita, että

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

soveltamalla kaavaa

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

ja tekemällä muuttujanvaihto $e^{i\theta} = z$.

Vihje! Osoita, että integraali

$$I = \frac{2}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{z^2 + 6z - 1}.$$

Tämän jälkeen jaa integrandin nimittäjä kahden ensimmäisen asteen polynomin tuloksi. Sovella yleistettyä Cauchyn integraalikaavaa.