

1. (i) $z(t) = 1 \cdot (1-t) + (1+i)t = 1+it, \quad t \in [0, 1].$

Kocher funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ on analytischen alveassa $D = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$
 ja $\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z} \quad \forall z \in D$, ~~und~~ schen $C \subset D$, niin

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_1^{1i} \text{Log } z = \text{Log}(1i) - \text{Log } 1 = \text{Log } \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}$$

(ii) $z(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Koska funktio $\sin z$ on kokonaismainen, niin Cauchy'n integraalikaavan avulla

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z-a} dz = 2\pi i \sin a,$$

jos $a \in \mathbb{D}$. Jos $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, niin $\frac{\sin z}{z-a}$ on analyyttinen suljetussa yksikkökiekossa, ja siten

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z-9} dz = 0.$$

$$2. \quad f_1(z) = (z - z_0)^m$$

$$f_2(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{m+n}}$$

$$f_3(z) = (z - z_0)^{m-1} - (z - z_0)^m$$

$$f_4(z) = e^{1/(z-z_0)} - (z-z_0)^m$$

(a) ~~the~~ solution

(b) $f_1(z) f_2(z) = (z-z_0)^m \frac{1}{(z-z_0)^{m+n}} = \frac{1}{(z-z_0)^n}$

(b) $f_1(z) + f_3(z) = (z - z_0)^{m-1}$

(d) $f_1(z) + f_4(z) = e^{1/(z-z_0)}$.

3. (i) Kun $|z| < 1$, niin geometrisen sarjan summa on
helpolla saada.

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (z^2)^j = \sum_{j=0}^{\infty} z^{2j}$$

(*)

Koska D on suurin origokeskinen kiekko, jossa f on analyyttinen, niin sarjan (*) suppenemissäte on 1.

(ii) Kun $|z| > 1$, niin $|1/z^2| < 1$, ja siis

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z^2} \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^j = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2j}}.$$

4.(i) Tapaus $r=0$ on selvä; joten olkoon $0 < r < \infty$.

Tällöin yleistetty Cauchyn integraalikaavan avulla

$$f^{(j)}(0) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz.$$

Koska $a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$, saadaan

$$|a_j| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{j+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{r^{j+1}} \cdot 2\pi r \stackrel{(t)}{\leq} \frac{1}{r^j} \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

Väite seuraa. $\square$

(ii) Voidaan korvata, sillä maksimiperiaatteen avulla

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)| \quad (\text{epäyhtälö (t) on siis itse}$$

asnessa yhtäsuuruus).

5. Jos $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, niin

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

ja $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, ja näin ollen

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta} = \int_{\Pi} \frac{1}{3 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \int_{\Pi} \frac{dz}{z^2 + 6z + 1}.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla nähdään, että $z^2 + 6z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$, missä $z_1 = -3 + 2\sqrt{2}$ ja $z_2 = -3 - 2\sqrt{2}$.

Koska $|z_1| < 1$ ja $|z_2| > 1$, niin Cauchyn residylauseen avulla

$$\int_{\Pi} \frac{dz}{z^2 + 6z + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}(z_1),$$

missä

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) \frac{1}{z^2 + 6z + 1} = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z - z_2} \\ &= \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{1}{-3 + 2\sqrt{2} - (-3 - 2\sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta} = \frac{2}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \cdot \square$$