

Kompleksianalyysi b

2016

Sisältö

1	Kompleksinen integrointi	1
1.1	Ääriverrat	1
1.2	Äärivervainintegraalit	3
1.3	Riippumattomuus polusta	7
1.4	Cauchyn integraalilause	8
1.5	Cauchyn integraalikaava ja sen seurauksia	11
1.6	Analyttisten funktioiden kasvun ylärajoja	13
2	Analyttisten funktioiden sarjaesitykset	14
2.1	Jonot ja sarjat	14
2.2	Taylorin sarjat	17
2.3	Potenssisarjat	19
2.4	Laurentin sarjat	22
2.5	Nollakohdat ja singulariteetit	23
2.6	Piste ∞	28
3	Residyy-teoriaa	29
3.1	Cauchyn residylause	29
3.2	Trigonometrisiä integraaleja	31
3.3	Reaalisia integraaleja yli välin $(-\infty, \infty)$	34
3.4	Argumentin periaate ja Rouchén lause	35

1. Kompleksinen integrointi

1.1. Ääriviivat

Määritelmä 1.1.1. Olkoon $z(t)$, $a \leq t \leq b$, jatkuvan kompleksiarvoisen funktion parametrisointi siten, että

- (i) $z'(t)$ on jatkuva joukossa $[a, b]$,
- (ii) $z'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in [a, b]$,
- (iii) $z(t)$ on injektio joukossa $[a, b]$.

Tällöin pistejoukkoa $\gamma = \{z(t) : a \leq t \leq b\} \subset \mathbb{C}$ sanotaan *sileäksi kaareksi*. Edelleen jos parametrisoinnille $z(t)$ pätee (i), (ii) ja

- (iii') $z(t)$ on injektio joukossa $[a, b)$, $z(b) = z(a)$ ja $z'(b) = z'(a)$,

niin γ on *sileä suljettu käyrä*. *Sileä käyrä* on joko sileä kaari tai sileä suljettu käyrä, ja sen ehdot (i)–(iii) tai (i), (ii) ja (iii') toteuttavaa parametrisointia kutsutaan *hyväksyttäväksi*.

Analyysin kursseilla on opittu, että vektori $(x'(t), y'(t))$ (mikäli se on olemassa, ja $\neq (0, 0)$) on käyrän tangentti pisteessä $(x(t), y(t))$. Näin ollen Määritelmä 1.1.1 takaa, että sileillä käyrillä on yksikäsitteinen tangentti jokaisessa pisteessä ja sen suunta muuttuu jatkuvasti siirryttäessä käyrällä. Sileillä käyrillä ei siis ole kärkiä. Pistejoukko $\gamma \subset \mathbb{C}$ on sileä käyrä, jos löydetään parametrisointi $z(t)$, $a \leq t \leq b$, siten, että $\gamma = \{z(t) : a \leq t \leq b\}$, ja $z(t)$ on hyväksyttävä Määritelmän 1.1.1 mielessä. Osoittautuu, että jos γ on sileä, niin on olemassa äärettömän monta hyväksyttävää parametrisointia $z(t)$.

Esimerkki 1.1.2. Etsi hyväksyttävä parametrisointi seuraaville sileille käyrille:

- (a) vaakasuora jana $z = 1 \rightarrow z = 8$,
- (b) pystysuora jana $z = 2 - 2i \rightarrow z = 2 + 2i$,
- (c) jana $-2 - 3i \rightarrow 5 + 6i$,
- (d) ympyrä, jonka säde on 2 ja keskipiste on $1 - i$,
- (e) funktion $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, kuvaaja.

Tähän mennessä emme ole kiinnittäneet mitään huomiota suuntaan tai järjestykseen parametrisoinneissa. Esimerkiksi pisteitä z_1 ja z_2 yhdistävän janan pisteet voidaan esittää esittää muodossa

$$z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \leq t \leq 1$$

tai

$$z_2 + t(z_1 - z_2), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Sileä kaari, joka on järjestetty eli alku ja loppupisteet ovat määrätty, on *suunnattu sileä kaari*. Suuntaus indikoidaan kuvassa nuolella. Parametrisoinnissa suuntaus tarkoittaa sitä,

että piste $z(t_1)$ on ”edellä” pistettä $z(t_2)$, jos $t_1 < t_2$. Koska on olemassa vain kaksi luonnollista suuntausta, on jokainen hyväksyttävä parametrisointi jompaa kumpaa tyyppiä. Yleisesti, jos $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, on eräs hyväksyttävä parametrisointi, jolla on tietty suuntaus, niin $z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$, on myös hyväksyttävä parametrisointi ja sillä on vastakkainen suuntaus. Vältetään turhat anomaliat ja sanotaan, että sileän suljetun käyrän pisteet ovat järjestetty, kun (i) alkupiste on valittu, ja (ii) suunta on kiinnitetty. Sileä suljettu käyrä, jonka pisteet on järjestetty, on *suunnattu sileä suljettu käyrä*. *Suunnattu sileä käyrä* on joko suunnattu sileä kaari tai suunnattu sileä suljettu käyrä.

Määritelmä 1.1.3. Äärioviiva Γ on joko yksi piste z_0 tai äärellinen jono suunnattuja sileitä käyriä $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ siten, että käyrän γ_k päätepiste on sama kuin käyrän γ_{k+1} alkupiste kaikilla $k = 1, 2, \dots, n-1$. Tällöin kirjoitetaan $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$.

Äärioviivan parametrisointi saadaan yhdistämällä sileiden komponenttien parametrisoinnit. Funktio $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, on äärioviivan $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ parametrisointi jos on olemassa jako $[\tau_0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_{n-1}, \tau_n]$, missä

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b,$$

siten, että $z(t)$ on jokaisella välillä $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ sileän käyrän γ_k oikeinsuunnattu hyväksyttävä parametrisointi. Tällöin $z(t)$ on jatkuva välillä $[a, b]$, mutta derivaatalla $z'(t)$ voi olla epäjatkuvuuskohtia pisteissä τ_k .

Esimerkki 1.1.4. Parametrisoi $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (kuva) siten, että $\Gamma = \{z(t) : 0 \leq t \leq 1\}$.

Äärioviivan (suuntaamaton) pisteet muodostavat paloittain sileän käyrän. Käytämme molemmille symbolia Γ . Jos

$$\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

niin *vastakkaissuuntainen äärioviiva* on

$$-\Gamma := (-\gamma_n, -\gamma_{n-1}, \dots, -\gamma_1), \quad z = z(-t), \quad -b \leq t \leq -a.$$

Γ on *suljettu äärioviiva* tai *silmukka*, jos alku- ja loppupiste ovat samat. Äärioviiva Γ , jonka parametrisointi on $z(t)$, $a \leq t \leq b$, on *yksinkertainen suljettu äärioviiva*, jos kaikilla $t_1 < t_2$ pätee $z(t_1) = z(t_2)$ jos ja vain jos $t_1 = a$ ja $t_2 = b$, eli jos $z(t)$ on bijektio puoliavoimilla väleillä $[a, b)$ ja $(a, b]$.

Lause 1.1.5 (Jordanin käyrälause). (Camille Jordan 1838-1922) Jokainen yksinkertainen suljettu äärioviiva Γ jakaa tason kahteen alueeseen, joiden reuna on Γ . Toinen näistä alueista on sisäosa ja se on rajoitettu. Jäljelle jäävä rajoittamaton alue on ulko-osa.

Jordanin käyrälause pätee myös yleisemmille käyrille, mutta todistus on hankala jo yksinkertaisille suljetuille äärioviivoille.

Olkoon γ sileä käyrä, ja olkoon $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, sen mikä tahansa hyväksyttävä parametrisointi. Olkoon $s(t)$ pisteiden $z(a)$ ja $z(t)$ välinen etäisyys käyrällä γ . Analyysin kursseilta tiedetään, että

$$s'(t) = \frac{d}{dt}s(t) = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2},$$

eli $\frac{d}{dt}s(t) = \left|\frac{d}{dt}z(t)\right|$. Näin ollen sileän käyrän pituus saadaan kaavasta

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left(\frac{d}{dt}s(t)\right) dt = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}z(t)\right| dt.$$

Joskus käytetään myös merkintää

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} |dz|, \quad z = z(t), \quad dz = z'(t) dt.$$

Ääriviivan pituus on sen komponenttien pituuksien summa.

1.2. Ääriviivaintegraalit

Tarkastellaan funktiota f , joka on määritelty suunnatulla sileällä käyrällä γ (eli pätee $\gamma \subset M_f \subset \mathbb{C}$). Olkoot α ja β käyrän γ alku- ja loppupisteet vastaavasti (jos γ on suljettu, niin $\alpha = \beta$). Olkoon P_n käyrän γ jako, millä tarkoitetaan joukkoa $\{z_0, z_1, \dots, z_n\} \subset \gamma$ siten, että $z_0 = \alpha$ ja $z_n = \beta$, ja missä piste z_k seuraa pistettä z_{k-1} käyrän γ suuntauksen mukaisesti. Määritellään

$$\mu(P_n) = \max_{1 \leq k \leq n} \int_{\gamma(z_{k-1}, z_k)} |dz|,$$

$$S(P_n) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k,$$

missä $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ja $c_k \in \gamma(z_{k-1}, z_k)$.

Määritelmä 1.2.1. Olkoon f suunnatulla sileällä käyrällä γ määritelty kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio. Sanotaan, että f on *integraoituva pitkin käyrää γ* , jos on olemassa $L \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(P_n) = L$$

kaikilla jaoilla P_n , joille $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(P_n) = 0$. Vakio L on funktion f *integraali pitkin käyrää γ* . Merkitään

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta z_k = \int_{\gamma} f(z) dz,$$

tai lyhyesti $L = \int_{\gamma} f$.

Jos f ja g ovat integroituvia pitkin käyrää γ , niin on ilmeistä, että

$$\int_{\gamma} (f(z) \pm g(z)) dz = \int_{\gamma} f(z) dz \pm \int_{\gamma} g(z) dz, \quad (1.1)$$

$$\int_{\gamma} cf(z) dz = c \int_{\gamma} f(z) dz, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

ja

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Lause 1.2.2. Jos f on jatkuva suunnatulla sileällä käyrällä γ , niin f on integroituva pitkin käyrää γ .

Todistus sivuutetaan toistaiseksi. Lause 1.2.2 on teorian osalta tärkeä, mutta se ei auta integraalien laskemisessa. Muutetaan kompleksinen integraali reaaliseksi integraaleiksi, jolloin reaalianalyysin kursseilla opitut asiat ovat suureksi avuksi.

Olkoon ensiksi γ väli $[a, b]$ suunnattuna oikealle. Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, niin Määritelmä 1.2.1 yhtyy reaalisen integraalin $\int_a^b f(t) dt$ määritelmään. Näin ollen, kun f on kompleksiarvoinen, niin jatkossa merkintä

$$\int_a^b f(t) dt$$

tarkoittaa integraalia pitkin suunnattua reaalista janaa. Tässä tapauksessa, jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva, niin voidaan kirjoittaa

$$f(t) = u(t) + iv(t),$$

missä $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Kaavoista (1.1) ja (1.2) seuraa, että

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b (u(t) + iv(t)) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt. \quad (1.3)$$

Jos nyt funktiolla f on primitiivi $F(t) = U(t) + iV(t)$ (ts. $F' = f$), niin $U' = u$ ja $V' = v$, ja (1.3) johtaa seuraavaan tulokseen.

Lause 1.2.3. Jos $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva ja $F'(t) = f(t)$ kaikilla $t \in [a, b]$, niin

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Esimerkki 1.2.4. Laske

$$\int_0^{\pi} e^{it} dt.$$

Siirrytään yleiseen tapaukseen. Olkoon f jatkuva pitkin suunnattua sileää käyrää γ . Olkoon $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, käyrän γ oikein suunnattu hyväksyttävä parametrisointi. Jos $P_n = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ on käyrän γ jako, niin voidaan kirjoittaa

$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), \dots, z_n = z(t_n),$$

missä $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Edelleen, koska parametrisoinnilla $z(t)$ on jatkuva derivaatta välillä $[a, b]$, niin

$$\Delta z_k = z(t_k) - z(t_{k-1}) \approx z'(t_k)(t_k - t_{k-1}) = z'(t_k)\Delta t_k,$$

missä approksimoinnissa tehty virhe lähenee nollaa nopeammin kuin Δt_k . Näin ollen Riemannin summaa

$$\sum_{k=1}^n f(z_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^n f(z(t_k))\Delta z_k$$

pitkin käyrää γ voidaan approksimoida summalla

$$\sum_{k=1}^n f(z(t_k)) z'(t_k)\Delta t_k,$$

joka on jatkuvan funktion $f(z(t))z'(t)$ Riemannin summa yli välin $[a, b]$.

Lause 1.2.5. *Olkoon $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva suunnatulla sileällä käyrällä γ . Jos $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, on oikein suunnattu käyrän γ hyväksyttävä parametrisointi, niin*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (1.4)$$

Todistus sivuutetaan.

Korollari 1.2.6. *Olkoon $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva suunnatulla sileällä käyrällä γ . Jos $z = z_1(t)$, $a \leq t \leq b$, ja $z = z_2(t)$, $c \leq t \leq d$, ovat kaksi oikeinsuunnattua hyväksyttävää parametrisointia, niin*

$$\int_a^b f(z_1(t)) z_1'(t) dt = \int_c^d f(z_2(t)) z_2'(t) dt.$$

Esimerkki 1.2.7. *Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $r > 0$. Laske*

$$\int_{c_r} (z - z_0)^n dz,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$ ja c_r on z_0 -keskinen r -säteinen vastapäivään (positiivisesti) suunnistettu ympyrä.

Määritelmä 1.2.8. Olkoon $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva ääriivillä $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, missä γ_j on suunnattu sileä käyrä kaikilla $j = 1, \dots, n$. Tällöin funktion f *ääriivaintegraali pitkin ääriiviä* Γ on

$$\int_{\Gamma} f(z) dz := \int_{\gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz. \quad (1.5)$$

Jos Γ koostuu yhdestä pisteestä, niin asetetaan

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Esimerkki 1.2.9. *Laske*

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0},$$

kun $\Gamma = \{z_0 + re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 4\pi\}$.

Esimerkki 1.2.10. *Laske*

$$\int_{\Gamma} \bar{z}^2 dz, \quad \Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

missä $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ovat kuten kuvassa.

Määritelmästä 1.2.8 seuraa:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (f(z) \pm g(z)) dz &= \int_{\Gamma} f(z) dz \pm \int_{\Gamma} g(z) dz \\ \int_{\Gamma} cf(z) dz &= c \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad c \in \mathbb{C} \\ \int_{-\Gamma} f(z) dz &= - \int_{\Gamma} f(z) dz, \end{aligned} \quad (1.6)$$

missä f ja g ovat jatkuvia ääriivillä Γ . Edelleen, jos $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, on koko ääriivian $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ parametrisointi, niin on olemassa jako

$$a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = b$$

siten, että parametrisoinnin $z(t)$ rajoittuma välille $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ antaa käyrän γ_k parametrisoinnin. Näin ollen kaavasta (1.4) seuraa

$$\int_{\gamma_k} f(z) dz = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f(z(t)) z'(t) dt, \quad k = 1, \dots, n,$$

joten

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Näin ollen integraali pitkin suljettua ääriiviä ei riipu alku/loppupisteen valinnasta. Näissä tapauksissa riittää siis kiinnittää suunta.

Usein ei ole tarpeellista laskea ääriivaintegraalia tarkasti, vaan arvio riittää. Olkoon nyt f jatkuva suunnatulla sileällä käyrällä γ ja oletetaan, että on olemassa $M > 0$ siten,

että $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \gamma$. Jos P_n on jako ja $\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta z_k$ sitä vastaava Riemannin summa, niin

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(c_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k|.$$

Nyt pituuksien summa $\sum |\Delta z_k|$ ei voi olla suurempi kuin käyrän γ pituus $\ell(\gamma)$, joten

$$\left| \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta z_k \right| \leq M\ell(\gamma). \quad (1.7)$$

Koska (1.7) pätee kaikille Riemannin summille, niin antamalla luvun n kasvaa rajatta, päätellään

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq M\ell(\gamma). \quad (1.8)$$

Tämän ja kaavan (1.5) nojalla saadaan seuraava tulos:

Lause 1.2.11. *Jos f on jatkuva ääriiviivalla Γ ja jos $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \Gamma$, niin*

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq M\ell(\Gamma), \quad (1.9)$$

missä $\ell(\Gamma)$ on ääriiviivan Γ pituus. Erityisesti,

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot \ell(\Gamma). \quad (1.10)$$

Esimerkki 1.2.12. *Etsi yläraja lausekkeelle*

$$\left| \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz \right|,$$

missä $\Gamma = \{z : |z| = 2\}$, (yksi kierros vastapäivään).

Huom! Ääriviivaintegraaleilla ei ole ilmeistä geometrista tulkintaa.

1.3. Riippumattomuus polusta

Lause 1.3.1. *Olkoon f jatkuva alueessa D ja olkoon F sen primitiivi alueessa D , eli $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in D$. Tällöin kaikilla ääriviivoilla $\Gamma \subset D$, pätee*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_T) - F(z_I),$$

missä z_I on ääriiviivan Γ alkupiste ja z_T on loppupiste.

Lauseen 1.3.1 oletusten nojalla F on analyyttinen, ja siis jatkuva alueessa D . Esim. $\log z$ ei ole funktion $1/z$ primitiivi missään alueessa D , joka sisältää pisteitä negatiiviselta reaaliakselilta. Otetaan seuraava esimerkki ennen Lauseen 1.3.1 todistusta.

Esimerkki 1.3.2. Laske

$$\int_{\Gamma} \cos z \, dz,$$

missä Γ on kuten kuvassa.

Esimerkki 1.3.3. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z},$$

kun Γ on kuten kuvissa (a) ja (b).

Korollaari 1.3.4. Jos f on jatkuva alueessa D ja sillä on primitiivi alueessa D , niin $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ kaikille suljetuille ääriviivoille $\Gamma \subset D$.

Korollaari 1.3.4 antaa vaihtoehtoisen tavan ratkaista Esimerkki 1.2.7. Nimittäin, jos $n \neq -1$ ja $f(z) = (z - z_0)^n$, niin f on funktion $F(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{(n+1)}$ derivaatta kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (piste z_0 suljettava pois, kun $n < 0$). Koska $C_r = \{z : |z - z_0| = r\}$ (positiivisesti suunnistettu) on suljettu ääriviiva ja sisältyy kokonaisuudessaan alueeseen $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, niin $\int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz = 0$ kaikilla $n \neq -1$.

Lauseesta 1.3.1 seuraa myös, että oletusten vallitessa integraalin arvo riippuu vain primitiivin arvoista päätepisteissä.

Lause 1.3.5. Olkoon f jatkuva alueessa D . Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:

- (i) funktiolla f on primitiivi alueessa D ;
- (ii) jokainen ääriviivaintegraali $\int_{\Gamma} f(z) dz$ pitkin suljettua ääriviivaa $\Gamma \subset D$ häviää;
- (iii) ääriviivaintegraalit ovat riippumattomia polusta; eli jos $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset D$ ja $z_{I_1} = z_{I_2}$ ja $z_{T_1} = z_{T_2}$, niin

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

1.4. Cauchyn integraalilause

Silmukka Γ_0 voidaan *jatkuvasti deformoida* silmukaksi Γ_1 alueessa D , jos Γ_0 (elastisena silmukkana, jolla orientaatio) voidaan jatkuvasti liikuttaa tasolla, pysyen alueessa D siten, että se lopulta yhtyy silmukkaan Γ_1 asemansa ja orientaationsa mielessä. Esimerkiksi:

- (a) Olkoon D rengas (annulus), ja olkoot Γ_0 ja Γ_1 kuten kuvassa. Koska molemmat kiekot Γ_0 ja Γ_1 ovat positiivisesti suunnistettuja, ”elastinen” kiekko Γ_0 voidaan jatkuvasti deformoida kiekoksi Γ_1 alueessa D suurentamalla kiekon Γ_0 säde yhdestä kahteen. Oleellista on orientaation lisäksi, että alueesta D ei tarvitse poistua kiekkoa Γ_0 suurennettaessa kiekoksi Γ_1 .
- (b) Olkoon D rengas, Γ_0 kolmiomainen ääriviiva ja Γ_1 kuten kuvassa. Tällöin Γ_0 voidaan (jatkuvasti) deformoida kiekoksi Γ_1 .

- (c) Olkoon $D = \mathbb{C}$, Γ_0 kuten kuvassa ja $\Gamma_1 = \{z : z = 0\}$. Nyt Γ_0 voidaan jatkuvasti deformoida pisteeksi Γ_1 .
- (d) Olkoon D ensimmäinen neljännes ja Γ_0 ja Γ_1 vastakkaisesti suunnistettut kiekot kuten kuvassa. Tällöin Γ_0 voidaan jatkuvasti deformoida kiekoksi Γ_1 .
- (e) Olkoon $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, ja olkoot Γ_0 ja Γ_1 kuten kuvassa. Nyt Γ_0 voidaan jatkuvasti deformoida Γ_1 :ksi.

Määritelmä 1.4.1. Silmukka Γ_0 on jatkuvasti deformatavissa (joskus puhutaan homotopiasta) silmukaksi Γ_1 alueessa D , jos on olemassa funktio $z(s, t)$, jatkuva yksikköneliössä $\{(s, t) : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ siten, että

- (i) jokaisella arvolla $s \in [0, 1]$ funktio $z(s, t)$ parametrizoi jonkun silmukan alueessa D ;
- (ii) $z(0, t)$ parametrizoi silmukan Γ_0 ;
- (iii) $z(1, t)$ parametrizoi silmukan Γ_1 .

Esimerkki 1.4.2. Osoita Määritelmän 1.4.1 mukaisesti, että silmukka $\Gamma_0 : z = e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$, voidaan jatkuvasti deformoida silmukaksi $\Gamma_1 : z = 2e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$ renkaassa $\{z : 1/2 < |z| < 3\}$.

Esimerkki 1.4.3. Osoita Määritelmän 1.4.1 mukaisesti, että jokainen silmukka voidaan jatkuvasti deformoida ääriiviapisteeksi $z = 0$ kompleksitasossa.

Huomataan, että jos silmukka Γ_0 voidaan jatkuvasti deformoida silmukaksi Γ_1 funktion $z(s, t)$ avulla, niin $z(1 - s, t)$ deformerii silmukan Γ_1 silmukaksi Γ_0 . Edelleen, jos Γ_0 ja Γ_1 voidaan deformoida yhdeksi pisteeksi annetussa alueessa, voidaan Γ_0 deformoida Γ_1 :ksi.

Määritelmä 1.4.4. Jos jokainen silmukka alueessa $D \subset \mathbb{C}$ voidaan jatkuvasti deformoida pisteeksi alueessa D , niin tällöin D on yhdesti yhtenäinen alue.

Yhdesti yhtenäisessä alueessa ei ole ”reihiä”. Topologiassa osoitetaan, että yksinkertaisen suljetun ääriviivan rajaama alue on yhdesti yhtenäinen. Tämä otetaan usein osaksi Jordanin käyrälausetta. Jos alue ei ole yhdesti yhtenäinen, on se monesti yhtenäinen (multiply connected).

Olkoon $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $\Gamma = \mathbb{T}$ (1 kierros vastapäivään, alkupiste 1). Tällöin:

- (a) Silmukkaa $z(t) = 4 + e^{2\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$ ei voida jatkuvasti deformoida silmukaksi Γ .
- (b) Silmukkaa Γ ei voida jatkuvasti deformoida pisteeksi. Silmukka (a) voidaan!
- (c) Silmukkaa Γ ei voida jatkuvasti deformoida silmukaksi $-\Gamma$ alueessa D .
- (d) Silmukkaa Γ ei voida jatkuvasti deformoida silmukaksi $\mathbb{T}$ (2 kierrosta positiiviseen suuntaan).

Lause 1.4.5 (Deformaatio invarianssilause). Olkoon f analyyttinen alueessa D , ja olkoot Γ_0 ja Γ_1 silmukoita alueessa D . Jos Γ_0 ja Γ_1 voidaan jatkuvasti deformoida toisilleen, niin

$$\int_{\Gamma_0} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz.$$

Lause 1.4.6 (Cauchyn integraalilause). Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D , ja olkoon Γ suljettu ääriviiva (eli silmukka) alueessa D . Tällöin

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.11)$$

Topologisen päättelyn avulla voidaan osoittaa, että jos Γ on yksinkertainen suljettu ääri-
viiva, ja f on analyyttinen ääriviivalla Γ sekä sen sisällä, niin tällöin funktion f täytyy
olla analyyttinen jossakin yhdesti yhtenäisessä alueessa, joka pitää sisällään ääriviivan Γ .
Näin ollen Lauseen 1.4.6 nojalla integraali pitkin ääriviivaa Γ häviää aina, kun integroitava
funktio on analyyttinen ääriviivalla Γ ja sen sisällä.

Yhdistämällä Lauseet 1.3.5, 1.4.5 ja 1.4.6 saadaan:

Lause 1.4.7. Yhdesti yhtenäisessä alueessa analyyttisellä funktiolla on primitiivi, sen
ääriviivaintegraalit ovat riippumattomia polusta ja silmukkaintegraalit häviävät.

Esimerkissä 1.2.7 osoitettiin, että

$$\int_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases} \quad (1.12)$$

kun $C = \{z : |z - z_0| = r > 0\}$ (positiivisesti suunnistettu 1 kierros), $z_0 \in \mathbb{C}$, ja $n \in \mathbb{Z}$. Jos
 $z_0 = 0$ ja $n \geq 0$, niin z^n on analyyttinen koko tasossa, joka on yhdesti yhtenäinen alue, ja
näin ollen Lausetta 1.4.7 voidaan soveltaa: funktiolla z^n on primitiivi (so. $z^{n+1}/(n+1)$),
ja näin ollen silmukkaintegraalit häviävät. Jos taas $n < 0$, niin z^n on analyyttinen vain
punteeratussa tasossa. Nyt $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Lausetta 1.4.7 ei voida
soveltaa. Jos $n = -1$ niin funktiolla z^n ei ole edes primitiiviä alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funktion $\log z$
haaraleikkauksesta johtuen. Lauseen 1.4.7 voima on siinä, että hankalat integrointipolut
voidaan korvata helpommilla.

Esimerkki 1.4.8. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z},$$

kun Γ on positiivisesti suunnistettu ellipsi $x^2 + 4y^2 = 1$, missä $z = x + iy$.

Esimerkki 1.4.9. Laske

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 - 9} dz.$$

Merkintä tarkoittaa, että integrointipolku on positiivisesti suunnistettu ympyrä $|z| = 2$
kierrettyinä yhden kerran.

Esimerkki 1.4.10. Määää

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}, \quad a \in \mathbb{C},$$

kun Γ on positiivisesti suunnistettu ympyrä (1 kierros), joka ei kulje pisteen a kautta.

Esimerkki 1.4.11. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{3z-2}{z^2-z} dz,$$

kun Γ on kuten kuvassa.

Esimerkki 1.4.12. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2-1},$$

kun Γ on kuten kuvassa.

1.5. Cauchyn integraalikaava ja sen seurauksia

Lause 1.5.1 (Cauchyn integraalikaava). Olkoon Γ yksinkertainen suljettu positiivisesti suunnistettu ääriiviiva. Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa D , joka pitää sisällään ääriviivan Γ . Olkoon z_0 mikä tahansa piste ääriviivan Γ sisältä. Tällöin

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \quad (1.13)$$

Cauchyn integraalikaavasta seuraa, että analyyttisen funktion arvot ääriviivalla Γ määräävät funktion arvot ääriviivan sisällä.

Esimerkki 1.5.2. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z + \sin z}{z} dz,$$

kun $\Gamma = \{z : |z-2| = 3\}$.

Esimerkki 1.5.3. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos z}{z^2-4} dz,$$

kun Γ on kuten kuvassa.

Esimerkki 1.5.4. Laske

$$\int_{-\mathbb{T}} \frac{z^2 e^z}{2z+i} dz.$$

Lause 1.5.5. Olkoon g jatkuva ääriviivalla Γ . Asetetaan

$$G(z) := \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{\xi-z} d\xi, \quad (1.14)$$

missä $z \notin \Gamma$. Tällöin G on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, ja sen derivaatta on

$$G'(z) = \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi. \quad (1.15)$$

Huomaa, että Lauseessa 1.5.5 ei oleteta, että Γ on suljettu eikä funktion g tarvitse olla analyyttinen. Edelleen Lause 1.5.5 ei kerro mitä tapahtuu kun $z \rightarrow z_0 \in \Gamma$.

Jos Lauseen 1.5.5 todistuksessa käytettyä päättelyä sovelletaan funktioon

$$H(z) := \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi, \quad z \notin \Gamma, \quad (1.16)$$

niin nähdään, että H on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ ja

$$H'(z) = 2 \int_{\Gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi, \quad z \notin \Gamma.$$

Huomaa, että H' saadaan formaalisti derivoimalla funktiota H integraalin sisällä.

Olkoon f analyyttinen pisteessä z_0 . Valitaan $C = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z_0| = r\}$ siten, että f on analyyttinen ympyrällä C ja sen sisällä. Jos z on ympyrän C sisällä, niin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

joten Lauseen 1.5.5 nojalla

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \quad (1.17)$$

Nyt f' on muotoa (1.16) ja siis analyyttinen kiekon C sisällä. Erityisesti f' on analyyttinen pisteessä z_0 . Päättellään:

Lause 1.5.6. *Jos f on analyyttinen alueessa D , niin sen kaikki derivaatat $f', f'', \dots$ ovat olemassa ja analyyttisiä alueessa D .*

Lauseella 1.5.6 ei ole suoraa vastinetta reaalianalyysistä. Esimerkiksi funktio $f(x) = x^{5/3}$ on differentioituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, mutta sen derivaatta $f'(x) = 5x^{2/3}/3$ ei ole differentioituva origossa.

Jos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, niin kurssin *Kompleksianalyysi* a nojalla

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ja} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.18)$$

Nyt tiedetään, että f' on analyyttinen ja siis jatkuva. Näin ollen kaavojen (1.18) nojalla funktioiden u ja v ensimmäiset osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Edelleen, koska toinen derivaatta f'' on olemassa, niin kaava (1.18) ja Cauchy-Riemannin yhtälöt antavat

$$\begin{aligned} f''(z) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ f''(z) &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Koska nyt f'' on jatkuva, ovat kaikki funktioiden u ja v toisen kertaluvun osittaisderivaatat jatkuvia. Jatkamalla päättelyä saadaan:

Lause 1.5.7. Jos $f = u + iv$ on analyyttinen alueessa D , niin kaikki funktioiden u ja v osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia alueessa D .

Tätä tulosta kannattaa verrata kurssin *Kompleksianalyysi* a tarinoihin. Päättellään, että funktioiden u ja v kaikki kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat ovat harmonisia.

Edellä olevien tulosten nojalla nähdään: jos funktiolla f on primitiivi alueessa D , niin f on analyyttinen alueessa D (primitiivi on analyyttinen, koska se on derivoituva). Lauseesta 1.3.5 seuraa:

Lause 1.5.8 (Morera lause). Jos f on jatkuva alueessa D , ja jos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

kaikilla suljetuilla ääri viivoilla $\Gamma \subset D$, niin f on analyyttinen alueessa D .

Todistamalla (1.15) ja (1.17) osoitettiin, että joissakin tapauksissa integroinnin ja derivoinnin paikkaa voidaan vaihtaa. Cauchyn integraalikaavasta induktiolla saadaan:

Lause 1.5.9 (Yleistetty Cauchyn integraalikaava). Jos f on analyyttinen yksinkertaisella suljetulla positiivisesti suunnistetulla ääri viivalla Γ ja sen sisällä, ja jos z on ääri viivan Γ sisällä, niin

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

Usein (1.19) kannattaa kirjoittaa muodossa

$$\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} dz = \frac{2\pi i f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Esimerkki 1.5.10. Laske

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{5z}}{z^3} dz.$$

Esimerkki 1.5.11. Laske

$$\int_C \frac{2z + 1}{z(z-1)^2} dz,$$

kun C on kuten kuvassa.

1.6. Analyyttisten funktioiden kasvun ylärajoja

Lause 1.6.1 (Cauchyn arvio). Olkoon f analyyttinen suljetussa kiekossa $\overline{D(z_0, R)}$. Jos $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \partial D(z_0, R)$, niin

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.20)$$

Lause 1.6.2 (Liouvillen lause). Rajoitettu kokonainen funktio on vakio.

Ei-vakiot polynomit ovat rajoittamattomia tasossa. Karkeasti sanottuna astetta n oleva polynomi käyttäytyy kuin z^n , kun $|z|$ on suuri, koska johtotermi dominoi alempia potensseja. Jos

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

niin

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

ja täten $P(z)/z^n \rightarrow a_n$, kun $|z| \rightarrow \infty$.

Kurssilla *Kompleksianalyysi a* luvattiin:

Lause 1.6.3 (Algebran peruslause). *Jokaisella ei-vakiolla polynomilla on vähintään yksi nollakohta.*

Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{z_0 + Re^{it} - z_0} iRe^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it}) dt. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Kaava (1.21) tunnetaan *keskiarvoperiaatteena*. Selvästi, jos $|f(z)| \leq M$ ympyrän kehällä $|z - z_0| = R$, niin $|f(z_0)| \leq M$; vertaa kaavaan (1.20) arvolla $n = 0$.

Lemma 1.6.4. *Olko f analyyttinen kiekossa $D(z_0, R)$, ja olko $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D(z_0, R)$. Tällöin $f \equiv$ vakio kiekossa $D(z_0, R)$.*

Lemman 1.6.4 nojalla analyyttisen funktion moduli ei voi saavuttaa maksimiaan kiekon keskipisteessä — ellei $|f|$ ole vakio.

Lause 1.6.5 (Maksimiperiaate). *Olko f analyyttinen alueessa D siten, että $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D$ jollekin $z_0 \in D$. Tällöin $f \equiv$ vakio alueessa D .*

Lause 1.6.6. *Olko f analyyttinen rajoitetussa alueessa D , ja olko f jatkuva sulkeumassa $\overline{D}$. Tällöin $|f|$ saavuttaa maksiminsa reunalla ∂D .*

Esimerkki 1.6.7. *Etsi funktion $|z^2 + 3z - 1|$ maksimi suljetussa yksikkökiekossa $\overline{\mathbb{D}}$.*

2. Analyyttisten funktioiden sarjaesitykset

2.1. Jonot ja sarjat

Kompleksitermisiä jonoja käsiteltiin jo kurssilla *Kompleksianalyysi a*. Jos $A_n \in \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja jos $A \in \mathbb{C}$, niin seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja:

- (i) $A_n \rightarrow A$, kun $n \rightarrow \infty$;

- (ii) $|A_n - A| \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$;
- (iii) $(A_n - A) \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$;
- (iv) jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|A_n - A| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq N_\varepsilon$.

Määritelmä 2.1.1. Kompleksiterminen *sarja* on lauseke

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j := c_0 + c_1 + c_2 + \dots, \quad c_j \in \mathbb{C},$$

ja tämän sarjan n :s *osasumma* on luku

$$S_n := \sum_{j=0}^n c_j = c_0 + c_1 + \dots + c_n.$$

Jos $S_n \rightarrow S \in \mathbb{C}$, kun $n \rightarrow \infty$, niin sanotaan, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ *suppenee* kohti lukua S . Tällöin kirjoitetaan $S = \sum_{j=0}^{\infty} c_j$. Jos sarja ei suppene, niin se *hajaantuu*.

Huomaa, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ suppenee kohti lukua $S \in \mathbb{C}$ jos ja vain jos

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} c_j = (S - S_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Lemma 2.1.2. Jos $|c| < 1$, niin sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ suppenee kohti arvoa $(1 - c)^{-1}$, eli

$$1 + c + c^2 + \dots = \frac{1}{1 - c}, \quad |c| < 1. \quad (2.1)$$

Muulloin sarja hajaantuu.

Lause 2.1.3 (Vertailutesti). Olkoon $c_j \in \mathbb{C}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että on olemassa $J \in \mathbb{N}$ siten, että $|c_j| \leq M_j$ kaikilla $j \geq J$. Jos $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ suppenee, niin $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ suppenee.

Esimerkki 2.1.4. Osoita, että

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{3 + 2i}{(j + 1)^j}$$

suppenee.

Sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ on *absoluuttisesti suppeneva*, jos $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$ suppenee. Absoluuttisesti suppeneva sarja on suppeneva vertailutestin nojalla.

Lause 2.1.5 (Suhdetesti). Oletetaan, että sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ termit toteuttavat raja-arvon $|c_{j+1}/c_j| \rightarrow L$, kun $j \rightarrow \infty$. Jos $L < 1$, niin sarja suppenee. Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu.

Esimerkki 2.1.6. Osoita, että sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{4^j}{j!}$$

suppenee.

Lause 2.1.7 (Juuritesti). Oletetaan, että sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ termit toteuttavat raja-arvon $\sqrt[j]{|c_j|} \rightarrow L$, kun $j \rightarrow \infty$. Jos $L < 1$, niin sarja suppenee. Jos $L > 1$, niin sarja hajaantuu.

Useissa tapauksissa juuritesti on suhdetestiä hankalampi soveltaa, mutta juuritesti tunnistaa suppenemisen suhdetestiä paremmin. Erityisesti, jos sarja suppenee suhdetestin nojalla, niin tällöin suppeneminen voidaan todeta myös juuritestin nojalla (ks. extra-demot). Juuritesti on aidosti suhdetestiä parempi, koska esimerkiksi geometrisen sarjan (termien järjestystä on vaihdettu pareittain)

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \dots$$

tapauksessa suhdetesti ei kerro mitään, mutta juuritestin mukaan sarja suppenee. Tämä johtuu seikoista

$$\frac{c_{j+1}}{c_j} = \begin{cases} 2, & \text{kun } j = 0, 2, 4, \dots, \\ 1/8, & \text{kun } j = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{c_j} = \frac{1}{2}.$$

Kompleksianalyysissä päädytään usein tarkastelemaan jonoja ja sarjoja, joiden termit ovat funktioita. Esimerkiksi funktiojonolla $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, missä $f_n(z) = \left(\frac{z}{2i}\right)^n$, on pisteittäinen raja-arvo

$$\begin{cases} 0, & \text{kun } |z| < |2i| = 2, \\ 1, & \text{kun } z = 2i, \end{cases}$$

ja muilla arvoilla z funktiojonolla ei ole äärellistä raja-arvoa. Miksi? Tapauksessa $|z| = 2$ tarkastele lauseketta

$$\left| \left(\frac{z}{2i}\right)^n - \left(\frac{z}{2i}\right)^{n-1} \right| = \left| \frac{z}{2i} - 1 \right|.$$

Esimerkki 2.1.8. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kiinnitetty. Osoita, että funktioterminen sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^j$$

suppenee kaikilla arvoilla $z \in \mathbb{C}$ siten, että $|z| < |z_0|$.

Määritelmä 2.1.9. Funktiojono $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota $f(z)$ joukossa $\Omega \subset \mathbb{C}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad z \in \Omega,$$

kaikilla $n \geq N_\varepsilon$.

Sarja $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $S(z)$ joukossa $\Omega \subset \mathbb{C}$, jos osasummien jono $S_n(z) = \sum_{j=0}^n f_j(z)$ suppenee tasaisesti kohti funktiota $S(z)$ joukossa Ω .

Huomaa, että N_ε ei riipu muuttujasta z !

Esimerkki 2.1.10. Osoita, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} (z/z_0)^j$ on tasaisesti suppeneva joukossa $\overline{D(0, r)}$, kun $r < |z_0|$.

Lause 2.1.11 (Weierstrassin M -testi). Jos $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ on sarja kompleksifunktioita joukossa Ω , $\sum_{j=0}^{\infty} M_j$ on positiiviterminen suppeneva sarja, ja $|f_j(z)| \leq M_j$ kaikilla $z \in \Omega$, ja kaikilla $j \geq J \in \mathbb{N}$, niin tällöin $\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z)$ suppenee tasaisesti joukossa Ω .

2.2. Taylorin sarjat

Määritelmä 2.2.1. Olkoon f analyyttinen pisteessä z_0 . Tällöin sarja

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \quad (2.2)$$

on funktion f Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä. Jos $z_0 = 0$, sarja tunnetaan Maclaurin sarjana.

Lause 2.2.2. Olkoon f analyyttinen kiekossa $D(z_0, R)$. Tällöin Taylorin sarja (2.2) suppenee kohti funktiota f kaikilla $z \in D(z_0, R)$. Edelleen suppeneminen on tasaista jokaisessa suljetussa kiekossa $\overline{D(z_0, R')}$, missä $R' < R$.

Lauseen 2.2.2 nojalla Taylorin sarja suppenee kohti funktiota f jokaisessa kiekossa $D(z_0, R)$, missä f on analyyttinen.

Esimerkki 2.2.3. Tarkastele seuraavien funktioiden Taylorin sarjoja:

- (a) $\text{Log } z$, pisteen $z_0 = 1$ ympäristössä;
- (b) $(1 - z)^{-1}$, pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä;
- (c) e^z , pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä.

Tarkastellaan summaa

$$\text{Log } z = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} (z - 1)^j}{j}.$$

Derivoimalla termeittäin saadaan

$$1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (1 - z)^j. \quad (2.3)$$

Huomataan, että sarja (2.3) on samaa tyyppiä kuin sarja $(1 - z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$. Näin ollen (2.3) suppenee kohti funktiota $(1 - (1 - z))^{-1} = 1/z$ kun $|1 - z| < 1$. Toisin sanoen differentioimalla funktion $\text{Log } z$ sarjakehitelmää saadaan funktion $1/z$ sarjakehitelmä, joka on funktion $\text{Log } z$ derivaatta.

Lause 2.2.4. Jos f on analyyttinen pisteessä z_0 , niin sen derivaatan f' Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä saadaan derivoimalla funktion f Taylorin sarja, ja se suppenee samassa kiekossa kuin funktion f Taylorin sarja.

Esimerkki 2.2.5. Määrittää funktioiden $\sin z$ ja $\cos z$ Maclaurin sarjat.

Lause 2.2.6. Olkoon f ja g analyyttisiä pisteen z_0 ympäristössä, ja olkoot

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j,$$

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j,$$

funktioiden f ja g Taylorin sarjat pisteen z_0 ympäristössä. Tällöin

- (i) funktion cf , missä $c \in \mathbb{C}$, Taylorin sarja on $\sum_{j=0}^{\infty} ca_j(z-z_0)^j$;
- (ii) funktion $f \pm g$ Taylorin sarja on $\sum_{j=0}^{\infty} (a_j \pm b_j)(z-z_0)^j$.

Todistus sivuutetaan helppona. Kiekko, jossa funktion $f \pm g$ Taylorin sarja suppenee on vähintään yhtä suuri kuin pienempi kiekkoista, joissa funktioiden f ja g Taylorin sarjat suppenevat.

Esimerkki 2.2.7. Määrittää funktion $\cos z + i \sin z$ Maclaurin sarja.

Tarkastellaan kahden Maclaurin sarjan tuloa:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots)(b_0 + b_1z + b_2z^2 + b_3z^3 + \dots) \\ &= a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)z + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)z^2 \\ &+ (a_3b_0 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)z^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Huomataan, että tulotarjan kerroin on muotoa

$$c_j = a_jb_0 + a_{j-1}b_1 + a_{j-2}b_2 + \dots + a_1b_{j-1} + a_0b_j = \sum_{l=0}^j a_{j-l}b_l, \quad 0 \leq j < \infty. \quad (2.5)$$

Määritelmä 2.2.8. Kahden Taylorin sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_0)^j$ Cauchy-tulo on (formaali) sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z-z_0)^j$, missä c_j on annettu kaavassa (2.5).

Lause 2.2.9. Olkoot f ja g analyyttisiä jossakin pisteen z_0 ympäristössä, ja olkoot vastaavasti $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ ja $\sum_{j=0}^{\infty} b_j(z-z_0)^j$ niiden Taylorin sarjat. Tällöin tulofunktion fg Taylorin sarja tässä pisteen z_0 ympäristössä on funktioiden f ja g Taylorin sarjojen Cauchy-tulo.

Esimerkki 2.2.10. Määrittää funktion $\sin z \cdot \cos z$ Maclaurin sarja Cauchy-tulon avulla.

Esimerkki 2.2.11. Määrittää funktion $\tan z$ Maclaurin sarjan ensimmäisiä termejä.

Kurssilla *Kompleksianalyysi* a väitettiin, että jokainen analyyttinen funktio voidaan esittää lausekkeella, joka riippuu vain muuttujasta z (ei esiinny $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$ tai $\operatorname{Im} z$). Taylorin sarjat selittävät tämän väitteen.

2.3. Potenssisarjat

Määritelmä 2.3.1. Tyyppiä $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ olevia sarjoja sanotaan *potenssisarjoiksi*. Vakiot $a_j \in \mathbb{C}$ ovat *kertoimia*, ja $z_0 \in \mathbb{C}$ on *kehityskeskipiste*.

Olkoon potenssisarja annettu, esimerkiksi

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)^2} = 1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{9} + \frac{z^3}{16} + \dots \quad (2.6)$$

On luonnollista kysyä:

- Milloin potenssisarja suppenee? Millä muuttujan z arvoilla?
- Onko sarjan esittämä funktio analyyttinen?
- Onko sarjaesitys yksikäsitteinen? Erityisesti, onko jokainen potenssisarja Taylorin sarja?

Lause 2.3.2. Jokaista potenssisarjaa $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ vastaa yksikäsitteinen reaaliluku $R \in [0, \infty]$, joka riippuu vain kertoimista a_j , siten, että

- (i) sarja suppenee kiekossa $D(z_0, R)$;
- (ii) sarja suppenee tasaisesti suljetussa kiekossa $\overline{D(z_0, R')}$ kaikilla $R' < R$;
- (iii) sarja hajaantuu joukossa $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, R)}$.

Määritelmä 2.3.3. Olkoon $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ reaalilukujono siten, että $-\infty \leq x_j \leq \infty$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Tällöin lukua

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} x_j = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{j \geq k} x_j \right\}$$

kutsutaan jonon $\{x_j\}$ *yläraja-arvoksi*, kun $j \rightarrow \infty$.

Huomaa, että

- (i) jos $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ suppenee, niin $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \limsup_{j \rightarrow \infty} x_j$;
- (ii) $\limsup_{j \rightarrow \infty} x_j$ on aina olemassa ($-\infty$, äärellinen tai $+\infty$), mutta raja-arvo $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j$ ei ole aina olemassa.

Lauseen 2.3.2 todistus. Olkoon $R = \left(\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|a_j|} \right)^{-1}$. Todistetaan ensin väitteet (i) ja (ii). Jos $R = 0$, niin ei ole mitään todistettavaa. Jos $R > 0$, niin (i) seuraa väitteestä (ii), ja näin ollen riittää todistaa (ii).

Olkoon $0 < R' < R$. Valitaan luku $\eta \in \mathbb{R}$ siten, että $1/R < \eta < 1/R'$. Koska tällöin

$$\inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{j \geq k} \sqrt[j]{|a_j|} \right\} = \frac{1}{R} < \eta,$$

niin on olemassa $K \in \mathbb{N}$ siten, että $\sup_{j \geq K} \sqrt[j]{|a_j|} < \eta$, ja siis edelleen $\sqrt[j]{|a_j|} < \eta$ kaikilla $j \geq K$. Näin ollen kaikilla $z \in \overline{D(z_0, R')}$ ja $j \geq K$ pätee

$$|a_j(z - z_0)^j| = |a_j||z - z_0|^j < \eta^j (R')^j = (\eta R')^j,$$

missä $\sum_{j=0}^{\infty} (\eta R')^j$ suppenee geometrisena sarjana, koska $\eta R' < 1$. Weierstrassin M-testin nojalla $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ suppenee tasaisesti joukossa $\overline{D(z_0, R')}$.

Osoitetaan vielä (iii). Olkoon $z \in \mathbb{C}$ siten, että $|z - z_0| > R$. Valitaan $\delta \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \delta < \frac{1}{R} = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{j \geq k} \sqrt[j]{|a_j|} \right\}.$$

Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sup_{j \geq k} \sqrt[j]{|a_j|} \geq \frac{1}{R} > \delta.$$

Siis jokaista indeksia $k \in \mathbb{N}$ vastaa $j_k \geq k$ siten, että $\sqrt[j_k]{|a_{j_k}|} > \delta$. Nyt

$$|a_{j_k}(z - z_0)^{j_k}| = \left(\sqrt[j_k]{|a_{j_k}|} |z - z_0| \right)^{j_k} > (\delta |z - z_0|)^{j_k} > 1$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Koska yleinen termi $a_j(z - z_0)^j \nrightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, niin sarja $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ hajaantuu. $\square$

Lukua R sanotaan potenssisarjan $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ *suppenemissäteeksi*, ja Lauseen 2.3.2 todistuksen nojalla R saadaan esimerkiksi *Cauchy-Hadamard kaavasta*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|a_j|},$$

missä

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[j]{|a_j|} := \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{j \geq k} \sqrt[j]{|a_j|} \right\}, \quad \frac{1}{0} := \infty, \quad \frac{1}{\infty} := 0.$$

Huomaa, että Lause 2.3.2 ei sano mitään suppenemisestä kehällä $\partial D(z_0, R)$.

Suhdetestillä voidaan osoittaa, että jos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = L$$

niin $R = 1/L$. Esimerkiksi potenssisarjan (2.6) suppenemissäde on 1, koska

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(j+1)^2}{(j+2)^2} = 1.$$

Lemma 2.3.4. *Olkoon $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jono jatkuvia funktioita joukossa $\Omega \subset \mathbb{C}$ siten, että $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa Ω . Tällöin f on jatkuva joukossa Ω .*

Lause 2.3.5. Olkoon $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jono jatkuvia funktioita joukossa $\Omega \subset \mathbb{C}$ siten, että $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa Ω . Olkoon $\Gamma \subset \Omega$ ääriviiva. Tällöin

$$\int_{\Gamma} f_n(z) dz \longrightarrow \int_{\Gamma} f(z) dz, \quad n \rightarrow \infty.$$

Lause 2.3.6. Olkoon $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ jono analyyttisiä funktioita yhdesti yhtenäisessä alueessa D siten, että $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ suppenee tasaisesti kohti funktiota f alueessa D . Tällöin f on analyyttinen alueessa D .

Koska potenssisarjan osasummat ovat polynomeina analyyttisiä ja koska ne suppenevat tasaisesti jokaisessa suljetussa kiekossa, joka sisältyy suppenemissäteen indusoimaan suppenemisalueeseen (= avoin kiekko), niin Lauseen 2.3.6 nojalla rajafunktio on analyyttinen. Näin ollen päätellään seuraava tulos:

Lause 2.3.7. Jos $R > 0$ on potenssisarjan $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ suppenemissäde, niin tällöin $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ on analyyttinen kiekossa $D(z_0, R)$.

Esimerkiksi (2.6) esittää Lauseen 2.3.7 nojalla analyyttistä funktiota yksikkökiekossa.

Lauseiden 2.3.2 ja 2.3.5 nojalla potenssisarja voidaan integroida termeittäin jos ääri-
viiva sisältyy kokonaisuudessaan suppenemissäteen indusoimaan kiekkoon.

Lause 2.3.8. Olkoon $R > 0$ potenssisarjan $f(z) = \sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ suppenemissäde. Tällöin

$$a_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

ja siis $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ on funktion f Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä.

Lauseen 2.3.8 perusteella tiedetään, että potenssisarjaesitykset ovat yksikäsitteisiä. Erityisesti, jos sarjat $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j = \sum_{j=0}^\infty b_j(z - z_0)^j$ suppenevat pisteen z_0 ympäristössä, niin tällöin $a_j = b_j$ kaikilla $j = 0, 1, \dots$.

Ollaan osoitettu, että jos potenssisarja $\sum_{j=0}^\infty a_j(z - z_0)^j$ suppenee jossakin kiekossa, niin se on analyyttisen funktion

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n a_j(z - z_0)^j \tag{2.7}$$

Taylorin sarja, ja se voidaan sekä integroida että derivoida termeittäin tämän kiekon sisällä. Edelleen, jos $0 \leq R < \infty$ on tämän potenssisarjan suppenemissäde, niin funktio f ei voi olla analyyttinen missään kiekossa $D(z_0, R^*)$, missä $R^* > R$.

Esimerkki 2.3.9. Etsi origon ympäristössä analyyttinen funktio f siten, että $f(0) = 1$ ja $f'(z) = 3if(z)$ kaikilla $z \in D(0, r)$ jollekin $r > 0$.

Esimerkki 2.3.10. Olkoon $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva. Asetetaan

$$F(z) := \int_0^2 e^{zt} g(t) dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Osoita, että F on kokonainen ja määrää sen Maclaurin sarja.

2.4. Laurentin sarjat

Lause 2.4.1. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$, ja olkoon f analyyttinen renkaassa

$$A(r, R, z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty\}.$$

Tällöin f voidaan esittää muodossa

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j}(z - z_0)^{-j},$$

missä molemmat sarjat suppenevat renkaassa $A(r, R, z_0)$, ja suppenevat tasaisesti jokaisessa suljetussa renkaassa $A(\rho_1, \rho_2, z_0)$, missä $r < \rho_1 \leq \rho_2 < R$. Kertoimille pätee

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.8)$$

missä C on mikä tahansa positiivisesti suunnistettu yksinkertainen suljettu äärioviiva ko. renkaassa siten, että piste z_0 kuuluu ääriviivan C sisäosaan.

Tällaista sarjaesitystä, jossa on sekä positiivisiä että negatiivisia erotuksen $z - z_0$ potensseja sanotaan funktion f *Laurentin sarjaksi* ko. ympyrärenkaassa (Pierre Alphonse Laurent 1813-1854). Yleensä Laurentin sarja kirjoitetaan muodossa

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z - z_0)^j.$$

Jos f on analyyttinen kiekossa $D(z_0, R)$, niin Laurentin sarja redusoituu Taylorin sarjaksi.

Korvaamalla $(z - z_0)$ osamäärällä $1/(z - z_0)$ Lauseessa 2.3.2 nähdään että formaali sarja $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ suppenee jonkin ”suppenemiskiekon” $\overline{D(z_0, r)}$, jonka säde r riippuu vain kertoimista c_{-j} , ulkopuolella ja suppeneminen on tasaista jokaisessa joukossa $\mathbb{C} \setminus D(z_0, r')$, missä $r' > r$. Näin ollen sarja voidaan integroida termeittäin Lauseen 2.3.5 nojalla ja jatkamalla Luvun 2.3 tyylin saadaan:

Lause 2.4.2. Olkoot sarjat $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ ja $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ sellaisia, että

- (i) $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$ suppenee kiekossa $D(z_0, R)$;
- (ii) $\sum_{j=1}^{\infty} c_{-j}(z - z_0)^{-j}$ suppenee joukossa $\mathbb{C} \setminus \overline{D(z_0, r)}$;
- (iii) $r < R$.

Tällöin on olemassa funktio f , analyyttinen ympyrärenkaassa $\{z : r < |z - z_0| < R\}$, jonka Laurentin sarja tässä renkaassa on $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(z - z_0)^j$.

Lauseen 2.4.2 ja esityksen (2.8) mukaan Laurentin sarjat ovat yksikäsitteisiä.

Esimerkki 2.4.3. Määää funktion

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

Laurentin sarja alueessa $\{z : |z - 1| > 1\}$.

Esimerkki 2.4.4. Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)}.$$

Määää funktion f Laurentin sarja

- (a) yksikkökiekossa $\mathbb{D}$;
- (b) renkaassa $\{z : 1 < |z| < 2\}$;
- (c) alueessa $\{z : |z| > 2\}$.

Esimerkki 2.4.5. Määää funktion $e^{1/z}$ Laurentin sarja joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.**Esimerkki 2.4.6.** Määää funktion

$$f(z) = \begin{cases} \sin z, & \text{kun } z \neq 0, \\ 5, & \text{kun } z = 0, \end{cases}$$

Laurentin sarja joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.5. Nollakohdat ja singulariteetit

Tässä luvussa tarkastellaan analyyttisten funktioiden käyttäytymistä lähellä nollakohtia ja erikoispisteitä. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f *nollakohta*, jos f on analyyttinen pisteessä z_0 (näin ollen analyyttinen jossakin sen ympäristössä), ja $f(z_0) = 0$. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on *eristetty erikoispiste*, jos f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ jollekin $r > 0$, mutta f ei ole analyyttinen pisteessä z_0 .

Määritelmä 2.5.1. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f m -kertainen nollakohta, jos f on analyyttinen pisteessä z_0 , ja $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, mutta $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Jos $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f m -kertainen 0-kohta, niin sen Taylorin sarja on muotoa

$$\begin{aligned} f(z) &= a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \dots \\ &= (z - z_0)^m (a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots), \end{aligned} \tag{2.9}$$

missä $a_m = f^{(m)}(z_0)/(m!) \neq 0$, ja summa $g(z) = a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots$ on analyyttinen pisteessä z_0 sekä se toteuttaa $g(z_0) \neq 0$. Edelleen summa g suppenee jos ja vain jos funktion f Taylorin sarja suppenee. Kääntäen, jokaisella muotoa (2.9) olevalla funktiolla täytyy olla m -kertainen 0-kohta pisteessä z_0 .

Lause 2.5.2. Olkoon f analyyttinen pisteessä z_0 . Tällöin z_0 on funktion f m -kertainen nollakohta jos ja vain jos

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

missä g on analyyttinen pisteessä z_0 , ja $g(z_0) \neq 0$.

Korollari 2.5.3. Jos f on analyyttinen pisteessä z_0 , ja jos $f(z_0) = 0$, niin joko $f \equiv 0$ jossakin kiekossa $D(z_0, r)$, $r > 0$, tai on olemassa $r > 0$ siten, että $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.

Huomaa, että jos $f \not\equiv 0$ on analyyttinen, ja $f(z_0) = 0$, niin nollakohdan z_0 kertaluku on aina luonnollinen luku. Funktiolla $z^{1/2}$ voitaisiin sanoa olevan $(1/2)$ -kertainen nollakohta origossa, mutta $z^{1/2}$ ei ole analyyttinen pisteessä 0 (miksi?).

Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ funktion f eristetty erikoispiste. Tiedetään, että funktiolla f on Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad (2.10)$$

pisteen z_0 jossakin punkteeratussa ympäristössä $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Määritelmä 2.5.4. Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f eristetty erikoispiste, ja olkoon funktion f Laurentin sarja annettu kaavalla (2.10) joukossa $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$. Tällöin

- (i) Jos $a_j = 0$ kaikilla $j < 0$, niin z_0 on *poistuva erikoispiste*;
- (ii) Jos $a_{-m} \neq 0$ jollekin $m > 0$, mutta $a_j = 0$ kaikilla $j < -m$, niin z_0 on *m -kertainen napa*;
- (iii) Jos $a_j \neq 0$ äärettömän monelle negatiiviselle j , niin z_0 on *oleellinen erikoispiste*.

Tullaan näkemään, että eristetyt erikoispisteet voidaan erottaa toisistaan funktion f käyttäytymisen perusteella, laskematta Laurentin sarjaa.

Poistuvat erikoispisteet

Jos $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f poistuva erikoispiste, niin Laurentin sarja pisteessä z_0 on muotoa

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad z \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}. \quad (2.11)$$

Esimerkki 2.5.5.

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots; \quad z_0 = 0, \\ \frac{\cos z - 1}{z} &= \frac{1}{z} \left(\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \right) - 1 \right) = -\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots; \quad z_0 = 0, \\ \frac{z^2 - 1}{z - 1} &= z + 1 = 2 + (z - 1) + 0 + 0 + \dots; \quad z_0 = 1. \end{aligned}$$

Kaavan (2.11) nojalla f on yhtä kuin analyyttinen funktio h joukossa $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, joten ainoa syy siihen, että funktiolla f on erikoispiste pisteessä z_0 on se että f on määritelty ”erityisesti” pisteessä z_0 . Koska h on analyyttinen pisteessä z_0 , on se myös rajoitettu jossakin pisteen z_0 ympäristössä. Ollaan osoitettu:

Lemma 2.5.6. *Jos $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f poistuva erikoispiste, niin tällöin seuraavat väittämät ovat tosia:*

- (i) *On olemassa $r > 0$ siten, että $f(z)$ on rajoitettu joukossa $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$;*
- (ii) *On olemassa raja-arvo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$;*
- (iii) *Funktio f voidaan uudelleen määritellä pisteessä z_0 siten, että siitä tulee analyyttinen pisteessä z_0 .*

Kääntäen, jos f on rajoitettu jossakin eristetyn erikoispisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, niin singulariteetti on poistuva.

Todistus. (Käänteinen suunta) On osoitettava, että funktion f Laurentin sarjalle

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

pätee $a_j = 0$ kaikilla $j \leq -1$. Olkoon $r \leq \frac{R}{2}$ ja $M = \max_{0 < |\xi - z_0| \leq R/2} |f(\xi)|$. Tällöin kaavan (2.8) ja Lauseen 1.2.11 nojalla

$$|a_j| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{j+1}} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{j+1}} 2\pi r = Mr^{-j} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0^+,$$

kaikilla $j \leq -1$. Väite seuraa. □

Poistuvat erikoispisteet eivät ole kovinkaan tärkeitä analyyttisten funktioiden teoriasa, mutta käsite on joissakin tapauksissa hyödyllinen, kuten tullaan jatkossa näkemään.

Navat

Laurentin sarja m -kertaisen navan ympäristössä on muotoa

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots, \quad a_{-m} \neq 0. \quad (2.12)$$

Esimerkki 2.5.7. *Funktiolla*

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots$$

on kaksinkertainen napa origossa, ja funktiolla

$$\frac{\sin z}{z^5} = \frac{1}{z^5} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \dots$$

on nelinkertainen napa origossa.

Kaavasta (2.12) seuraa:

Lemma 2.5.8. Jos funktiolla f on pisteessä z_0 m -kertainen napa, niin

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^l f(z)| = \infty, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad l < m,$$

kun taas funktiolla $(z - z_0)^m f(z)$ on poistuva erikoispiste pisteessä z_0 . Erityisesti pätee $|f(z)| \rightarrow \infty$, kun $z \rightarrow z_0$.

Lemma 2.5.9. Funktiolla f on m -kertainen napa pisteessä z_0 jos ja vain jos jossakin pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä (so. jossakin joukossa $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, missä $r > 0$ on riittävän pieni) pätee

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad (2.13)$$

missä g on analyyttinen pisteessä z_0 , ja $g(z_0) \neq 0$.

Esimerkki 2.5.10. Määrittää funktion $(\sin z)/((z^2 - 1)^2)$ pisteessä $z = 1$ olevan singulariteetin laatu.

Esimerkki 2.5.11. Osoita, että kaikki rationaalifunktion singulariteetit ovat joko poistuvia tai napoja.

Yhdistämällä edellä esitetyt päättelyt saadaan seuraava tulos.

Lemma 2.5.12. Jos funktiolla f on m -kertainen nollakohta pisteessä z_0 , niin funktiolla $1/f$ on m -kertainen napa pisteessä z_0 . Kääntäen, jos funktiolla f on m -kertainen napa pisteessä z_0 , niin funktiolla $1/f$ on poistuva erikoispiste pisteessä z_0 , ja jos määritellään $(1/f)(z_0) = 0$, niin funktiolla $1/f$ on m -kertainen nollakohta pisteessä z_0 .

Tiedetään siis että $|f(z)| \rightarrow \infty$, kun z lähestyy napaa. Tämä ei pidä paikkaansa, kun z lähestyy oleellista erikoispistettä.

Oleelliset erikoispisteet

Lause 2.5.13 (Picardin lause). Funktio f saa jokaisen kompleksiarvon mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuunottamatta (Picardin poikkeusarvo), jokaisessa oleellisen erikoispisteen punkteeratussa ympäristössä.

Picardin lauseen todistus jää tämän kurssin ulkopuolelle. Osoitamme kuitenkin seuraavan heikomman tuloksen.

Lause 2.5.14 (Casorati-Weierstrass). Jos funktiolla f on oleellinen erikoispiste z_0 , niin jokaisessa pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä funktio f saa arvoja, jotka ovat mielivaltaisen lähellä mitä tahansa kiinnitettyä lukua $c \in \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.5.15. Todista Picardin lauseen väite funktiolle $e^{1/z}$.

Funktion $e^{1/z}$ eksoottista käyttäytymistä oleellisen erikoispisteensä ympäristössä voidaan tarkastella myös piirtämällä käyrät $|e^{1/z}| = s$, missä $s = 1, 1/2, 2, 1/3, 3, \dots$.

Ollaan nähty, että jokaista kolmea eristetyn erikoispisteen tyyppiä vastaa tietynlainen funktion käyttäytyminen kyseessä olevan pisteen ympäristössä: Rajoittuneisuus indikoi poistuvaa erikoispistettä, modulin lähestyminen ääretöntä kohti raja-arvon mielessä indikoi napaa ja mikä tahansa muu viittaa oleelliseen erikoispisteeseen. Näitä ominaisuuksia voidaan käyttää, kun Laurentin sarjan laskeminen on hankalaa, mutta halutaan määrätä erikoispisteen laatu.

Esimerkki 2.5.16. Määrittää funktion $\sin(1 - 1/z)$ nollakohtien ja erikoispisteiden laatu.

Esimerkki 2.5.17. Määrittää funktion $f(z) = (\tan z)/z$ nollakohtien ja erikoispisteiden laatu.

Yhteenvedona erikoispisteisiin liittyvästä teoriasta voidaan nyt asettaa seuraava tulos.

Lause 2.5.18. Olkoon funktiolla f on eristetty erikoispiste z_0 .

(i) Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja:

- (1) z_0 on poistuva;
- (2) $|f|$ on rajoitettu pisteen z_0 ympäristössä;
- (3) raja-arvo $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ on olemassa äärellisenä;
- (4) f voidaan uudelleen määritellä pisteessä z_0 siten, että f on analyyttinen pisteessä z_0 .

(ii) Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja:

- (1) z_0 on napa;
- (2) $|f(z)| \rightarrow +\infty$, kun $z \rightarrow z_0$;
- (3) f voidaan esittää muodossa $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ jollekin $m \in \mathbb{N}$ ja jollekin $g(z)$ analyyttinen pisteessä z_0 ja $g(z_0) \neq 0$.

(iii) Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja:

- (1) z_0 on oleellinen erikoispiste;
- (2) $|f(z)|$ ei ole rajoitettu pisteen z_0 ympäristössä, eikä $|f(z)| \rightarrow +\infty$, kun $z \rightarrow z_0$;
- (3) $f(z)$ saa jokaisen kompleksiarvon, mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuunottamatta, jokaisessa pisteen z_0 ympäristössä.

2.6. Piste ∞

On houkuttelevaa määritellä $f(z_0) = \infty$, jos $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f napa. Täsmällisemmin asetetaan

$$f(z_0) = \infty,$$

jos f on analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä ja $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$. Edelleen asetetaan

$$f(\infty) = w_0, \quad \text{jos} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0.$$

Esimerkiksi, jos

$$f(z) = \frac{2z+1}{z-1}, \tag{2.14}$$

niin $f(1) = \infty$ ja $f(\infty) = 2$. Edelleen jos $h(z) = 2z+1$, niin $h(\infty) = \infty$.

Määritelmä 2.6.1. Asetetaan:

- (i) funktio f on analyyttinen pisteessä ∞ , jos $f(\frac{1}{w})$ on analyyttinen origossa tai sillä on poistuva erikoispiste origossa;
- (ii) funktiolla f on m -kertainen napa pisteessä ∞ , jos funktiolla $f(\frac{1}{w})$ on m -kertainen napa origossa;
- (iii) funktiolla f on oleellinen erikoispiste pisteessä ∞ , jos origo on funktion $f(\frac{1}{w})$ oleellisen erikoispiste.

Lauseesta 2.5.18 seuraa:

- (i) f on analyyttinen pisteessä ∞ , jos $|f(z)|$ on rajoitettu kun z on moduliltaan riittävän suuri;
- (ii) funktiolla f on napa pisteessä ∞ , jos $f(z) \rightarrow \infty$ kun $z \rightarrow \infty$;
- (iii) funktiolla f on oleellinen erikoispiste ∞ , jos f ei ole rajoitettu eikä lähesty moduliltaan ääretöntä, kun $z \rightarrow \infty$.

Esimerkki 2.6.2. Klassifioi funktioiden z^2+2 , $(iz+1)/(z-1)$ ja $\sin z$ käyttäytyminen pisteessä ∞ .

Esimerkki 2.6.3. Määrää kaikki funktiot f , jotka ovat analyyttisiä laajennetussa kompleksitasossa $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Esimerkki 2.6.4. Mitä muotoa on funktio f , joka on analyyttinen joukossa $\widehat{\mathbb{C}}$ poislukien piste $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$, jossa sillä on m -kertainen napa?

3. Residy-teoriaa

3.1. Cauchyn residylause

Palataan integraaliin

$$\int_{\Gamma} f(z) dz,$$

missä Γ on yksinkertainen ja suljettu ääriviiva sekä f on analyyttinen ääriviivalla Γ ja sen sisällä poislukien eristetty erikoispiste $z_0 \in \text{Int}(\Gamma)$. Tiedetään, että funktiolla f on Laurentin sarja

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z - z_0)^j, \quad (3.1)$$

joka suppenee jossakin pisteen z_0 punkteeratussa ympäristössä $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Tällöin

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_C f(z) dz, \quad C = \left\{ z : |z - z_0| = \frac{r}{2} \right\},$$

missä oikeanpuoleinen integraali voidaan laskea integroimalla (3.1) termeittäin. Jos $j \neq -1$, on termin $a_j(z - z_0)^j$ ääriviivaintegraalin arvo 0; tapauksessa $j = -1$ saadaan $2\pi i a_{-1}$. Siis

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i a_{-1}. \quad (3.2)$$

Vakiolla a_{-1} on selvästikin tärkeä rooli ääriviivaintegraaleissa.

Määritelmä 3.1.1. Jos funktiolla f on eristetty erikoispiste $z_0 \in \mathbb{C}$, niin sen Laurentin sarjan termin $(z - z_0)^{-1}$ kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f *residyksi pisteessä* z_0 . Merkittään $\text{Res}(f; z_0)$, tai lyhyesti $\text{Res}(z_0)$.

Esimerkki 3.1.2. Olkoon $f(z) = ze^{3/z}$. Määrittää $\text{Res}(f; 0)$ ja laske

$$\int_{|z|=4} ze^{3/z} dz.$$

Jos funktiolla f on poistuva erikoispiste z_0 , niin kaikki erotuksen $(z - z_0)$ negatiivisten potenssien kertoimet funktion f Laurentin sarjassa ovat nollija, ja näin ollen $\text{Res}(z_0) = 0$. Edelleen, jos funktiolla f on napa pisteessä z_0 , niin tullaan näkemään, että residyn laskemiseksi voidaan löytää yksinkertainen kaava. Oletetaan ensiksi, että napa on yksinkertainen. Tällöin pisteen z_0 ympäristössä

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad a_{-1} \neq 0,$$

joten

$$(z - z_0)f(z) = a_{-1} + (z - z_0) [a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots].$$

Antamalla $z \rightarrow z_0$, saadaan

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1} \neq 0.$$

Jos siis funktiolla f on yksinkertainen napa pisteessä z_0 , niin

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (3.3)$$

Esimerkiksi funktiolla $f(z) = e^z/(z(z+1))$ on yksinkertaiset navat pisteissä $z = 0$ ja $z = -1$, joten

$$\operatorname{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z+1} = 1$$

ja

$$\operatorname{Res}(f; -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{e^z}{z} = -e^{-1}.$$

Esimerkki 3.1.3. Olkoon $f(z) = P(z)/Q(z)$, missä P ja Q ovat analyyttisiä pisteessä z_0 , funktiolla Q on yksinkertainen nollakohta pisteessä z_0 ja $P(z_0) \neq 0$. Osoita, että

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Esimerkki 3.1.4. Laske $\operatorname{Res}(f; z_0)$, kun $f(z) = \cot z$ ja z_0 on funktion f eristetty erikoispiste.

Jos funktiolla f on m -kertainen napa pisteessä z_0 , niin $\operatorname{Res}(f; z_0)$ saadaan seuraavasti:

Lause 3.1.5. Jos funktiolla f on m -kertainen napa pisteessä z_0 , niin

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad (3.4)$$

Esimerkki 3.1.6. Laske $\operatorname{Res}(f; z_0)$, kun

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z - \pi)^3},$$

ja z_0 on funktion f eristetty erikoispiste.

Ollaan nähty miten integraali $\int_{\Gamma} f(z) dz$ lasketaan, kun funktiolla f on yksi singulariteetti suljetun ääriviivan Γ sisällä. Tarkastellaan nyt yleisempää tilannetta, jossa Γ on yksinkertainen suljettu positiivisesti suunnistettu ääriviiva, ja f on analyyttinen ääriviivalla Γ ja sen sisällä lukuunottamatta äärellisen montaa eristettyä erikoispistettä $z_1, z_2, \dots, z_n$. Tiedetään, että

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{c_j} f(z) dz,$$

missä silmukat c_j ovat riittävän pieniä ympyröitä, joiden keskipisteet ovat z_j vastaavasti. Nyt z_j on ainoa funktion f singulariteetti kiekon c_j sisällä, joten

$$\int_{c_j} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_j).$$

Näin ollen päätellään seuraava tärkeä tulos.

Lause 3.1.7 (Cauchyn residylause). Jos Γ on yksinkertainen suljettu positiivisesti suunnistettu äärioviiva ja f on analyyttinen äärioviivalla Γ ja sen sisällä lukuunottamatta pisteitä $z_1, \dots, z_n \in \text{Int } \Gamma$, niin tällöin

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j).$$

Esimerkki 3.1.8. Laske

$$I = \int_{|z|=2} \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz.$$

Ratkaisu. Integroitavalla funktiolla $f(z) = (1-2z)/(z(z-1)(z-3))$ on yksinkertainen napa pisteissä $z=0$, $z=1$ ja $z=3$. Residylauseen nojalla

$$I = \int_{|z|=2} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; 0) + \text{Res}(f; 1)),$$

missä

$$\text{Res}(f; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1-2z}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{3},$$

ja

$$\text{Res}(f; 1) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-2z}{z(z-3)} = \frac{1}{2},$$

joten $I = 2\pi i (1/3 + 1/2) = 5\pi i/3$.

Esimerkki 3.1.9. Laske

$$I = \int_{|z|=5} \left(z e^{3/z} + \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3} \right) dz.$$

Ratkaisu. Selvästi

$$\begin{aligned} I &= \int_{|z|=5} z e^{\frac{3}{z}} dz + \int_{|z|=5} \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3} dz \\ &= 2\pi i \left(\text{Res}\left(z e^{\frac{3}{z}}; 0\right) + \text{Res}\left(\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}; 0\right) + \text{Res}\left(\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}; \pi\right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{\pi^4} - \frac{6-\pi^2}{2\pi^4} \right). \end{aligned}$$

3.2. Trigonometrisiä integraaleja

Tavoitteena on soveltaa residylauseetta tyyppiä

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta, \tag{3.5}$$

missä $U(x, y)$ on reaalikertoiminen rajoitettu rationaalifunktio, olevien integraalien laskemiseen. Näytetään, että (3.5) voidaan esittää ääriiviointegraalina $\int_{\mathbb{T}} F(z) dz$, missä F on kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio. Asetetaan $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, jolloin $z^{-1} = e^{-i\theta}$. Koska

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{ja} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

niin

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{ja} \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right). \quad (3.6)$$

Edelleen $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$, joten

$$d\theta = \frac{dz}{iz}. \quad (3.7)$$

Sijoittamalla kaavat (3.6) ja (3.7) kaavaan (3.5), saadaan

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}} F(z) dz,$$

missä

$$F(z) = U \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \frac{1}{iz}.$$

Oletuksista johtuen F on rationaalifunktio, joten sillä on vain poistuvia erikoispisteitä (jotka voidaan integroinnissa unohtaa) ja napoja. Näin ollen residylauseen nojalla

$$\int_0^{2\pi} U(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_j \text{Res}(F; z_j),$$

missä pisteet z_j ovat funktion F napoja yksikkökiekossa $\mathbb{D}$.

Esimerkki 3.2.1. Laske

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta.$$

Ratkaisu. Huomataan, että $5 + 4 \cos \theta \neq 0$ kaikilla $\theta \in [0, 2\pi]$, joten standardit sijoitukset antavat

$$I = \int_{\mathbb{T}} \frac{\left(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)^2}{5 + 4\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right)} \frac{dz}{iz} = \dots = -\frac{1}{4i} \int_{\mathbb{T}} \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} dz.$$

Integroitavalla funktiolla

$$g(z) := \frac{(z^2 - 1)^2}{z^2(2z^2 + 5z + 2)} = \frac{(z^2 - 1)^2}{2z^2(z + \frac{1}{2})(z + 2)}$$

on yksinkertainen napa pisteissä $z = -1/2$ ja $z = -2$, ja kaksinkertainen napa origossa. Näistä pisteet $z = -1/2$ ja $z = 0$ ovat yksikkökiekossa, joten

$$I = -\frac{1}{4i} 2\pi i \left(\text{Res} \left(g; -\frac{1}{2} \right) + \text{Res}(g; 0) \right).$$

Nyt

$$\operatorname{Res}\left(g; -\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) g(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(z^2 - 1)^2}{2z^2(z + 2)} = \frac{3}{4}$$

ja

$$\operatorname{Res}(g; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} (z^2 g(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z^2 - 1)^2}{2z^2 + 5z + 2} \right) = \dots = -\frac{5}{4},$$

joten

$$I = -\frac{1}{4i} 2\pi i \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Esimerkki 3.2.2. *Laske*

$$I = \int_0^\pi \frac{d\theta}{2 - \cos \theta}.$$

Ratkaisu. Koska $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$ kaikilla $0 \leq \theta \leq \pi$, niin

$$I = \int_\pi^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos \theta} \quad \text{ja} \quad 2I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos \theta}.$$

Standardit sijoitukset antavat

$$2I = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2 - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} = -\frac{2}{i} \int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}.$$

Nimittäjän nollakohdat ovat $z_1 = 2 - \sqrt{3}$ ja $z_2 = 2 + \sqrt{3}$, joten

$$g(z) := \frac{1}{z^2 - 4z + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

ja siis funktiolla g on yksinkertainen napa pisteissä z_1 ja z_2 . Nyt $z_1 \in \mathbb{D}$, ja

$$\operatorname{Res}(g; z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{z - z_2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Toisaalta $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Näin ollen

$$2I = -\frac{2}{i} 2\pi i \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad \Longleftrightarrow \quad I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

3.3. Reaalisia integraaleja yli välin $(-\infty, \infty)$

Jos f on jatkuva ei-negatiivisella reaaliakselilla $[0, \infty)$, niin määritellään

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx,$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Esimerkiksi

$$\int_0^\infty e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{-e^{-2b}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Samaan tapaan, jos f on jatkuva joukossa $(-\infty, 0]$, niin asetetaan

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 f(x) dx,$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Jos molemmat raja-arvot ovat olemassa, niin

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tässä tapauksessa integraalin arvo saadaan laskemalla yksi raja-arvo, nimittäin

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^\rho f(x) dx.$$

Kannattaa kuitenkin huomata, että tämä raja-arvo voi olla olemassa vaikka integraalia $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ ei olisikaan olemassa. Tämä nähdään tarkastelemalla parittomia funktioita kuten esimerkiksi identtistä kuvausta $f(x) = x$.

Määritelmä 3.3.1. Olkoon f jatkuva funktio joukossa $(-\infty, \infty)$. Funktion f integraalin yli välin $(-\infty, \infty)$ *Cauchyn pääarvo* on

$$PA \left(\int_{-\infty}^\infty f(x) dx \right) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^\rho f(x) dx.$$

On selvää, että jos integraali $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ on olemassa, niin se yhtyy Cauchyn pääarvoon. Tarkastelemme nyt kuinka Residylauseetta voidaan soveltaa tiettyjen integraalien pääarvojen laskemiseen.

Esimerkki 3.3.2. Laske

$$PA \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^4 + 4} \right) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^\rho \frac{dx}{x^4 + 4}.$$

On selvää, että Esimerkissä 3.3.2 käytetty puoliympyränmuotoinen ääriviiva sopii integraaleille, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

(1) f on analyyttinen reaaliakselilla ja ylemmässä puolitasossa lukkun ottamatta äärellistä määrää eristettyjä erikoispisteitä ylemmässä puolitasossa $\operatorname{Im} z > 0$. Tämä takaa sen, että riittävän suurelle ρ kaikki nämä eristetyt erikoispisteet ovat ääri-
i-ivan sisällä.

$$(2) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho^+} f(z) dz = 0.$$

Näiden ehtojen vallitessa $PA \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right)$ saadaan ylemmän puolitason residyyjen summana kerrottuna luvulla $2\pi i$. Tietysti, jos ehtojen (1) ja (2) analogiat toteutuvat alemmassa puolitasossa, sama päättely toimii myös siellä. Tarkastellaan ehtoa (2).

Lemma 3.3.3. Jos $f = P/Q$, missä P ja Q ovat polynomeja siten, että $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$, niin

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{C_\rho^+} f(z) dz = 0.$$

Esimerkki 3.3.4. Laske

$$PA \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx \right).$$

Esimerkki 3.3.5. Osoita, että

$$PA \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx \right) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

3.4. Argumentin periaate ja Rouchén lause

Määritelmä 3.4.1. Funktio f on meromorfinen alueessa D mikäli se on jokaisessa alueen pisteessä joko analyyttinen tai sillä on napa.

Edellä olleen määritelmän nojalla analyyttiset funktiot ovat erikoistapauksia meromorfinen funktioista. Rationaalifunktiot ovat meromorfinen koko kompleksitasossa.

Jos f on analyyttinen suljetulla ääri-
i-ivalla ja meromorfinen sen sisällä, niin tällöin funktiolla f on äärellinen määrä napoja ääri-
i-ivan sisällä (Napat eristettyjä. Jos niitä ääretön määrä, niin Bolzano-Weierstrasin lauseen nojalla on olemassa kasaantumispiste navoille ääri-
i-ivan sisällä ja tämä kasaantumispiste ei ole eristetty!). Samaan tapaan päätellään, että nollakohtia on myös äärellinen määrä ääri-
i-ivan sisällä.

Jos

$$f(z) = \frac{(z - 8)^2 z^3}{(z - 5)^4 (z + 2)^2 (z - 1)^5}, \quad (3.9)$$

niin funktion f napojen ja nollakohtien lukumäärät kiekossa $D(0, 4)$ kertaluvut huomioon ottaen ovat $N_p(f) = 2 + 5 = 7$ ja $N_0(f) = 3$, vastaavasti. Edelleen funktiolla f ei ole napoja eikä nollakohtia kehällä $|z| = 4$.

Esimerkki 3.4.2. Laske $\int_C f'(z)/f(z) dz$, kun C on positiivisesti suunnistettu kiekko $\{z : |z| = 4\}$.

Ratkaisu. Formaalisti

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{d}{dz} (\operatorname{Log} |f(z)| + i \arg f(z)).$$

Olkoon γ suljetun kiekon C riittävän lyhyt kaari, jolla $\arg f(z)$ muuttuu vähemmän kuin 2π kuljettaessa pitkin kaarta γ . Tällöin on olemassa funktion $\log f(z)$ haara, joka on analyyttinen kaarella γ . Lauseen 1.3.1 nojalla

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = (\operatorname{Log} |f(z_2)| + i \arg f(z_2)) - (\operatorname{Log} |f(z_1)| + i \arg f(z_1)),$$

missä z_1 ja z_2 ovat kaaren γ alku ja loppupisteet vastaavasti. Jos nyt C jaetaan tällaisiin kaariin, niin saadaan

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Delta_C \operatorname{Log} |f| + i \Delta_C \arg f = i \Delta_C \arg f,$$

missä $\Delta_C \arg f$ kertoo kuinka paljon funktion f argumentti muuttuu kuljettaessa pitkin ääriäviivaa C ($\Delta_C \operatorname{Log} |f| = 0$, koska $\operatorname{Log} |f|$ on yksiarvoinen funktio, eikä sillä siten ole haaroja). Puhutaan jatkossa funktion f argumentin variaatiosta käyrällä C . Funktion f määritelmän nojalla

$$\arg f(z) = 2 \arg(z - 8) + 3 \arg z - 4 \arg(z - 5) - 2 \arg(z + 2) - 5 \arg(z - 1),$$

joten

$$\Delta_C \arg f = 2\pi(2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1) = -8\pi,$$

ja siis

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -8\pi i.$$

Edellisessä esimerkissä jokaisen kiekon C sisäpuolella olevan nollakohdan vaikutus integraaliin oli $2\pi i$ kertaa sen monikerta ja vastaavasti jokaisen navan $-2\pi i$ kertaa sen monikerta. Argumentin periaate yleistää tämän tuloksen meromorfinen funktioille.

Lause 3.4.3 (Argumentin periaate). *Jos f on analyyttinen ja nollasta eroava yksinkertaisen, suljetun ja positiivisesti suunnatun käyrän C jokaisessa pisteessä sekä meromorfinen käyrän C sisällä, niin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f) - N_p(f),$$

missä $N_0(f)$ ja $N_p(f)$ ovat funktion f nollakohtien ja napojen lukumäärät (monikerrat huomioon ottaen) käyrän C sisällä.

Korollari 3.4.4. *Jos f on analyyttinen ja nollasta eroava yksinkertaisen, suljetun ja positiivisesti suunnatun käyrän C jokaisessa pisteessä sekä analyyttinen käyrän C sisällä, niin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0(f),$$

missä $N_0(f)$ on funktion f nollakohtien lukumäärä (monikerrat huomioon ottaen) käyrän C sisällä.

Edellä olleen nojalla Argumentin periaatteen väite voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f = N_0(f) - N_p(f).$$

On olemassa vielä yksi tapa ilmaista funktion f argumentin variaatio ääriiviivalla C ; se pitää sisällään ääriiviivan C kuvan $f(C)$ w -tasossa kuvauksessa $w = f(z)$. Jos $z(t)$, $a \leq t \leq b$ on ääriiviivan C parametrisointi, niin $f(C)$ on käyrä, jonka parametrisointi on $w = f(z(t))$, $a \leq t \leq b$. Tietysti kuva on suljettu käyrä, mutta toisin kuin C , sen ei tarvitse olla yksinkertainen eikä positiivisesti suunnistettu. Edelleen se ei leikkaa origoa, koska $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in C$ oletuksen nojalla.

Jos nyt piirrämme kuvajoukon $f(C)$, niin argumentin variaatio on helppo nähdä. Joka kerta kun $f(z(t))$ kiertää origon positiivisessa suunnassa (vastapäivään), niin $\arg f$ kasvaa 2π verran, kun taas negatiivisessa kierrossa se vähenee 2π verran. Näin ollen, koska $f(C)$ on suljettu, $\Delta_C \arg f$ on 2π kertaa se kokonaisluku, joka kertoo kuinka monta kertaa $f(C)$ kiertää origon positiivisessa suunnassa (positiiviset kierrot miinus negatiivisten kierrosten lukumäärä). Joissakin lähteissä puhutaan kierrosluvusta origon ympäri - *the winding number of $f(C)$ about the origin*.

Oletetaan seuraavaksi, että f on analyyttinen ja nollasta eriävä ääriiviivalla C ja mero-morfinen sen sisällä. Oletetaan edelleen, että tiedetään kuinka monta kertaa $f(C)$ kiertää origon. Lisätään funktioon f analyyttinen häiriö h ja tarkastellaan funktiota $g = f + h$. Haluaisimme nyt tietää, että kuinka pieni on häiriön h oltava, jotta $g(C)$ kiertää origon täsmälleen yhtä monta kertaa kuin $f(C)$. *Ja mitenkähän tämä liittyy koiran ulkoiluttamiseen?*

Lause 3.4.5 (Rouchén lause). *Jos f ja h ovat analyyttisiä funktioita yksinkertaisella suljetulla ääriiviivalla C sekä sen sisäpuolella ja jos aito epäyhtälö*

$$|h(z)| < |f(z)| \tag{3.10}$$

pätee jokaisessa ääriiviivan C pisteessä, niin funktioilla f ja $f + h$ on yhtä monta nollakohtaa (monikerrat huomioon ottaen) ääriiviivan C sisäpuolella.

Huomaa, että epäyhtälön (3.10) tulee olla voimassa vain ääriiviivalla, ei sen sisäpuolella.

Esimerkki 3.4.6. *Osoita, että polynomilla $p(z) = z^5 + 3z + 1$ on viisi nollakohtaa kiekossa $|z| < 2$.*

Todistus. Tarkastellaan funktiota $h(z) = 3z + 1$ funktion $f(z) = z^5$ häiriönä. Funktiolla f on selvästikin viisinkertainen nollakohta origossa. Kun arvioidaan häiriötä h ympyrällä $|z| = 2$ seuraavasti:

$$|h(z)| = |3z + 1| \leq 3|z| + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7,$$

voidaan todeta, että

$$|h(z)| < |f(z)| = |z^5| = 2^5 = 32.$$

Näin ollen Rouchén lauseen nojalla myös polynomilla p on viisi nollakohtaa kiekon $|z| < 2$ sisällä. $\square$

Esimerkki 3.4.7. *Osoita, että yhtälöllä $z + 3 + 2e^z = 0$ on täsmälleen yksi ratkaisu vasemmassa puolitasossa $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.*

Rouchén lauseella voidaan antaa vaihtoehtoinen todistus Algebran peruslauseelle.

Esimerkki 3.4.8. *Osoita, että jokaisella astetta $n \in \mathbb{N}$ olevalla polynomilla on täsmälleen n nollakohtaa.*

Hakemisto

- Algebran peruslause, 14
- Casorati-Weierstrass lause, 26
- Cauchy-Hadamard kaava, 20
- Cauchy-tulo, 18
- Cauchyn arvio, 13
- Cauchyn integraalikaava, 11
- Cauchyn integraalilause, 10
- Cauchyn residylause, 31
- Deformaatio invarianssilause, 10
- Eristetty erikoispiste, 23
 - napa, 24, 28
 - oleellinen, 24, 28
 - poistuva, 24, 28
- Hyväksyttävä parametrisointi, 1
- Integraali pitkin käyrää, 3
- Integroituva pitkin käyrää, 3
- Jatkuva deformaatio, 8
- Jordanin käyrälause, 2
- Juuritesti, 16
- Kehityskeskipiste, 19
- Keskiarvoperiaate, 14
- Laurentin sarja, 22
- Liouvillen lause, 13
- Maclaurin sarja, 17
- Maksimiperiaate, 14
- Monesti yhtenäinen alue, 9
- Moreran lause, 13
- Napa, 24
- Nollakohta, 23
 - moninkertainen, 23
- Oleellinen erikoispiste, 24
- Picardin lause, 26
- Poistuva erikoispiste, 24
- Potenssisarja, 19
- analyttisyys, 21
- suppenemissäde, 20
- termittäin integrointi, 21
- yksikäsitteisyys, 21
- Primitiivi, 4
- Residy, 29
- Riippumattomuus polusta, 7, 8
- Sarja, 15
 - absoluuttinen suppeneminen, 15
 - hajaantuminen, 15
 - osasumma, 15
 - suppeneminen, 15
 - tasainen suppeneminen, 16
- Sileä kaari, 1
 - suunnattu, 1
- Sileä käyrä, 1
 - pituus, 3
 - suljettu, 1
 - suunnattu, 2
- Silmukka, 2
- Suhdetesti, 15
- Suppenemissäde, 20
- Taylorin sarja, 17
- Vertailutesti, 15
- Weierstrassin M -testi, 17
- Yhdesti yhtenäinen alue, 9
- Yleistetty Cauchyn integraalikaava, 13
- Yläraja-arvo, 19
- Äärioviiva, 2
 - pituus, 3
 - suljettu, 2
 - vastakkaissuuntainen, 2
 - yksinkertainen suljettu, 2
- Äärioviivaintegraali, 6