

1. Esitä funktio $z(s, t)$, joka deformerii jatkuvasti silmukan Γ_0 silmukaksi Γ_1 alueessa D , missä Γ_0 on ellipsi $x^2/4 + y^2/9 = 1$ kuljettuna kerran vastapäivään alkaen pisteestä $(2, 0)$, Γ_1 on ympyrä $|z| = 1$ kuljettuna kerran vastapäivään alkaen pisteestä $(1, 0)$ ja D on rengasalue $1/2 < |z| < 4$. *Vihje:* Tarkastele silmukan Γ_0 parametrisointia $x(t) = 2 \cos(2\pi t)$, $y(t) = 3 \sin(2\pi t)$, missä $0 \leq t \leq 1$.

* * *

Valitaan

$$z(s, t) = (2 - s) \cos(2\pi t) + (3 - 2s) \sin(2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

2. Olkoon C ympyrä $|z| = 2$ kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan. Laske:

$$(a) \quad \int_C \frac{\sin(3z)}{z - \frac{\pi}{2}} dz, \quad (b) \quad \int_C \frac{5z^2 + 2z + 1}{(z - i)^3} dz, \quad (c) \quad \int_C \frac{\sin(z)}{z^2(z - 4)} dz.$$

* * *

Yleistetyn Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (1)$$

kaikilla $n = 0, 1, \dots$, kun Γ on suljettu yksinkertainen positiivisesti suunnistettu käyrä, f on analyyttinen käyrällä Γ ja sen sisällä ja z_0 on käyrän Γ sisällä.

- (a) Nyt $z_0 = \pi/2 < 2$, joten z_0 on käyrän C sisällä. Lisäksi

$$f(z) = \sin(3z)$$

on kokonainen. Siis

$$\int_C \frac{\sin(3z)}{z - \frac{\pi}{2}} dz = \frac{2\pi i}{0!} f(\pi/2) = 2\pi i \sin(3\pi/2) = \underline{\underline{-2\pi i}}.$$

- (b) Nyt $z_0 = i$ on käyrän C sisällä. Lisäksi

$$f(z) = 5z^2 + 2z + 1$$

on kokonainen. Siis

$$\int_C \frac{5z^2 + 2z + 1}{(z - i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(i) = \pi i \cdot 10 = \underline{\underline{10\pi i}}.$$

(c) Nyt $z_0 = 0$ on käyrän C sisällä, mutta $z_1 = 4$ on käyrän C ulkopuolella. Siis

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z - 4}$$

on analyyttinen käyrällä C ja sen sisällä. Hieman suurempi analyyttisyysalue on kiekko $D(0, 3) \not\ni 4$. Lasketaan valmiiksi

$$f'(z) = \frac{\cos(z)}{z - 4} - \frac{\sin(z)}{(z - 4)^2}.$$

Siis

$$\int_C \frac{\sin(z)}{z^2(z - 4)} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \frac{\cos(0)}{0 - 4} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}i}}.$$

Ylimääräistä pohdintaa. Jos $z_0 = 0$ ja Γ on 0-keskinen r -säteinen ympyrä, niin kaavassa (1) voidaan valita $z(t) = re^{it}$, jolloin

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{(re^{it})^n} dt.$$

Siis Maclaurinin sarjan kerroin $f^{(n)}(0)/n!$ on funktion $f(z)/z^n$ keskiarvo ympyrällä $|z| = r$.

3. Laske

$$\int_C \frac{z + i}{z^3 + 2z^2} dz,$$

missä C on

- (a) ympyrä $|z| = 1$ kuljettuna kerran vastapäivään;
- (b) ympyrä $|z + 2 - i| = 2$ kuljettuna kerran vastapäivään;
- (c) ympyrä $|z - 2i| = 1$ kuljettuna kerran vastapäivään.

* * *

Olkoon laskettava integraali I . Integrandina on $(z + i)/z^2(z + 2)$, jonka nimittäjän nollakohtina on $z_0 = 0$ ja $z_1 = -2$, joten merkitään

$$f(z) = \frac{z + i}{z^2} \quad \text{ja} \quad g(z) = \frac{z + i}{z + 2}, \quad \text{jolloin} \quad g'(z) = \frac{1}{z + 2} - \frac{z + i}{(z + 2)^2}.$$

(a) Piste $z_0 = 0$ on käyrän C sisäpuolella ja $z_1 = -2$ ulkopuolella. Kaavan (1) nojalla

$$I = \frac{2\pi i}{1!} g'(0) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \pi i}}.$$

(b) Piste $z_0 = 0$ on käyrän C ulkopuolella ja $z_1 = -2$ on käyrän C sisäpuolella. Kaavan (1) nojalla

$$I = \frac{2\pi i}{0!} f(-2) = 2\pi i \frac{-2+i}{(-2)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} - \pi i}}.$$

(c) Pisteet $z_0 = 0$ ja $z_1 = -2$ ovat käyrän C ulkopuolella. Siis laskettava integraali $I = 0$.

4. Olkoon f analyyttinen sekä suljetulla yksinkertaisella ääriviivalla Γ että sen sisällä. Osoita Luvun 1.5 tulosten avulla, että

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

kaikilla $z_0 \notin \Gamma$.

* * *

Derivaatalla f' on sama analyyttisyysalue kuin funktiolla f . Yleistetyn Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f'(z_0) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \quad (2)$$

kun Γ on positiivisesti suunnistettu ja z_0 on käyrän Γ sisällä. Jos Γ on negatiivisesti suunnistettu ja sillä on parametrisointi $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, niin $-\Gamma$, jolla on parametrisointi $z_1(t) = z(-t)$, $0 \leq t \leq 1$ on positiivisesti suunnistettu ja pätee

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = - \int_{-\Gamma} \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = - \int_{-\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz,$$

missä käytettiin kaavaa (2) käyrälle $-\Gamma$ tilanteessa jossa z_0 on käyrän $-\Gamma$ sisällä. Siis väitetty yhtäsuuruus pätee aina, kun z_0 on käyrän Γ sisällä. Jos taas z_0 on käyrän Γ ulkopuolella, niin molemmat integraalit ovat nollia ja siten yhtäsuuria.

5. Olkoon D kompleksitaso, josta on poistettu pisteet 0 , $2i$ ja 4 , ja olkoon Γ ääriviiva Kuvassa 1(a) (ks. Sivun 5, paperin toinen puoli). Mitkä seuraavista ääriviivoista voidaan jatkuvasti deformaatioksi Γ alueessa D :

(a) ääriviiva Γ_0 Kuvassa 1(a);

(b) ympyrä $|z| = 3$ kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan alkaen pisteestä $z = 3$;

- (c) ympyrä $|z| = 10^4$ kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan alkaen pisteestä $z = 10^4$;
 (d) ympyrä $|z - 2| = 1$ kuljettuna kerran positiiviseen suuntaan alkaen pisteestä $z = 3$.

* * *

- (a) Kyllä.
 (b) Ei. Piste 4 on käyrän ulkopuolella.
 (c) Ei. Piste 0 on käyrän ulkopuolella.
 (d) Ei. Piste 4 on käyrän ulkopuolella.

6. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz,$$

missä Γ on ympyrä $|z| = 4$ kuljettuna kahdesti myötäpäivään.

* * *

Olkoon γ yksi kierros ympyrää $|z| = 4$. Deformoidaan γ ”käsipainoksi”, jossa on ympyrät Γ_0 ja Γ_1 , jotka kiertävät pisteet -2 ja 1 , vastaavasti, sekä näitä ympyröitä yhdistävä jana kerran kumpaankin suuntaan. Saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz &= 2 \left(\int_{\Gamma_0} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz + \int_{\Gamma_1} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz \right) \\ &= 4\pi i \left(\frac{(-2)}{(-2)-1} + \frac{(1)}{(1)+2} \right) \\ &= \underline{\underline{4\pi i}}. \end{aligned} \quad (3)$$

7. Laske

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz,$$

missä Γ on ympyrä $|z| = 3$ kuljettuna kerran vastapäivään.

* * *

Merkitään integraalia kirjaimella I ja

$$f_a(z) = \frac{e^{iz}}{(z-a)^2} \quad \text{jolloin} \quad f'_a(z) = \frac{ie^{iz}}{(z-a)^2} - \frac{2e^{iz}}{(z-a)^3}.$$

Nyt integrandina on

$$\frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z+(-i))^2}.$$

Kumpikin pisteistä i ja $-i$ on käyrän Γ sisäpuolella. Deformoidaan Γ ”käsipainoksi”, jonka ympyrät sisältävät kukin täsmälleen yhden näistä pisteistä. Saadaan

$$I = 2\pi i (f'_i(-i) + f'_{-i}(i)) = -2\pi \frac{e^1 + e^{-1}}{-4} - 4\pi i \frac{e^1 - e^{-1}}{8} = \pi (\cosh(1) + \sinh(1)).$$

Meniköhän oikein?

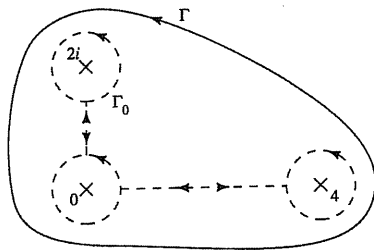
8. Mitkä seuraavista alueista ovat yhdesti yhtenäisiä:

- (a) vaakasuora kaistale $|\operatorname{Im} z| < 1$;
- (b) rengasalue $1 < |z| < 2$;
- (c) kompleksitaso pois lukien ei-positiivinen reaaliakseli;
- (d) ellipsin $4x^2 + y^2 = 1$ sisäosa;
- (e) ellipsin $4x^2 + y^2 = 1$ ulko-osa;
- (f) alue D Kuvassa 1(b).

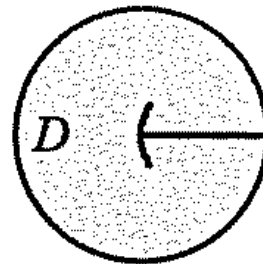
* * *

Yhdesti yhtenäisiä: a, c, d, f.

Eivät yhdesti yhtenäisiä: b, e.



(a) Ääriveriiva Tehtävässä 5.



(b) Onko D yhdesti yhtenäinen?

Kuva 1: Tehtävissä tarvittavat kuvat.