

1. Olkoon f yksikkökierokossa $\mathbb{D}$ analyyttinen funktio, jolle pätee $|f(z)| < 1/(1 - |z|)$ kaikilla $z \in \mathbb{D}$. Osoita, että

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n(1-R)}, \quad 0 < R < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Millä arvolla R yläraja on pienimmillään?

* * *

Valitaan ääriviivaksi Γ positiivisesti suunnistettu ympyrä $C(0, R) = \{z \in \mathbb{D} : |z| = R\}$, $0 < R < 1$. Yleistetyn Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - 0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Näin ollen Lauseen 1.2.11 nojalla

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(0)| &= \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| \int_{\Gamma} |d\xi| \\ &\leq \max_{|z|=R} |f(z)| \max_{|z|=R} \frac{1}{|z|^{n+1}} \int_{\Gamma} |d\xi| \\ &\leq \frac{1}{1-R} \cdot \frac{1}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{1}{R^n(1-R)}, \quad 0 < R < 1, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1}$$

Yläraja on pienimmillään, kun nimittäjä $h(R) = R^n(1-R) = R^n - R^{n+1}$ on suurimmillaan. Tämä tapahtuu derivaatan

$$h'(R) = nR^{n-1} - (n+1)R^n = R^{n-1}(n - (n+1)R)$$

nollakohdassa $R = \frac{n}{n+1}$. Tällä arvolla R pätee

$$h\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{n+1} \left[= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right].$$

Siis

$$\frac{1}{R^n(1-R)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) \sim e(n+1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Tässä $a(n) \sim b(n)$ tarkoittaa sitä, että $\lim_{n \rightarrow \infty} a(n)/b(n) = 1$.

2. Etsi kiekossa $D(0, R)$ analyyttiset funktiot, joille $f(0) = i$ ja $|f(z)| \leq 1$ kaikilla $z \in D(0, R)$.

* * *

Siis

$$|f(z)| \leq 1 = |i| = |f(0)|, \quad z \in D(0, R),$$

eli $|f(z)|$ saavuttaa maksiminsa alueen $D(0, R)$ sisällä. Maksimiperiaatteen (Lause 1.6.5) nojalla f on vakio eli $f(z) = i$ kaikilla $z \in D(0, R)$.

3. Olkoon f analyyttinen rajoitetussa alueessa D , ja jatkuva sekä alueessa D että sen reunalla. Jos f on nollasta poikkeava alueessa D , osoita että $|f(z)|$ saa pienimmän arvonsa alueen D reunalla. *Vihje:* Tarkastele funktiota $1/f$.

* * *

Jos f on vakio, niin väite on triviaali. Oletetaan, että f ei ole vakio.

Koska $|f|$ on jatkuva kompaktissa (suljettu ja rajoitettu) joukossa $D \cup \partial D$, niin se saavuttaa pienimmän arvonsa $c \in [0, \infty)$ jollakin $z_0 \in D \cup \partial D$. Tulee vielä osoittaa, että $z_0 \in \partial D$. Oletuksen nojalla $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$, mutta luonnollisesti voi olla $f(z_0) = 0$.

Tapaus 1. Oletetaan, että $|f(z_0)| = c = 0$. Tällöin, koska $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$, täytyy olla $z_0 \in \partial D$.

Tapaus 2. Oletetaan, että $c > 0$. Olkoon $g(z) = 1/f(z)$, jolloin funktion $|g(z)|$ maksimi joukossa $D \cup \partial D$ on $|g(z_0)| = 1/c$. Koska g on analyyttinen alueessa D ja ei-vakio, niin maksimiperiaatteen nojalla z_0 ei voi olla alueen D sisällä. Siis $z_0 \in \partial D$.

4. Olkoot $a, b \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\max_{|z| \leq 1} |az^n + b| = |a| + |b|$.

* * *

Jos $a = 0$, niin väite on triviaali. Oletetaan, että $a \neq 0$. Tällöin

$$|az^n + b| \leq |az^n| + |b| = |a||z|^n + |b| \leq |a| + |b|, \quad |z| \leq 1.$$

Tulee vielä osoittaa, että $|az_0^n + b| = |a| + |b|$ jollakin $|z_0| \leq 1$. Huomataan, että

$$|az^n + b| = |a| \left| z^n + \frac{b}{a} \right|,$$

joten luvuille z^n ja b/a täytyy saada sama argumentti. Merkitään siis $b/a = re^{i\theta}$ ja valitaan $z_0 = e^{i\theta/n}$. Nyt

$$|az_0^n + b| = |a| |e^{i\theta} + re^{i\theta}| = |a|(1 + r) = |a| + r|a| = |a| + |b|.$$

5. Todista seuraava väite: Jos $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ suppenee, niin tällöin $c_j \rightarrow 0$ kun $j \rightarrow \infty$.
Vihje: Tarkastele osasummien erotusta $S_n - S_{n-1}$.

* * *

Oletuksen nojalla osasummille $S_n = \sum_{j=0}^n c_j$ pätee $S_n \rightarrow S \in \mathbb{C}$, kun $n \rightarrow \infty$. Näin ollen $c_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$, kun $n \rightarrow \infty$.

6. Osoita, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ hajaantuu, kun $|c| \geq 1$.

* * *

Oletetaan, että $|c| \geq 1$. Tällöin $c^j \not\rightarrow 0$, kun $j \rightarrow \infty$. Edellisen tehtävän nojalla sarja $\sum_{j=0}^{\infty} c^j$ hajaantuu.

7. Etsi suhdetestin avulla kompleksitason alueet, jossa seuraavat funktiotermiset sarjat suppenevat:

- (a) $\sum_{j=1}^{\infty} jz^j$,
 (b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{2^k}$,
 (c) $\sum_{k=0}^{\infty} (z+5i)^{2k}(k+1)^2$.

* * *

- (a) Olkoon $c_j = jz^j$, missä $z \in \mathbb{C}$ ja $j \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\left| \frac{c_{j+1}}{c_j} \right| = \frac{(j+1)|z|^{j+1}}{j|z|^j} = \frac{j+1}{j}|z| \rightarrow |z| = L, \quad j \rightarrow \infty.$$

Jos $L = |z| < 1$, niin suhdetestin nojalla sarja $\sum_{j=1}^{\infty} jz^j$ suppenee. Jos $|z| \geq 1$, niin sarjan yleinen termi $c_j \not\rightarrow 0$, kun $j \rightarrow \infty$, ja siten sarja hajaantuu.
Vastaus: alue $|z| < 1$.

- (b) Merkitään $w = z - i$ ja $c_k = (w/2)^k$. Nyt

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \frac{|w|}{2} = L, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Suhdetestin nojalla sarja suppenee, kun $L < 1$, eli kun $|z - i| = |w| < 2$. Suhdetestin nojalla sarja suppenee, kun $L > 1$, eli kun $|z - i| = |w| > 2$. Rajatilanteessa $L = 1$ pätee $|c_k| = 1 \not\rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$, joten tehtävän 5 nojalla sarja hajaantuu.
Vastaus: alue $|z - i| < 2$.

- (c) Merkitään $w = z + 5i$ ja $c_k = w^{2k}(k+1)^2$. Nyt

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \left| \frac{w^{2k+2}(k+2)^2}{w^{2k}(k+1)^2} \right| = |w|^2 \frac{(k+2)^2}{(k+1)^2} \rightarrow |w|^2 = L, \quad k \rightarrow \infty.$$

Jos $L < 1$, niin sarja suppenee. Muuten $c_k \not\rightarrow 0$, kun $k \rightarrow \infty$ ja sarja hajaantuu.
Vastaus: alue $|z + 5i| < 1$.

8. Todista, että $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}$ suppenee kun $p > 1$. *Vihje:* Tulkitse integraali $\int_1^N x^{-p} dx$ ja summa $\sum_{j=2}^N j^{-p}$ pinta-aloina, ja vertaa.

* * *

Huomataan, että

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \sum_{j=1}^{N-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x^p} dx.$$

Summan sisällä olevaa integraalia voidaan arvioida alaspäin. Koska $1/x^p$ on vähenevä, niin

$$\int_j^{j+1} \frac{1}{x^p} dx \geq \left(\min_{j \leq x \leq j+1} \frac{1}{x^p} \right) \int_j^{j+1} dx = \frac{1}{(j+1)^p} \cdot 1 = \frac{1}{(j+1)^p}.$$

Saadaan siis

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \sum_{k=1}^{N-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x^p} dx \geq \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{(j+1)^p} = \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^p}.$$

Arvoilla $p \neq 1$ pätee

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \left[\frac{-1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_{x=1}^N = \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{N^{p-1}} \right) \rightarrow \frac{1}{p-1},$$

kun $N \rightarrow \infty$. Siis aidosti kasvava jono (S_N) , missä

$$S_N = \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^p}, \quad N \in \mathbb{N},$$

on ylhäältä rajoitettu ja siten suppenee. Siis $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-p}$ suppenee ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \leq \frac{1}{1^p} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = 1 + \frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}.$$

Lisäpohdintana voisi huomata, että

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \sum_{j=1}^{N-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \sum_{j=1}^{N-1} \left(\max_{j \leq x \leq j+1} \frac{1}{x^p} \right) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{j^p}$$

ja siten

$$\frac{1}{p-1} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^p} \leq \frac{p}{p-1}.$$