

Eukleideen Alkeiden ensimmäisestä kirjasta

Juha-Matti Huusko

23. marraskuuta 2009

Antiikin Kreikkalainen geometrikko Eukleides kirjoitti geometrian teoksen Alkeet joskus vuoden 300 eKr. tienoilla.

Teosta ei ole suomennettu kokonaan. Englanniksi sen on kääntänyt esimerkiksi Sir Thomas L. Heath.

1 Määritelmiä

- *Piste* on se, jolla ei ole osia.
- *Viiva* on leveydetön pituus. Viivan päät ovat pisteitä.
- *Suora viiva* on viiva, jonka pisteet ovat tasaisesti toistensa välissä. *Suora* ja *jana* ovat suoraa viivoja.
- Jos suoran kohdatessa suoran muodostuvat kulmat ovat yhtä suuria, kulmat ovat *suoria kulmia*. Edelleen suorat ovat toistensa *normaaleja*.

- *Ympyrä* on viiva, jonka pisteistä erääseen pisteeseen piirretyt suorat viivat ovat yhtä pitkiä. Mainittu piste on ympyrän *keskipiste*.
- *Tasasivuisen* kolmion sivut ovat yhtä pitkiä. *Tasakylkisessä* kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua. Tasakylkisen kolmion kolmatta sivua sanotaan kolmion *kannaksi* ja kannan viereisiä kulmia *kantakulmiksi*. Jos kolmion sivut ovat kaikki eri pituisia, kolmio on *erisivuinen*.

2 Aksiomia

Vaaditaan, että:

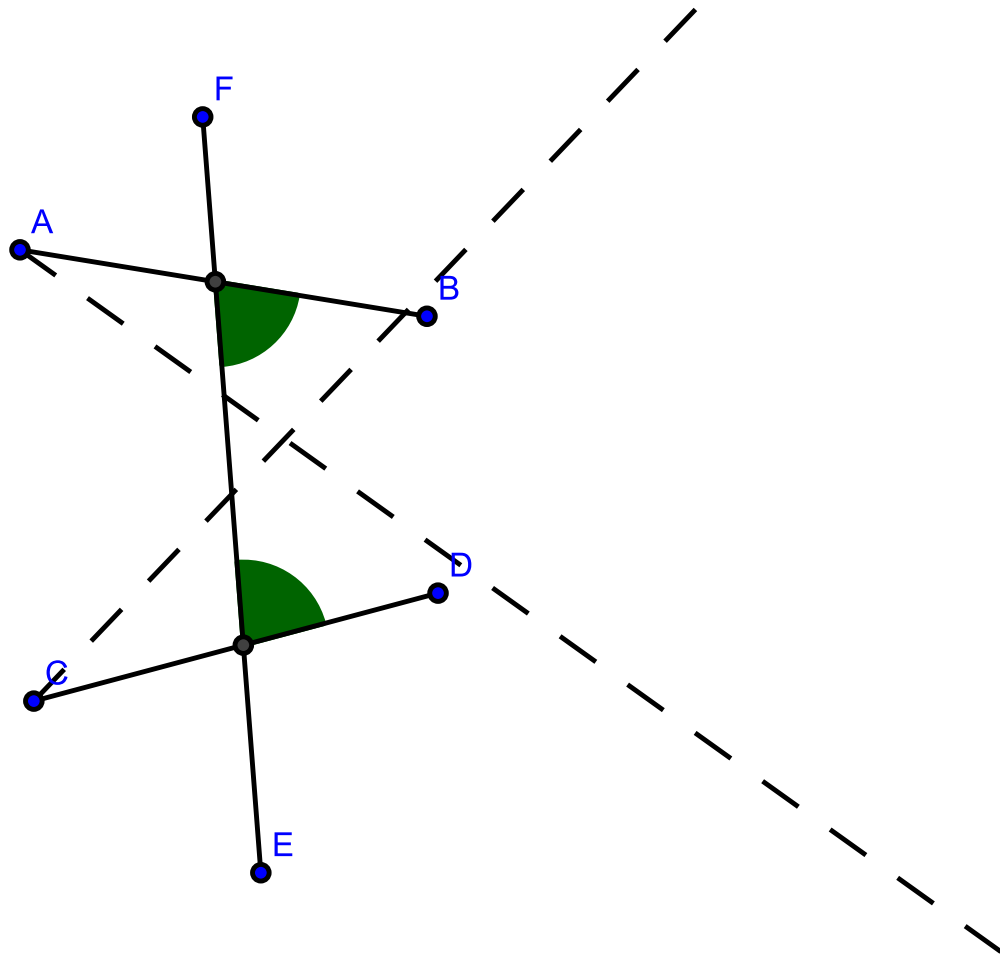
- (i) Mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää janalla.
- (ii) Mitä tahansa janaa voidaan jatkaa niin pitkäksi kuin halutaan.
- (iii) Mikä tahansa piste keskipisteenä ja mikä tahansa jana säteenä voidaan piirtää ympyrä.
- (iv) Kaikki suorat kulmat ovat samanlaisia.

Viidettä aksiomaa kutsutaan paralleeliaksiomaksi.

(v) Oletetaan, että suora leikkaa kahta muuta suoraa.

Oletetaan lisäksi, että leikkaavan suoran toisella puolella muodostuneet sisemmät kulmat ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa.

Tällöin jatkettaessa leikattuja suoria kyseessä olevalla puolella, ne lopulta leikkaavat.

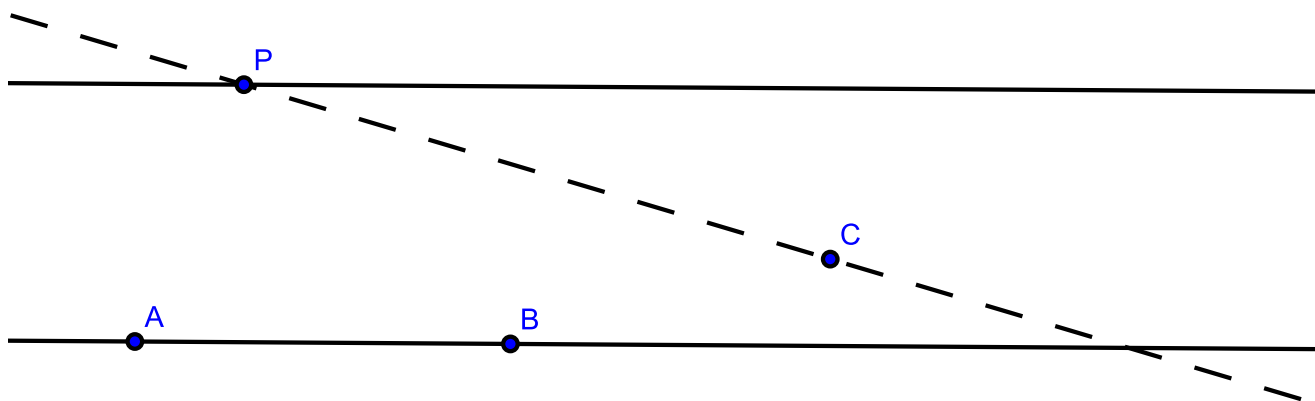


Kuva 1: Paralleeliaksioma

Playfairin aksiooma on yhtäpitävä edellisen
paralleeliaksiooman kanssa.

Määritelmä *Suora* on äärettömän pitkä suora viiva.
Yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa toisiaan.

Playfair: Olkoon annettuna suora ja suoran
ulkopuolinen piste. Pisteen kautta voidaan piirtää
täsmälleen yksi annetun suoran kanssa yhdensuuntainen
suora.

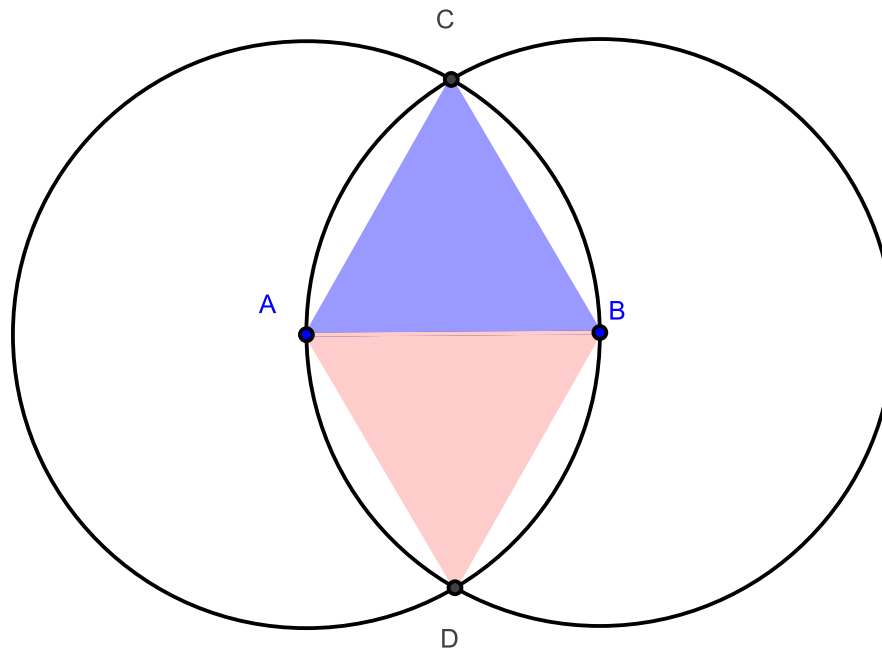


Kuva 2: Playfairin aksiooma

Hyväksytään seuraavat asiat.

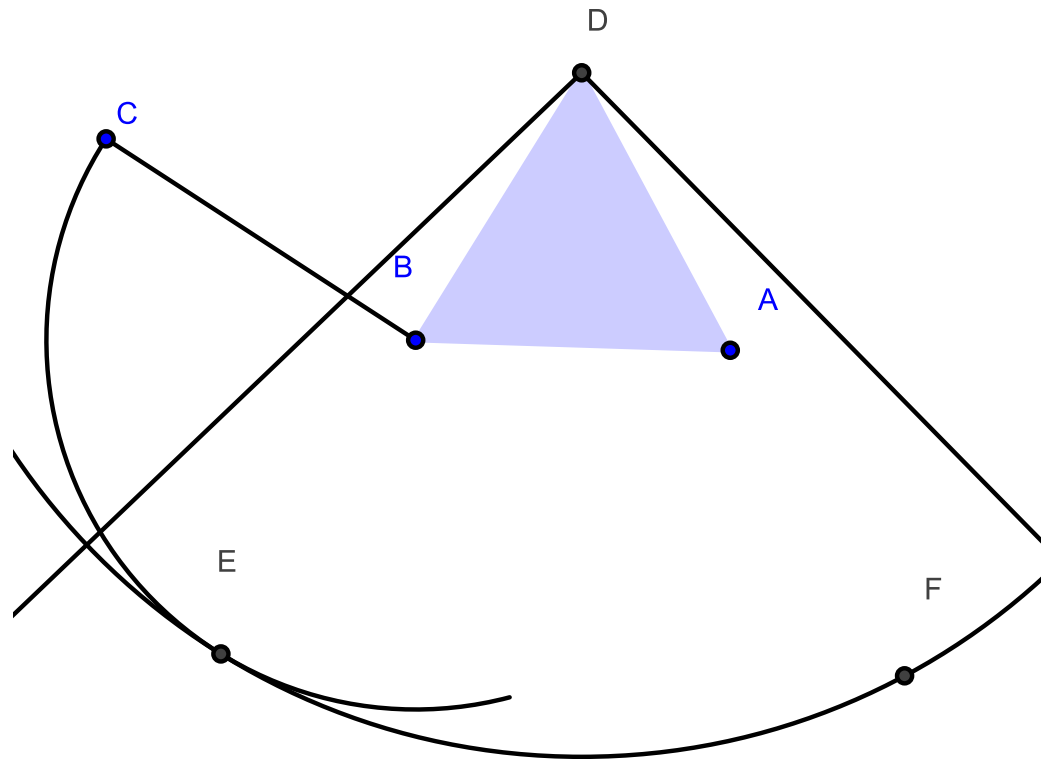
1. Jos jotkin ovat saman kanssa samat, ne ovat myös keskenään samat ($A = C$ ja $B = C \Rightarrow A = C$).
2. Jos yhtä suuriin lisätään yhtä suuret, saadaan yhtä suuret.
3. Jos yhtä suurista vähennetään yhtä suuret, saadaan yhtä suuret.
4. Jos jotkin saadaan siirtämällä kohtaamaan joka kohdassa, ne ovat yhtä suuret.
5. Kokonainen on suurempi kuin osa.

Tehdään tasasivuinen kolmio, jolla on annettu sivu.



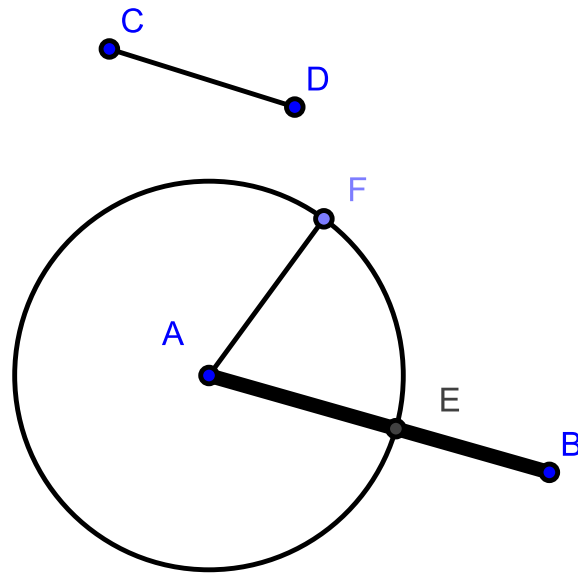
Kuva 3: Tasasivuisen kolmion konstruktio

Siirretään annettu jana alkamaan annetusta pisteestä.



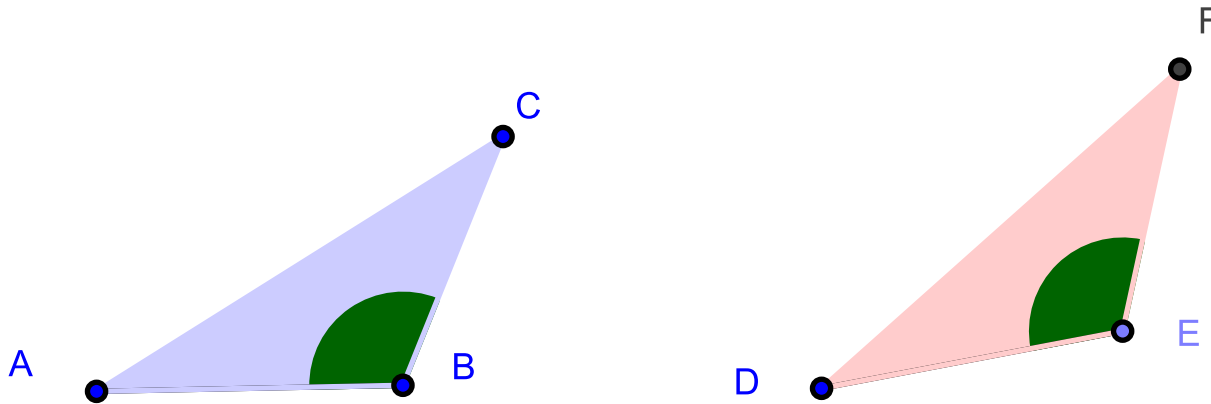
Kuva 4: Janan siirtäminen

Olkoon annettuna kaksi eri pituista janaa. Leikataan pitemmästä lyhyemmän pituinen.



Kuva 5: Leikataan janasta jana

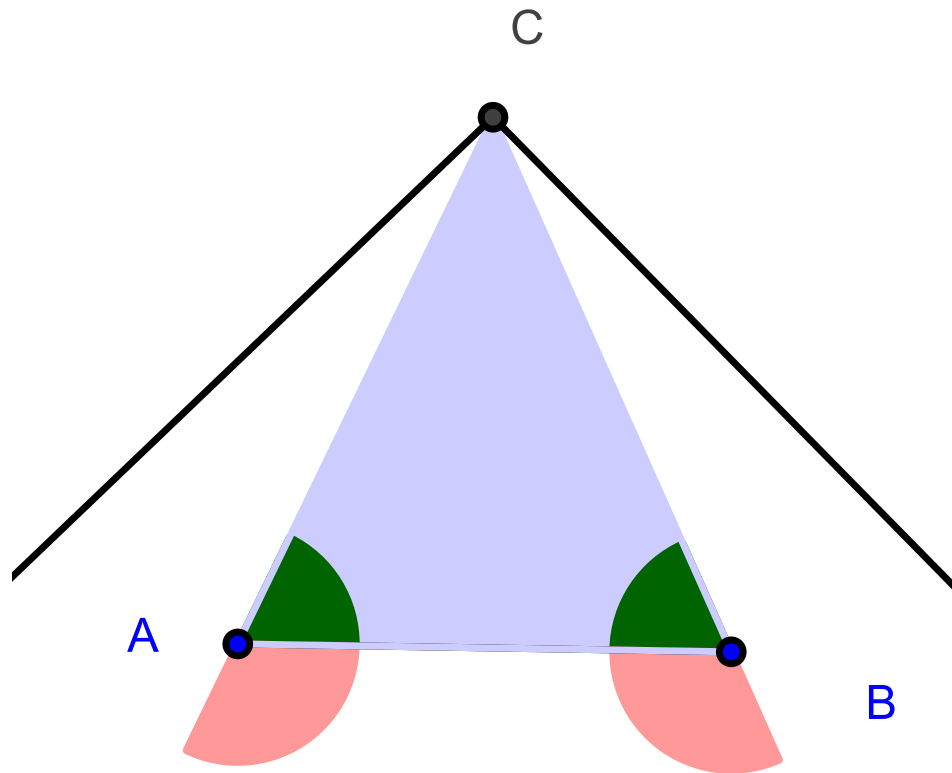
Lause (SKS) Jos kahdessa kolmiossa kaksi sivua ovat parittain yhtä suuret ja sivujen väliset kulmat ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhtenevät.



Kuva 6: Yhtenevyyslause SKS

Thales Miletoslainen on ensimmäisiä antiikin Kreikan matemaatikkoja, jonka tiedetään henkilönä varmasti olleen olemassa. Seuraava lause liitetään usein häneen.

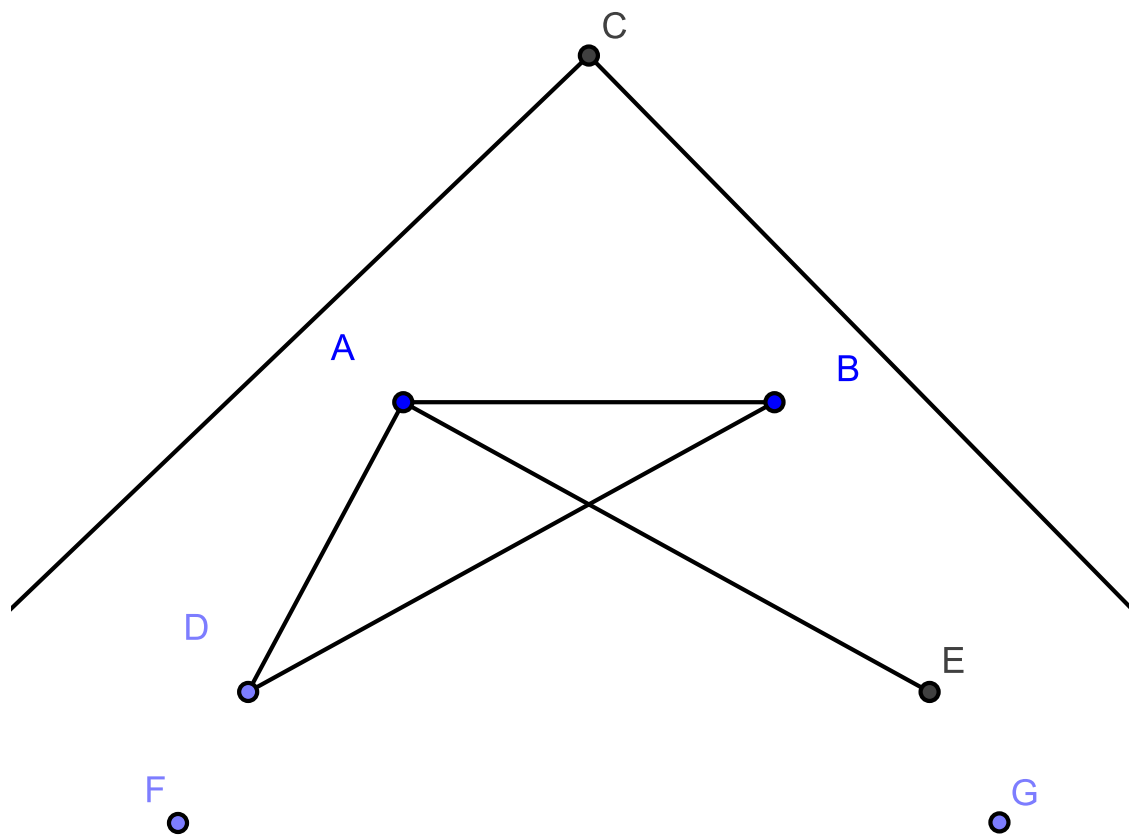
Lause (Thaleen kantakulmalause) Tasakylkisessä kolmiossa ovat kantakulmat yhtä suuret. Samoin ovat kolmion kannan ulkokulmat.



Kuva 7: Thaleen kantakulmalauser

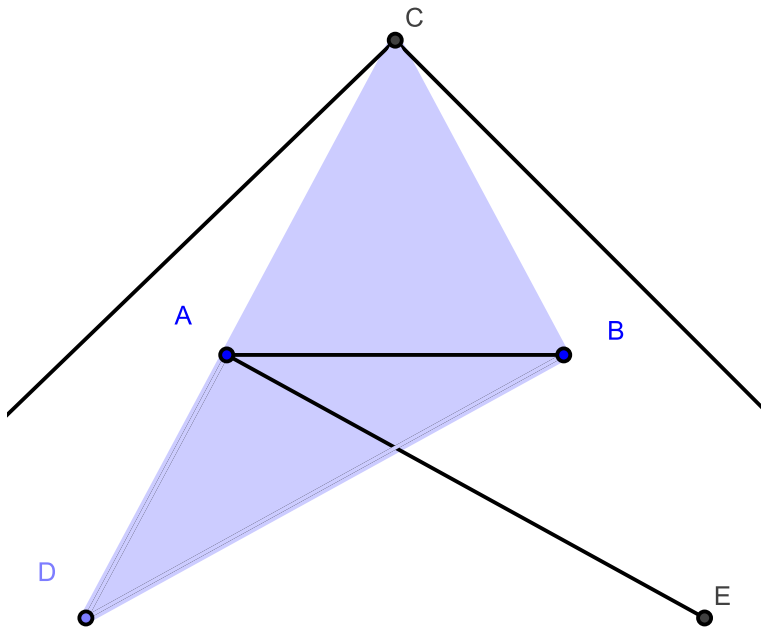
Kantakulmien yhtäsuuruus saadaan helposti toteamalla, että Lauseen (SKS) mukaan kolmiot ACB ja BCA ovat yhtenevät ja vastinosina kulmat BAC ja ABC ovat yhtäsuuret.

Piirretään apukuvio, jotta saadaan todistettua väitteen toinen osa.

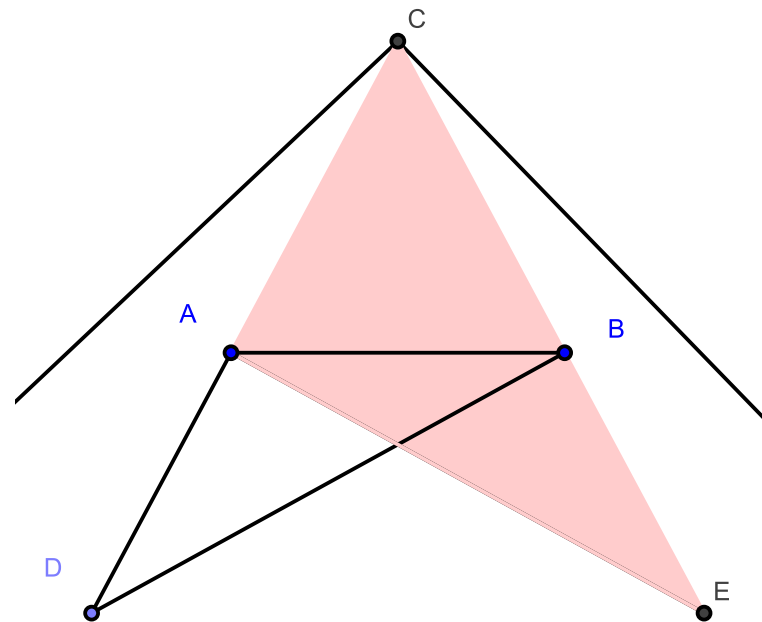


Kuva 8: Apukuvio

Kolmio DCB

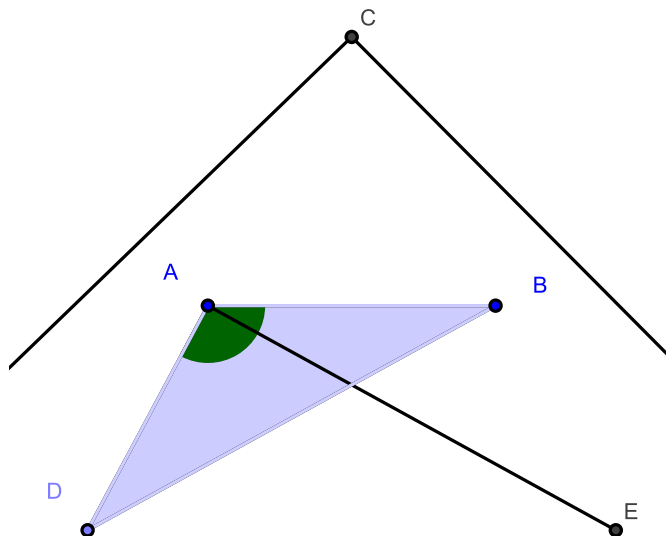


Kolmio ECA

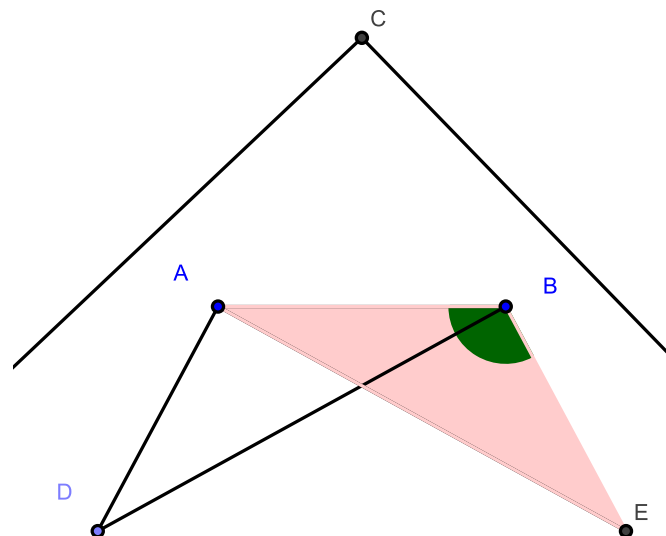


Kuva 9: Ensimmäinen yhtenevyys

Kolmio DAB



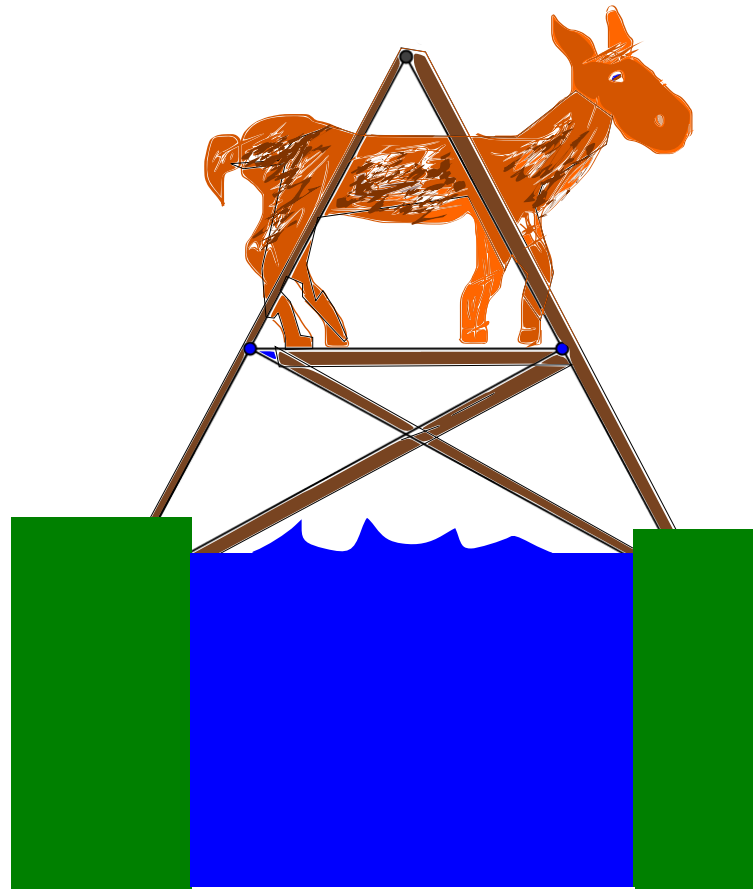
Kolmio EBA



Kuva 10: Toinen yhtenevyys

Vastinosina kulmat DAB ja EBA ovat yhtä suuret.
Tämä oli toinen puoli väitteestä.

Tätä Alkeiden lausetta kutsutaan Pons Asinorumiksi eli Aasien sillaksi. Nimitys saattaa tulla todistuksen väitetyistä vaikeudesta tai siitä, että todistuksessa käytettävä apukuvio näyttää sillalta. Liekö tämä yleisemminkin keskusteluissa käytettävän ilmauksen "Aasin siltaa pitkin"syntyperä?



Kuva 11: Aasi sillalla