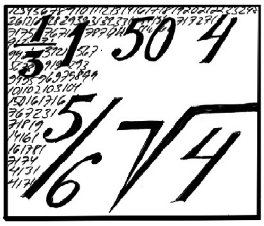

Päättelyä ja laskemista

Juha-Matti Huusko
Itä-Suomen yliopisto
juha-matti.huusko@uef.fi

Matematiikan ongelmia ratkottaessa tarvitaan usein sekä päättelyä että laskemista. Työvaiheet ovat siinä mielessä toisiaan täydentäviä, että jos päättelee enemmän, jää laskettavaa vähemmän.

Tarkoitan päättelyllä tässä yhteydessä sitä, että ongelmasta tunnistetaan ominaisuuksia, joilla ongelmaa voidaan yksinkertaistaa. Tällaisten ominaisuuksien tunnistaminen ei aina onnistu. Päättely vaatii siis mielikuvitusta ja kekseliäisyyttä.

Suoraviivaiset laskut ovat usein pitkiä, mutta niissä pärjää vähemmällä mielikuvituksella. Kunhan ratkaisutapa on tuttu, niin tietää, että pitkän laskeskelun lopuksi saa palkinnoksi ratkaisun selville.

Tarkastellaan esimerkkinä polynomitehtävää, jonka esitin ensimmäisen vuoden opiskelijoille syksyllä 2021.

Tehtävä. Etsi toisen asteen polynomi p, jonka kuvaaja $p(x) = y$ kulkee pisteiden $(1,4)$, $(3,4)$ ja $(4,7)$ kautta.

Jotta ratkaisussa pääsee alkuun, täytyy palauttaa mieleen, millainen toisen asteen polynomin lauseke on. Lausekkeenhan tosin pystyi kirjoittamaan muutamassa eri muodossa: aukikirjoitettuna, tekijöiden tulona tai neliöön täydennettynä. Muitakin muotoja taisi olla.

Annetuissa lähtötiedoissa pistävät silmään pisteet $(1,4)$ ja $(3,4)$. Näillähän on sama y-koordinaatti! Voisiko tätä käyttää jotenkin hyväksi?

Aloitetaan yksinkertaisimmasta ratkaisutavasta.

Ratkaisu 1. Siis $p(x) = ax^2 + bx + c$. Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} p(1) = a + b + c = 4 & \mid \quad R_1 \\ p(3) = 9a + 3b + c = 4 & \mid \quad R_2 \\ p(4) = 16a + 4b + c = 7 & \mid \quad R_3 \end{cases},$$

josta voidaan ratkaista **kolme** tuntematonta a, b ja c.

Lasketaan. Gaussin eliminoinnilla saadaan

$$\begin{cases} a + b + c = 4 & \mid \quad R_1 \\ - 6b - 8c = -32 & \mid \quad R_2' \leftarrow R_2 - 9R_1 \\ - 12b - 15c = -57 & \mid \quad R_3' \leftarrow R_3 - 16R_1 \end{cases}$$

ja edelleen

$$\begin{cases} a + b + c = 4 & \\ 3b + 4c = 16 & \mid \quad R_2'' \leftarrow -\frac{1}{2}R_2' \\ c = 7 & \mid \quad R_3'' \leftarrow R_3' - 2R_2' \end{cases}.$$

Siis $c = 7$ ja

$$b = \frac{16 - 4c}{3} = -4$$

ja $a = 4 - b - c = 1$.

Toisessa ratkaisutavassa voidaan käyttää hyödyksi pisteitä $(1,4)$ ja $(3,4)$, jotka sattuvat tässä tehtävässä olemaan erikoisia.

Ratkaisu 2. Polynomin p kuvaaja $p(x) = y$ on ylöspäin tai alaspäin avautuva paraabeli. Tällainen paraabeli on symmetrinen jonkin pystysuoran suhteen.

Pisteillä $(1,4)$ ja $(3,4)$ on yhtä suuri y-koordinaatti, joten näiden pisteiden keskinormaali $x = 2$ on mainittu paraabelin symmetria-akseli. Siis polynomin kuvaaja on paraabeli, jonka huippu on suoralla $x = 2$, joten $p(x) = A(x-2)^2 + B$. Pisteiden $(1,4)$ ja $(4,7)$ avulla saadaan määrättyä **kaksi** tuntematonta A ja B.

Sijoitetaan annettuja pisteitä kaavaan $p(x) = y$, saadaan

$$\begin{cases} p(1) = \ \ A + B = 4 \\ p(3) = \ \ A + B = 4 \\ p(4) = 4A + B = 7 \end{cases}.$$

Lasketaan. Nähdään, että ensimmäinen ja toinen yhtälö ovat samoja. Tämä johtuu siitä, että pisteitä $(1,4)$ ja $(3,4)$ käytettiin jo hyväksi huipun paikkaa määrätessä. Vähentämällä kolmannesta yhtälöstä ensimmäinen saadaan $3A = 3$ eli $A = 1$. Nyt ensimmäisen yhtälön perusteella $B = 4 - A = 3$. Siis

$$p(x) = (x-2)^2 + 3 = x^2 - 4x + 7.$$

Kolmannessa ratkaisutavassa pisteitä $(1,4)$ ja $(3,4)$ voidaan käyttää hyväksi vielä vähän nokkelammin.

Ratkaisu 3. Polynomi on $p(x) = 4 + q(x)$, missä $q(1) = q(3) = 0$. Siis $p(x) = 4 + K(x-1)(x-3)$. Tuntematon **yksi** vakio K saadaan selville pisteen $(4,7)$ avulla.

Pisteistä $(1,4)$ ja $(3,4)$ ei ole nyt hyötyä: kaava $p(x) = 4 + K(x-1)(x-3)$ tuottaa arvoilla $p(1) = p(3) = 4$, mikä jo tiedetään.

Lasketaan. Käyttämällä pistettä $(4,7)$ hyödyksi saadaan

$$p(4) = 4 + K \cdot 3 \cdot 1 = 7,$$

joten $K = 1$. Siis $p(x) = x^2 - 4x + 7$.

Johtopäätös. Mitä enemmän päättelee, sitä vähemmän laskemista jää. Ratkaisussa 1 täytyi selvittää kolme tuntematonta. Ratkaisussa 3 tuntemattomia oli enää vain yksi.

Mainittakoon, että voidaan myös löytää kaava, joka antaa suoraan polynomin lausekkeen, kun siihen sijoitetaan annettujen pisteiden x- ja y-koordinaatit. Tällainen kaava voidaan antaa useassa eri muodossa, kuitenkaan sen löytäminen ei ole aivan helppoa.

Päättely vaatii mielikuvitusta ja keksimistä. Oikean niksin keksiminen on hyvin palkitsevaa. Samoin, jos voi ajatella ongelmaa "laatikon ulkopuolelta". Jätetään pohdittavaksi toinen tehtävä.

Tehtävä 2. Etsi toisen asteen polynomi p, jonka kuvaaja kulkee pisteiden $(1,4)$, $(3,3)$ ja $(4,7)$ kautta. Voitko löytää useamman kuin yhden tällaisen polynomin?