

# Platon

Matematiikan historian essee  
Juha-Matti Huusko  
175783  
Itä-Suomen yliopisto  
1. toukokuuta 2011

## 1. Platonin elämä pähkinänkuoressa

Platon (427 - 347) oli antiikin kreikkalainen filosofi. Platon syntyi yläluokkaiseen sukuun ja nuorena hän aikoi ryhtyä poliitikoksi, mutta tutustuttuaan Sokrateeseen, hän ryhtyi tämän oppilaaksi ja omistautui filosofialle. [6][1]

Platon kirjoitti ajatuksiaan dialogeiksi, vuoropuheluiksi, joissa antiikin kreikkalaiset keskustelivat asioista. Oletettavasti osa keskustelijoiden ajatuksista on Platonin omia, vaikka keskustelijat ovat oikeasti Platonin aikaan eläneitä ihmisiä. Keskustelut käydään erilaisissa paikoissa: voimistelusalissa, juhlassa, vankilassa tai kaupungin ulkopuolella kauniina kesäpäivänä puun alla. Keskusteluissa käsitellään monenlaisia asioita - on vaikea keksiä aihetta, jota Platon ei olisi käsitellyt. A.N. Whiteheadin mukaan koko länsimainen filosofia on joukko reunahuomautuksia Platonin teoksiin. Ehkä vallitsevina aiheina ovat hyvän, kauneuden, tiedon, argumentoinnin ja pätevien päättelyiden tekeminen. [1]

Platon perusti Ateenaan koulun, Akatemian. Platon osasi matematiikkaa ja hän muun muassa tutustui matematiikastaan kuuluisaan Pythagoralaiseen koulukuntaan Sisiliassa. Ehkä tämän vuoksi Platonin teoksissa on matemaattisia aineksia ja aiheita jäsenellään matemaattisilla analogioilla. Voidaan melkein sanoa, että Platonille kaikki oli matematiikkaa. Ymmärtääkseni pythagoralaisien kirjoituksia ei ole säilynyt, mutta Platonin teoksista voi saada jonkinlaisen haalean käsityksen siitä, minkälainen matemaattinen maailmankuva heillä oli.

Platonin tärkeintä anti matematiikalle ja matematiikan historian tutkimukselle ovat käsittääkseni se, että Platon oli matemaatikko, vaati järkeviä päättelyitä joka paikassa, tutki tietoa ja oppimista, popularisoi matematiikkaa, tapasi pythagoralaiset ja kirjoitti paljon teoksia, jotka ovat säilyneet 2300 vuotta, koska niistä pidettiin.

## 2. Platon ja argumentointi

Egyptin ja Babylonian matemaatikot keksivät monia tuloksia, mutta eivät todistaneet matemaattisia lauseita. Joissakin tilanteissa esimerkiksi egyptiläiset tekivät virheitä yrittäessään yleistää tuloksia ja päättelyitä. Esimerkiksi puolisuunnikkaan ala voidaan laskea yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon ja puolisuunnikkaan korkeuden tulona. Egyptiläiset yrittivät laskea katkaistun kartion

tilavuuden vastaavanlaisella periaatteella, mutta epäonnistuivat kaavan muotoilussa.

Verrattuna Egyptiin ja Babyloniaan antiikin Kreikassa matematiikka oli täsmällisempää. Lauseita todistettiin ja matemaattinen teoria jäsenneltiin erottamalla aksiomat, määritelmät ja lauseet. Täsmällisyys saavutti huippunsa Eudoksoksen ja Eukleideen töissä.

Platonkin ruotii tiedon perusteita eri yhteyksissä. Joskus mainitaan, että antiikin Kreikan geometrian vaatimus konstruktioiden tekemiseen pelkästään harpilla ja viivoittimella voi olla lähtöisin Platonilta. [4] Platon yrittää teoksissaan nostaa geometrian kaltaiseen täsmällisyyteen argumentoinnin ja keskustelemisen. Platon kritisoi teoksissaan antiikin kreikkalaisia puhujia ja runoilijoita, jotka yrittävät vaikuttaa ihmisiin alku- ja loppusoinnuilla sekä puhumalla kauniisti. Monissa dialogeissa oikeaoppisilla menetelmillä keskustelevat filosofit saavat keskusteluvieraikeeseen puhujia, eristikkoja tai sofistreja, joiden päättelyissä on epätasällisyyksiä. Protagoras puhuu sofistina liian pitkiä puheenvuoroja, jotka ylikuormittavat kuulijoiden työmuistin. Hulvattomassa dialogissa Euthydemos eristikot Euthydemos ja Apollodoros käyttävät hyväksi kreikan kielen epätarkkoja ilmauksia ja pakottavat erään keskustelukumppaninsa myöntämään, että hänen isänsä on koira. Tämä mieletön päättely kuulostaa täysin johdonmukaiselta kreikan kielellä, kuten eräs puoliksi kyproslainen minulle vahvisti. Kaiken kaikkiaan Platonin dialogeista käy ilmi antiikin kreikkalaisten kyky loogiseen ajatteluun, joka mahdollisti matematiikan mestariteokset, kuten Eukleideen Alkeet. [1]

### 3. Platon ja oikean tiedon luonne

Platonin filosofian kuuluisin osa-alue on ideaoppi. Ideaopin mukaan suurimmalla osalla arkimaailman esineistä ja ilmiöistä on idea. [1] Esimerkiksi kissoja on monia erilaisia. Mikä tekee kissasta kissan? Jotta eläin olisi kissa, sillä pitää olla tiettyjä ominaisuuksia: neljä jalkaa, häntä, se sanoo miau. Kissan idea sisältää tällaiset kissan biologiset ominaisuudet, luonteen ja toimintamuodot. Kaikkia kissoja yhdistää kissuus - ne ovat osallisia kissan ideasta. Toisaalta myös ilmiöillä on ideat: on olemassa rakkauden idea, isyyden idea, hyvän idea jne.

Platonin filosofian mukaan arkielämän esineistä ei voida saada pysyvää tietoa tutkimalla itse esineitä vaan parempi tutkimuksen kohde ovat ideat. [1] Tämä johtuu

siitä, että arkimaailman esineet ovat jatkuvassa muutoksen tilassa. Jos lukija on ihminen, hänkin syö ruokaa ja hengittää hiilidioksidia sekä poistaa kuona-aineita, mikä kuuluu tavanomaiseen aineenvaihduntaan. Mutta jos lukija koostuu eri päivinä eri aineista - häneen tulee jotakin lisää ruoan mukana ja hänestä on lähtee jotakin pois - onko hän tänään sama ihminen kuin eilen? Jos lukija on joka päivä eri ihminen, kuinka hänestä voidaan sanoa mitään pysyvää? Herakleitoksen sanoin arkimaailmassa ”kaikki virtaa”. [2] ”Virtaamisen” voi ymmärtää seuraavasti: ihminen on koko ajan muuttumassa eli tulossa eri ihmiseksi - ihminen virtaa.

Jos lukija yrittää vääntää rautalangasta ympyröitä, niistä ei tule täydellisiä. Jos näistä ympyröistä yritetään mitata kehän suhdetta halkaisijaan, saadaan erilaisia lukuarvoja. Ehkä joku ympyröistä on hieman soikea ja halkaisijaksi voidaan mitata jossakin suunnassa 10 cm, kun taas kehän (ja käytetyn rautalangankätkän) pituus on 30 cm. Tällöin saataisiin piille (ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhde) arvo kolme. Toisessa ympyrässä pii voi olla neljä. Rautalankaympyröillä saataisiin joka kerta erilainen arvo piille ja mittauksissakin olisi aina jonkinlainen heittoa. Tarkoittaako tämä sitä, että pii ei ole vakio? Tarkoitaako tämä sitä, että matematiikassa asiat ovat joskus jollakin tavalla ja joskus toisella tavalla? Tarkoittaako tämä sitä, että matemaattiset totuudet ovat voimassa vain jonakin tiettyinä hetkenä? Oikeastaan se, että piille saadaan erilaisia arvoja johtuu siitä, että arkimaailma on epätarkka ja epätäydellinen.

Platonin mukaan saamme varmaa ja pysyvää tietoa tutkimalla esineiden ideoita. Kun matematiikassa yritetään määrittää piin arvoa, käytössä ovat täydelliset ympyrät. Ajatuksen voimalla (ja tietokoneilla, jotka ovat vain ajattelun apuvälineitä) piille voidaan löytää likiarvo vaikkapa kymmenen miljoonan desimaalin tarkkuudella. Ajatuksen voimalla voidaan myös todistaa, että pii on irrationaalijä transkendenttiluku. Matemaattisten olioiden muodostaman ”aineettoman maailman” täydellisyydestä antavat hyvän kuvauksen Armo Pohjanvirran lausahdukset ”Matematiikassa ei ole mitään rumaa, kaikki on kaunista” ja ”Tässä lähestymistavassa on pelkkää valoa ja rakkautta, kaikki on kaunista, mikään ei tee kipeää.” [7]

Asian valaisemiseksi vielä yhdellä tavalla oletetaan, että matemaatikko piirtää ympyröitä paperille. Oletetaan lisäksi, että hän kertoo tutkivansa ympyröitä ja häneltä kysytään, tutkiiko hän ideaalisia ympyröitä vai juuri niitä ympyröitä, jotka hän on piirtänyt paperille (mahdollisesti lyijykynällä A4-arkille). Uskon - niin kuin Platonkin varmaan uskoisi - matemaatikon valitsevan ensimmäisen vaihtoeh-

don. Paperille piirretyt ympyrät ovat vain ajattelun apuna ja todelliset ajattelun kohteet ovat matemaatikon mielessä.

#### 4. Platon ja määritelmät

Platonin dialogeissa keskustelijat pyrkivät löytämään tietyn ilmiön tai asian tarkan määritelmän. Nykymatematiikassa pyritään täsmällisyyteen käyttämällä tarkkoja määritelmiä, joten tässä suhteessa dialogien sisältö on hyvin matemaattisen kaltaista. Esimerkki kiintoisasta Platonin antamasta määritelmästä on ihmisen määritelmä. Määritelmään liittyy lisäksi huvittava kasku. Platonin aikaan eli filosofi Diogenes Koira. Diogenes oli hyvin epäsovinnainen: hän asui ruukussa, kulki ryysyissä ja masturboi julkisilla paikoilla. Kerrotaan, että kerran Platon oli oppilaineen saanut kehitettyä mielestään hyvän määritelmän ihmiselle: ihminen on kahdella jalalla kävelevä höyhenetön eläin. Kertoman mukaan Diogenes kyni kukon ja meni Platonin seurueen luokse pitäen kädessään tätä kukkoa ja sanoi ”tässä on Platonin ihminen”. Tämän jälkeen ihmisen määritelmä muutettiin muotoon: ihminen on kahdella jalalla kävelevä litteäkyntinen höyhenetön eläin. Tämä tarina osoittaa antaa esimakua dialogeissa käytetyistä määritelmistä ja osoittaa, että kreikkalaiset olivat loistavia kehittämään vastaesimerkkejä: Diogenes osoitti Platonin määritelmän heikkouden. Tämä on tärkeää antiikin Kreikan matematiikan ymmärtämisen kannalta. Muistaakseni joku nykymatematiikko on sanonut, että matematiikka on vastaesimerkkien keksimistä. [2]

#### 5. Platon ja pedagogiikka

Platonin teoksissa on paljon keskusteluja siitä, mitä tieto on ja miten voi oppia. Eräs matematiikan opettamiseen liittyvä kohta liittyy dialogista Menon. Kohdassa Sokrates keskustele orjan kanssa siitä, minkälainen neliö on pinta-alaltaan kaksinkertainen annettuun neliöön verrattuna. Sokrateen kysyttyä asiaa orjalta orja vastaa etsityn neliön olevan sellainen, jossa on kaksi kertaa niin pitkät sivut kuin annetussa neliössä. Pienellä tarkastelulla Sokrates ja orja näkevät, että tällainen neliö olisi pinta-alaltaan nelinkertainen. Vaiheittain etenemällä Sokrates ja orja löytävät oikean vastauksen. [1]

Mikäli keskustelu nähtäisiin oppimistilanteena, jossa Sokrates olisi opettaja ja orja olisi oppilas, Sokrateen ”opetus” olisi joidenkin nykyisten oppimisteorioiden mukaan nykyäänkin toimiva. Orja luulee aluksi tietävänsä vastauksen, mutta erehtyy.

Tästä syntyy hänelle kognitiivinen ristiriita - hän ei tiennytkään, mitä luuli tietävänsä - ja ongelma rupeaa mietityttämään häntä. Hän tulee ”raskaaksi tiedosta” ja Sokrates yrittää kyselemällä auttaa häntä löytämään oikean vastauksen. Sokrates ei kuitenkaan anna orjalle omia mielipiteitään, kaikki päättelyt ovat orjan itsensä tekemiä. Sokrates vain suuntaa orjan huomion oikeisiin paikkoihin. Orja konstruoi itse tiedon. Ristiriitatilanteet ja itsenäinen konstruointi ovat tärkeitä oppimisen kannalta. Asiasta voi lukea lisää esimerkiksi kirjasta [3].

## 6. Platon matematiikan popularisoijana

Platon tutustui pythagoralaisiin ja luultavasti tämän vuoksi Platonin teoksissa on paljon lukumystiikkaa sekä matemaatiikan kauneutta korostavia kohtia. Platonin nimi esimerkiksi liitetään usein viiteen säännölliseen monitahokkaaseen: kappaleita kutsutaan Platonin kappaleiksi. Nimitys johtuu siitä, että Platon kirjoittaa kappaleista dialogissaan Timaios. Dialogissa luonnonfilosofi Timaios antaa oman kuvauksensa maailman rakenteesta. Timaioksen mukaan aine koostuu jakamattomista hiukkasista (atomeja tai elementtejä). Hiukkasia on neljää tyyppiä: tuli, maa, ilma ja vesi. Näiden hiukkasten keskinäisiä vuorovaikutuksia selitetään sillä, että hiukkaset ovat monitahokkaita. Tuli vastaa tetraedria, maa kuutiota, ilma oktaedria ja vesi ikosaedria. Tetraedrin kulmat ovat terävämpiä kuin muissa monitahokkaissa. Tämän vuoksi tuli ”pistelee”. Dialogissa tehdään paljon vastaavantyyllisiä päättelyitä. Viides monitahokas, dodekaedri, on Timaioksen mukaan ollut Jumalalla apuna, kun hän on suunnitellut maailman. Timaios myös kuvailee monitahokkaiden kauneutta ja täten tuumii, että on luonnollista, että maailma on rakennettu kauneimmista perusraaka-aineista. [1]

Dialogissa Valtio Platon kuvailee mallin ihannevaltiosta. Ihannevaltiossa moni asia olisi järjestetty matemaattisten ihanteiden mukaisesti. Platonin mukaan ihannevaltiossa asuisi 5040 ihmistä. Näin sen takia, että  $5040 = 7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$  ja täten 5040 on jaollinen kaikilla luvuilla 1, 2, ..., 12 paitsi luvulla 11. Jaottomuus luvulla 11 on kuitenkin harmiton kauneusvirhe, sillä  $5038 = 11 \cdot 458$ . Jos jossakin tilanteessa kaupungin asukkaat pitäisi jakaa 11 ryhmään, jako ”menisi melkein tasan”. [1]

Mainittakoon kaksi yleistietämykseen kuuluvaa asiaa Valtiosta. Platon yritti huonolla menestyksellä toteuttaa ihannevaltionsa Syrakusassa. Platonin oppilas Dion nimittäin kutsui Platonin Syrakusaan opettamaan paikallista diktaattoria Diony-

siosta, jotta hänen valtakuntansa voisi hyvin. Dionysius kuitenkin suuttui Platonille ja Platonin piti paeta. [8] Joskus Valtio-dialogin on nähty lisäksi antavan huonoja vaikutteita ihmisille. Dialogin mukaan ihannevaltiossa harrastettaisiin eugeniikkaa (kaikki ihmiset eivät saa lisääntyä, heikot lapset tapetaan) kuten Natsi-Saksassa. On myös ajateltu, että Jokelan koulusurmaaja olisi saanut vaikutteita Platonin teoksista. [9] Minusta kuitenkin tuntuu, että Platonin teoksilla on positiivinen vaikutus ihmisiin, jos teokset ymmärtää oikein.

Diogenes Laertioksen kirjasta löytyy hienoin Platonista sanottu lausahdus, mikä tiedän. Ymmärtämistä auttaa tietää, että Foibos oli antiikin Kreikan jumalan Apollonin lisänimi ja että kreikkalaisen mytologian mukaan hänen poikansa Asklepios oli lääketaidon jumala. Lausahdus kertoo siitä, kuinka Platon pystyi tekemään ihmisistä parempia ja parantamaan heidän moraalikäsityksiään. Lausahdus kuuluu (melkein sanatarkasti):

”Kuinka muka voisi olla niin, että Foibos ei siittänyt Platonia Kreikassa? Sanotaanhan, että Asklepios parantaa ruumiin ja kuolemattoman sielun lääkärinä toimii Platon.” [2]

## Viitteet

- [1] Platon. Teokset 1 – 7. Otava, Keuruu, 1977 – 1990.
- [2] Laertios, D. *Merkittävien filosofien elämät ja opit*. Summa, Tallinna, 2002.
- [3] Haapasalo, L. *Oppiminen, tieto ja ongelmanratkaisu*. Medusa Software, Joensuu, 2001.
- [4] <http://www.mlahanas.de/Greeks/ArchimedesEquations.htm> (Luettu 30.4.2011.)
- [5] <http://plato.stanford.edu/entries/plato/> (Luettu 30.4.2011.)
- [6] <http://www.indiana.edu/~intell/plato.shtml> (Luettu 30.4.2011.)
- [7] <http://users.jyu.fi/~tuilmann/funktio/armo.html> Luettu 30.4.2011.)
- [8] <http://e-classics.com/dion.htm> (Luettu 30.4.2011.)
- [9] <http://www.hs.fi/kulttuuri/artikkeli/Platon+voi++panna+p%C3%A4%C3%A4n+sekaisin/HS20071118SI1KU019og> (Luettu 30.4.2011.)