Variaatiolasku kevät 2014

Laskuharjoitus 1

1. Todista variaatiolaskun peruslemma. Olkoon $I = [a, b]$, $f \in C(I)$ ja oletetaan, että

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad \text{kaikilla} \quad \varphi \in V_0 = \{y \in C^1(I) \,|\, y(a) = y(b) = 0\}$$

   Tällöin $f = 0$.

2. Olkoon annettu

$$J(y) = \int_1^2 (y')^2/x^3 \; dx$$

   Laske ekstremaalit. Laske ekstremaali joka toteuttaa ehdot $y(1) = 3$ ja $y(2) = -2$.

3. Olkoon

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_0^1 ((y')^2 + 2yy' + 2y' + 2y)dx$$

   Etsi J:n ekstremaali, joka toteuttaa tehtävään liittyvät luonnolliset reunaehdot. Miksi kyseinen ekstremaali ei voi olla ainakaan globaali minimi tai maksimi?

4. Etsi seuraavan kuvauksen ekstremaalit

$$J(y) = \frac{1}{2}\int_a^b ((y')^2 + y^2 + 2ye^x)dx$$

   Totea, että jos L on toisen asteen polynomi y:n ja y':n suhteen, niin Eulerin yhtälö on lineaarinen.

5. Olkoon $I = [0, x_1]$, $y \in C^1(I)$, $y(0) = 1$ ja $y(x_1) = y_1$. Oletetaan, että $x_1 > 0$ ja $y_1 > 0$. Funktion y määrittämä käyrä siis yhdistää tason pisteet $p = (0, 1)$ ja $q = (x_1, y_1)$. Kun käyrä pyöräytetään x - akselin ympäri syntyy pyörähdyspinta (y:n määrittämää käyrää sanotaan pyörähdyspinnan profiiliksi). Etsi sellainen käyrä joka minimoi pyörähdyspinnan pinta-alan. Totea, että seuraavat mahdollisuudet voivat esiintyä, riippuen pisteen q paikasta:

   - tehtävällä on 1, 2 tai ei yhtään (jatkuvaa) ekstremaalia, jotka toteuttavat vaaditut reunaehdot.