

Variaatiolasku

Laskuharjoitus 2

kevät 2014

1. Näytä, että jos Lagrangen funktio riippuu vain y' :sta, niin suorat ovat ekstremaaleja. Voiko olla myös muita ekstremaaleja?
2. Tarkastellaan seuraavaa kuvausta

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^b ((y')^2 + y^2 + 2y) dx$$

Asetetaan vasemmassa reunassa $y(0) = 2$, mutta oikea reuna b on vapaa. Etsi tämän tehtävän ekstremaali. Hahmottele saamaasi käyrää. Mikä on vastaava J :n arvo? Huomaa, että valitsemalla $b = 0$ saadaan heti $\inf J \leq 0$.

3. Tarkastellaan nyt hieman muunnettua tehtävää

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^b ((y')^2 - y^2 + 8(x-3)^3) dx$$

Valitaan nyt $y(0) = 0$ mutta b on edelleen vapaa. Etsi tämän tehtävän ekstremaalit. Mitkä ovat ekstremaaleja vastaavat J :n arvot?

4. Olkoon

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Etsi ekstremaali jolle pätee, että

- (i) $(a, y(a))$ on käyrällä $y = x^3 - 3x$
- (ii) $(b, y(b))$ on käyrällä $x = (y + 8)^2$

Onko ekstremaali yksikäsitteinen? Piirrä kuva.

5. Laske seuraavan tehtävän ekstremaalit ja mahdolliset kulmaekstremaalit.

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^4 - (y')^2) dx \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

Mikä on $\inf J$? Onko jokin saamasi ekstremaali globaali minimi?