

Variaatiolasku
Laskuharjoitus 3

kevät 2014

1. Olkoon Lagrangen funktio $L(x, y, y') = f(x, y)\sqrt{1 + (y')^2}$. Näytä, että transversaalisuusehto on tässä tapauksessa ortogonaalisuusehto. Siis ekstremaali leikkaa reunaehtokäyrän kohtisuoraan.

2. Olkoon

$$J(y) = \int_0^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx$$

Laske ekstremaali, kun $y(0) = 0$ ja $(b, y(b))$ on ympyrällä

$$(x - 9)^2 + y^2 = 9$$

Onko ratkaisu yksikäsitteinen?

3. Olkoon valon nopeus v_1 kun $y > x$ ja v_2 kun $y < x$. Mitä polkua pitkin valon säde etenee pisteestä $(-2, 2)$ pisteeseen $(3, 0)$?
4. Olkoon $y = (y_1, y_2)$ ja

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} (|y'|^2 + 2y_1y_2) dx$$

Etsi ekstremaali joka toteuttaa $y_1(0) = 0$, $y_2(\pi/2) = 1$ sekä asiaan kuuluvat luonnolliset reunaehdot.

5. Olkoon

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} ((y'')^2 - y^2 + x^2) dx$$

Etsi ekstremaali joka toteuttaa $y(0) = 1$, $y'(\pi/2) = 1$ sekä luonnolliset reunaehdot.