Variaatiolasku kevät 2014

Laskuharjoitus 4

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ positiivisesti homogeeninen astetta k; toisin sanoen

$$f(ax) = a^k f(x) \quad \text{kaikilla} \quad a > 0$$

Todista Eulerin lause (yksi niistä monista):

$$f \text{ on positiivisesti homogeeninen astetta } k \quad \Longrightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ on positiivisesti homogeeninen astetta } k-1.$$

2. Olkoon L parametrinen Lagrangen funktio ja $x = (x_1, x_2)$. Merkitään $L_{ij} = \partial^2 L / \partial x_i' \partial x_j'$ ja määritellään matriisi

$$L_{x'x'} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$$

Näytä, että $\det(L_{x'x'}) = 0$ olipa x mikä tahansa käyrä. Tämä on eräs seuraus siitä, että parametrisessa tapauksessa Eulerin yhtälöt eivät ole riippumattomia. Erityisesti näytä, että on olemassa jokin F siten, että $L_{11} = (x_2')^2 F$, $L_{12} = -x_1' x_2' F$, $L_{22} = (x_1')^2 F$. Mikä on F jos $L = |x'|$? Huomaa, että F on positiivisesti homogeeninen astetta -3.

3. Olkoon L ja F kuten edellisessä tehtävässä, ja olkoon $\mathcal{E}_L^j = 0$ vastaavat Eulerin yhtälöt. Lemman 4.2 perusteella $x_1' \mathcal{E}_L^1 + x_2' \mathcal{E}_L^2 = 0$ olipa x mikä tahansa. Varmaankin on siis olemassa jokin T siten, että $\mathcal{E}_L^1 = x_2' T$ ja $\mathcal{E}_L^2 = -x_1' T$. Näytä, että

$$T = L_{x_1 x_2'} - L_{x_1' x_2} + (x_1' x_2'' - x_1'' x_2')F$$

4. Laske edellisen tehtävän perusteella ekstremaalit kun $L = x_1' x_2 + a|x'|$ missä $a > 0$. Ohje: muodosta yhtälö $T = 0$ ja valitse lisäksi kaarenpituusparametrisointi: $|x'| = 1$.

5. Olkoon L konveksi ja

$$J(y) = \int_a^b L(x, y, y') dx$$

Näytä, että $g(\varepsilon) = J(y + \varepsilon\varphi)$ on konveksi.

6. 1. harjoituksen 3. tehtävässä todettiin että saatu ekstremaali ei voi olla minimi eikä maksimi. Näytä siis, ettei Lagrangen funktio ole konveksi. Entä onko $L = y\sqrt{1 + (y')^2}$ konveksi? Huomaa, että sekä $f_1(y) = y$ että $f_2(y') = \sqrt{1 + (y')^2}$ ovat konvekseja.