Variaatiolasku kevät 2014

Laskuharjoitus 5

1. Etsi funktion $f(x) = 6x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2$ minimi rajoitusehdolla $g(x) = x_1x_2-7 = 0$. Saamasi Lagrangen kertoimen avulla voidaan analysoida ratkaisun herkkyyttä seuraavasti. Olkoon saamasi ratkaisu x_*; olkoon sitten x_ε ratkaisu kun rajoitusehtona on $g_\varepsilon(x) = g(x) - \varepsilon = 0$. Siis $x_0 = x_*$. Näytä, että
$$f(x_\varepsilon) \approx f(x_*) + \lambda\,\varepsilon$$
Testaa tätä, kun $\varepsilon = 0.1$.

2. Laske seuraavan tehtävän ekstremaalit.
$$J(y) = \tfrac{1}{2}\int_0^2 (y')^2 dx$$
$$K(y) = \int_0^2 y\,dx = 8$$
Käytä seuraavia reunaehtoja:
   (i) $y(0) = 1$, $y(2) = 3$
   (ii) $y(0) = 1$, $y(2)$ on vapaa

3. Laske seuraavan tehtävän ekstremaalit.
$$J(y) = \int_0^b (y')^{4/3} dx$$
$$y(0) = -1 \quad , \quad (b, y(b)) \text{ on käyrällä } \quad y = 1 - x^2$$
$$K(y) = \int_0^b xy'dx = 5$$

4. Laske seuraavan tehtävän ekstremaalit.
$$J(y) = \int_0^\pi \big(2y\sin(x) + (y')^2\big)dx$$
$$K(y) = \int_0^\pi y dx = 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

5. Olkoon $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja tarkastellaan seuraavaa tehtävää:
$$\text{minimoi } J(y) = y(1)^2 \quad , \quad y(0) = 1$$
$$\text{rajoitusehtona } K(y) = \int_0^1 (y^2 + (y')^2)dx = 1$$
Muunna tämä tavanomaiseksi tehtäväksi ja ratkaise se.

   Tällaisia tehtäviä esiintyy usein optimisäädössä. Siinä siis systeemi halutaan ohjata johonkin lopputilaan (tässä siis haluttaisiin y(1)=0), ja rajoitusehto kuvaa esimerkiksi sitä, että säätö halutaan suorittaa mahdollisimman “taloudellisesti”.