Variaatiolasku kevät 2014

Laskuharjoitus 6

1. Tarkastellaan 3-ulotteista heiluria; heiluri voi siis heilua vapaasti kiinnityspisteestään. Otetaan kiinityspisteeksi origo. Heilurin pää piirtää käyrän $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Kirjoita Lagrangen funktio heilurille käyttäen karteesisia koordinaatteja. Valitse vakiot ykkösiksi. Oletetaan, että painovoima vaikuttaa negatiivisen x_3 akselin suuntaan. Mitkä ovat Eulerin yhtälöt? Eliminoi yhtälöistä Lagrangen kertoja λ.

2. Jatketaan edellistä tehtävää. Osoita, että $x_1 x_2' - x_1' x_2 = \text{vakio} = c$. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Matriisi A kiertää kulman θ verran ja pyörähdysakseli on x_3 akseli. Näytä, että Lagrangen funktio on invariantti A:n suhteen. Siis jos $z(t) = Ax(t)$ niin

$$L(t, z, z') = L(t, x, x')$$

   Voidaan osoittaa, että tässä tapauksessa $x_1 x_2' - x_1' x_2 = c$ seuraa siitä, että sekä Lagrangen funktio että rajoitusehdot ovat invariantteja A:n suhteen.

3. Tarkastellaan paraboloidia $x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/2$. Kirjoita yhtälöt geodeeseille. Eliminoi λ. Näytä, että voit ensin ratkaista funktiot x_1 ja x_2. Päteekö tämä aina kun pinta voidaan esittää graafina? Siis jos $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(z_1, z_2) = \big(z_1, z_2, f(z_1, z_2)\big)$ niin sanotaan että F on f:n graafi.[1]

4. Tarkastellaan alla olevaa tuplaheiluria; ℓ_1 ja ℓ_2 ovat siis varsien pituudet, ja varsien päissä on pistemassat m_1 ja m_2. Itse varret oletetaan massattomiksi. Kirjoita tätä tilannetta vastaava Lagrangen funktio karteesisten koordinaattien avulla. Siis massapisteen m_1 koordinaatit ovat (x_1, x_2) ja massapisteen m_2 koordinaatit ovat (x_3, x_4). Heilurin liikettä kuvaa siis käyrä $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$. Muodosta rajoitusehdot ja tarkista, että nolla on rajoitusehtokuvauksen säännöllinen arvo.[2] Kirjoita Eulerin yhtälöt. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi voidaan valita kaikki vakiot ykkösiksi.

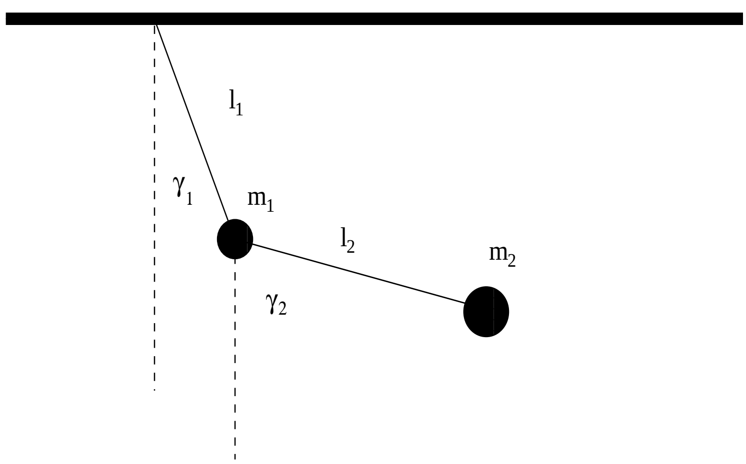
5. Jatketaan edellistä tehtävää. Osoita, että energia säilyy myös silloin kun systeemissä on rajoitusehtoja.[3] Eliminoi λ:t systeemistä. Onnistuuko tämä aina?

---

[1]Käyristä puhuttaessa välillä tarkoitetaan kuvausta ja välillä kuvajoukkoa, samoin graafin tapauksessa.

[2]Rajoitusehtojen määrittämä monisto on topologisesti torus.

[3]Mekaniikassa tämä ilmaistaan sanomalla, että rajoitusvoimat eivät tee työtä.


l1
γ1
m1
l2
m2
γ2