Variaatiolasku kevät 2014

Laskuharjoitus 7 (viimeinen)

(i) viikolla 10 keskiviikkona ja torstaina Natalia Ovsjannikova pitää luennot optimisäädöstä, Pontrjaginin maksimiperiaatteesta ja näitten sovelluksista.

(ii) tentti on siis pe 21. 3 klo 12- 16, sali M101

1. LQR-ongelmassa päädyttiin matriisiin

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{pmatrix}$$

Tarkista, että tämä on Hamiltonin matriisi (määritelmä 6.5). Osoita lisäksi että Hamiltonin matriiseilla on seuraava ominaisuus: jos μ on ominaisarvo, niin myös $-\mu$ on ominaisarvo. Erityisesti siis $\mathtt{tr}(\mathcal{H}) = 0$.

2. Olkoon

$$z' = \mathcal{H}z$$

missä $\mathcal{H}$ on jokin mielivaltainen Hamiltonin matriisi ja olkoon $\mathcal{S}(t) = e^{\mathcal{H}t}$. Tällöin systeemin ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa $z(t) = \mathcal{S}(t)p$. Näytä, että $\det\big(\mathcal{S}(t)\big) = 1$. Toisin sanoen tehtävän virtaus säilyttää tilavuuden avaruudessa $\mathbb{R}^{2n}$.

3. Tarkastellaan säätötehtävää

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, u)dt$$
$$x' = u$$

Näytä, että tämän tehtävän ratkaisun tilamuuttuja x on seuraavan tehtävän Eulerin yhtälön ratkaisu:

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, x')dt$$

4. Tarkastellaan tehtävää

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\bar{t}} \big(x_1^2 + u^2\big)dt$$
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_2 + u \end{cases}$$

Kirjoita tätä vastaava Hamiltonin systeemi. Oletetaan, että alkutila $x(0)$ on kiinteä. Mikä on loppuehto? Mikä on vastaava Hamiltonin matriisi? Mitkä ovat sen ominaisarvot? Jos loppuaika on vapaa, niin mikä lisäehto tästä saadaan?

5. Ratkaise edellinen tehtävä Maplella, kun $x(0) = (1,0)$ ja $\bar{t} = 2$. Laske sitten optimaalinen aika ja ratkaisu tässä tapauksessa. Vertaa ratkaisuja.

6. Tarkastellaan säätötehtävää

$$
\begin{aligned}
J(u) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t,x,u)dt \\
x' &= Ax + Bu
\end{aligned}
$$

Johdettaessa välttämättömiä ehtoja valittiin ensin $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$ ja todettiin, että vastaava x:n variaatio voidaan kirjoittaa muodossa $x_\varepsilon = x + \varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Jos alkutila $x(t_0) = p$ on kiinteä niin osoita, että η toteuttaa difyhtälön

$$
\begin{cases}
\eta' = A\eta + B\varphi \\
\eta(t_0) = 0
\end{cases}
$$