Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 1

1. Vastaoletus: $f(x) > 0$ välillä $I_1 = [a_1, b_1]$. Olkoon $\varphi(x) = (x - a_1)^2(b_1 - x)^2$ kun $x \in I_1$ ja nolla muulloin. Tällöin $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx > 0$.

2.
$$L_{y'} = \frac{2y'}{x^3} = \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad y = c_0 + c_1 x^4$$
Reunaehdot: $y = (10 - x^4)/3$.

3.
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L(y) &= y'' - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_0 \\ L_{y'} &= y' + y + 1 \quad \Rightarrow \\ &\begin{cases} L_{y'}(0) = c_0 + c_1 + 1 = 0 \\ L_{y'}(1) = c_0 + 2c_1 + 5/2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_0 = 1/2 \\ c_1 = -3/2 \end{cases}\end{aligned}$$

4.
$$\mathcal{E}_L(y) = y'' - y - e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = c_0 e^x + c_1 e^{-x} + \tfrac{1}{2}xe^x$$
Jos L on toisen asteen polynomi y:n ja y':n suhteen, niin L_y ja siis $L_{y'}$ ovat lineaarisia y:n ja y':n suhteen. Siis myös
$$\mathcal{E}_L(y) = \frac{d}{dx}L_{y'} - L_y$$
on lineaarinen.

5.
$$L - y'L_{y'} = \frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad y = a\cosh\big((x - c)/a\big)$$
Huomaa, että tällöin
$$J(y) = \int_0^{x_1} y\sqrt{1 + (y')^2}dx = \tfrac{1}{a}\int_0^{x_1} y^2 dx$$
Ehdosta $y(0) = 1$ saadaan seuraava muoto:
$$y(x) = \cosh(x/a) - \sqrt{1 - a^2}\sinh(x/a)$$
Ratkaisun minimi on kun $\tanh(\hat{x}/a) = \sqrt{1 - a^2}$ jolloin $y(\hat{x}) = a$. Maplen työkirjassa on joitain numeerisia laskuja.