Variaatiolasku kevät 2014

tentin tehtävien 3 & 5 ratkaisut

(3)

$$\mathcal{E}_L(y) = \tfrac{d}{dx}\exp(y') + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(y') = c - x \quad \Rightarrow$$
$$y' = \ln(c - x) \quad \Rightarrow \quad y(x) = (x - c)\ln(c - x) - x + c\ln(c)$$

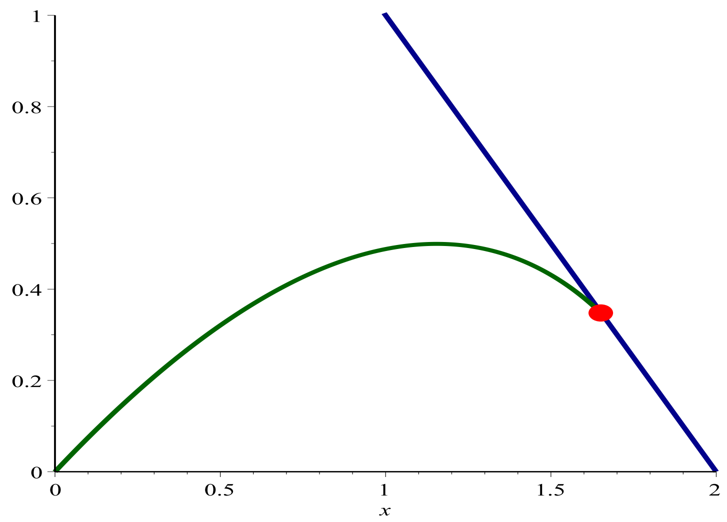
Tässä on jo otettu huomioon $y(0) = 0$. Transversaalisuusehto $\langle v, w\rangle = 0$ missä $v = (1, -1)$ ja

$$w = \big(L - y'L_{y'}, L_{y'}\big) = \big(c - c\ln(c), c - b\big) \quad \Rightarrow \quad b = c\ln(c)$$

Nyt pitäisi ratkaista

$$y(b) = 2 - b = (b - c)\ln(c - b) - b + c\ln(c)$$

Tämä onnistuu vain numeerisesti: $c \approx 2.15$ ja $b \approx 1.65$. Ratkaisu kuvassa.



(5) Laajennettu Lagrangen funktio

$$L = y\big(\sqrt{1 + (y')^2} + \lambda\big)$$

Koska ei riipu x:stä niin

$$L - y'L_{y'} = \frac{y\big(1 + \lambda\sqrt{1 + (y')^2}\big)}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{vakio} = a$$

Toisaalta b vapaa, joten $(L - y'L_{y'})(b) = 0$ joten $a = 0$. $y = 0$ ei toteuta reunaehtoja, joten

$$y' = \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad y = 1 - x/b$$
$$\int_0^b y\,dx = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$