Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 2

1. $\mathcal{E}_L(y) = L_{y'y'}y'' = 0$, siis vain suorat ekstremaaleja, paitsi jos $L_{y'y'}$ on identtisesti nolla jolloin kaikki käyrät on ekstremaaleja.

2. $\mathcal{E}_L(y) = y'' - y - 1 = 0$ joten reunaehto $y(0) = 2$ huomioon ottaen

$$y = c\,e^x + (3 - c)e^{-x} - 1$$

Ehdosta $L_{y'}(b) = 0$ saadaan

$$\begin{aligned} c = \frac{3\,e^{-b}}{2\,\cosh(b)} \quad &\Rightarrow \quad L(b) = \frac{17 - \cosh(2b)}{4\cosh(b)^2} = 0 \quad \Rightarrow \\ \cosh(b) = 3 \quad , \quad b \approx 1.76 \quad &\Rightarrow \quad c = \tfrac{1}{2}\,e^{-b} \approx 0.0858 \quad \Rightarrow \\ y(b) = y'(b) = 0 \quad , \quad J(y) \approx 4.43 \end{aligned}$$

3. $\mathcal{E}_L(y) = y'' + y = 0$ joten reunaehto $y(0) = 0$ huomioon ottaen $y = c\sin(x)$. Ehdosta $L_{y'}(b) = 0$ saadaan $c\cos(b) = 0$ joten $b_n = (n + 1/2)\pi$, $n \geq 1$ ja

$$c_n = \pm 2\sqrt{2}\big((n + 1/2)\pi - 3\big)^{3/2}$$

tai sitten $y = 0$. Integraaliksi saadaan

$$J(y) = \int_0^{b_n} L(x, y, y')dx = b_n(b_n - 6)(b_n^2 - 6b_n + 18)$$

Näistä pienin arvo kun $n = 1$.

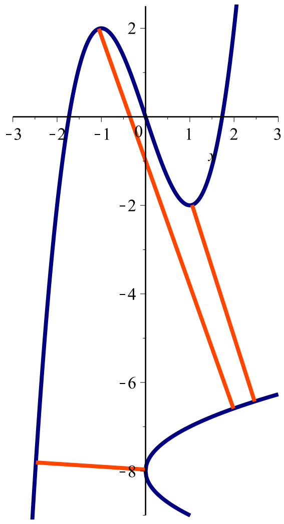
4. Ekstremaali $y = c_1x + c_0$. Olkoon sitten $w = (1, c_1)$, $v_a = (1, 3a^2 - 3)$, $v_b = \big(2(c_1b + c_0) + 16, 1\big)$. Siis transversaalisuusehdot:

$$\begin{aligned} &\langle w, v_a\rangle = 1 + 3c_1(a^2 - 1) = 0 \\ &\langle w, v_a\rangle = c_1(2b + 1) + 2c_0 + 16 = 0 \\ &c_1a + c_0 = a^3 - 3a \\ &b = (c_1b + c_0 + 8)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 = \frac{1}{3(1 - a^2)} \quad &, \quad c_0 = \frac{a(3a^4 - 12a^2 + 10)}{3(a^2 - 1)} \\ b = 3a^5 - 12a^3 &+ 24a^2 + 10a - 49/2 \end{aligned}$$

$$f(a) = 108a^9 - 648a^7 + 864a^6 + 1332a^5 - 2610a^4 - 1152a^3 + 2628a^2 + 360a - 883 = 0$$

Numeerisesti 3 reaalista ratkaisua: $a_0 \approx -2.48$, $a_1 \approx -1.06$, $a_2 \approx 1.05$, katso kuva.



5. Olkoon $y'_- = c$ ja $y'_+ = z$. Kulmaehdot:

$$
\begin{aligned}
&4c^3 - 2c - 4z^3 + 2z = 2(c-z)(2c^2 + 2zc + 2z^2 - 1) = 0 \\
&3c^4 - c^2 - 3z^4 + z^2 = (3c^2 + 3z^2 - 1)(c+z)(c-z) = 0
\end{aligned}
$$

Etsitään vain ratkaisuja $c \neq z$ joten

$$
\begin{aligned}
&2c^2 + 2zc + 2z^2 - 1 = 0 \\
&(3c^2 + 3z^2 - 1)(c+z) = 0
\end{aligned}
$$

Jos $c = -z$, niin $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Jos $c + z \neq 0$, niin yhtälöt toteutuu vain jos $c = z = \pm 1/\sqrt{6}$. Siis eräs ratkaisu

$$
y_* = \begin{cases} x/\sqrt{2} & , \ 0 \leq x \leq 1/2 \\ (1-x)/\sqrt{2} & , \ 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}
$$

Tälle pätee $J(y_*) = \inf J = -1/4$.