Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 3

1. Olkoon annettu käyrä $\alpha(s) = \big(x(s), y(s)\big)$, käyrän kuvajoukko K ja $p = \alpha(0)$. Tällöin $\alpha'(0) \in T_pK$. Olkoon $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ ekstremaali ja

$$w = \big(L - y'L_{y'}, L_{y'}\big) = \frac{f}{\sqrt{1+(y')^2}}\big(1, y'\big)$$

Siis w antaa käyrän $(x, y(x))$ tangentin joten ehto $w(b) \perp T_pK$ tarkoittaa että käyrä leikkaa ortogonaalisti.

2.

$$\mathcal{E}_L(y) = \frac{yy'' + (y')^2 + 1}{y^2(1+(y')^2)^{3/2}} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$2yy'' + 2(y')^2 = \frac{d^2}{dx^2}y^2 = -2$$

Ekstremaalit ovat siis muotoa $(x-c)^2 + y^2 = r^2$. $y(0) = 0$ joten $c = r$. Merkitään $z = y(b)$. Saadaan ehdot

$$\big\langle (b-r, z), (b-9, z) \big\rangle = (b-r)(b-9) + z^2 = 0$$
$$(b-r)^2 + z^2 = r^2$$
$$(b-9)^2 + z^2 = 9$$

Siis $r = 4$, $b = 36/5$ ja $z = \pm 12/5$.

3. $y_j(x) = a_jx + b_j$, $y_1(-2) = 2$, $y_2(3) = 0$, $y_1(\hat{x}) = y_2(\hat{x}) = \hat{x}$ joten $b_1 = 2 + 2a_1$, $b_2 = -3a_2$ ja

$$a_1\hat{x} + 2a_1 + 2 = \hat{x} = a_2\hat{x} - 3a_2$$

Nyt siis $y'_- = a_1$ ja $y'_+ = a_2$ ja transversaalisuus antaa että

$$\frac{1+a_1}{v_1\sqrt{1+a_1^2}} = \frac{1+a_2}{v_2\sqrt{1+a_2^2}}$$

Tulokulma $\theta_1 = \pi/4 - \alpha_1$ ja heijastuskulma $\theta_2 = \pi/4 - \alpha_2$ missä $\tan(\alpha_j) = -a_j$. Tästä saadaan heijastuslaki

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2}$$

4. $\mathcal{E}_L^j = y_j'' + y_{3-j} = 0$, joten

$$\begin{aligned} y_1(x) =& c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x) \\ y_2(x) =& - c_1 e^x - c_2 e^{-x} + c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x) \end{aligned}$$

Luonnolliset reunaehdot: $y_1'(\pi/2) = y_2'(0) = 0$. Ensin $y_1(0) = y_2'(0) = 0$ jolloin

$$\begin{aligned} y_1(x) =& - (c_2 + c_4) e^x + c_2 e^{-x} + c_4 \cos(x) - (2c_2 + c_4) \sin(x) \\ y_2(x) =& (c_2 + c_4) e^x - c_2 e^{-x} + c_4 \cos(x) - (2c_2 + c_4) \sin(x) \end{aligned}$$

Sitten

$$c_2 = -\tfrac{1}{4}\big(e^{\pi/2} + 1\big) \quad , \quad c_4 = \tfrac{1}{2}\cosh(\pi/2)$$

5. $L_{y''} = y''$, $L_{y'} - \frac{d}{dx} L_{y''} = -y'''$ joten

$$\begin{aligned} \delta J_y \varphi &= \int_0^{\pi/2} \mathcal{E}_L(y)\varphi + \Big|_0^{\pi/2} L_{y''}\varphi' + \big(L_{y'} - \frac{d}{dx} L_{y''}\big)\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \big(y'''' - y\big)\varphi + \Big|_0^{\pi/2} \big(y''\varphi' - y'''\varphi\big) \end{aligned}$$

siispä $y'''' - y = 0$, $y(0) = y'(\pi/2) = 1$, $y''(0) = y'''(\pi/2) = 0$. ei ratkaisua! Jos $y(0) = y'(\pi/2) = 1$, $y''(0) = 0$, niin $y'''(\pi/2) = 2$.