Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 4

1. Derivoidaan a:n suhteen: $\langle \nabla f(ax), x\rangle = ka^{k-1}f(x)$ ja asetetaan $a=1$. Merkitään $f_j = \partial f/\partial x_j$. Homogeenisuusehto voidaan kirjoittaa $kf = \sum_j x_j f_j$. Derivoidaan tätä x_ℓ:n suhteen:
$$kf_\ell = f_\ell + \sum_j x_j \partial_\ell f_j \quad \Rightarrow \quad (k-1)f_\ell = \sum_j x_j \partial_j f_\ell$$

2. $L = \langle \nabla_{x'} L, x'\rangle$ joten
$$\begin{aligned} L_{x_1'} &= L_{x_1'} + L_{11}x_1' + L_{12}x_2' \\ L_{x_2'} &= L_{x_2'} + L_{12}x_1' + L_{22}x_2' \end{aligned}$$
Siispä
$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(L_{x'x'}) = 0$$
Ensin $L_{11}(x_1')^2 = L_{22}(x_2')^2$, mistä $L_{11} = (x_2')^2 F$, $L_{22} = (x_1')^2 F$ minkä jälkeen $L_{12} = -x_1' x_2' F$. $L = |x|$ jolloin $F = |x|^{-3}$.

3. Suoraan derivoimalla:
$$\begin{aligned} L_{x_1} &= L_{x_1 x_1'} x_1' + L_{x_1 x_2'} x_2' \\ \mathcal{E}_L^1 &= L_{11}x_1'' + L_{12}x_2'' + L_{x_1 x_1'}x_1' + L_{x_1' x_2} x_2' - L_{x_1} \end{aligned}$$
Siispä
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_L^1 &= (x_2')^2 F x_1'' - x_1' x_2' F x_2'' + L_{x_1' x_2} x_2' - L_{x_1 x_2'} x_2' = x_2' T \quad \text{missä} \\ T &= F\big(x_2' x_1'' - x_1' x_2''\big) + L_{x_1' x_2} - L_{x_1 x_2'} \end{aligned}$$
Vastaavasti $\mathcal{E}_L^2 = -x_1' T$.

4. $L = x_1' x_2 + a|x'|$, joten $F = L_{x_2' x_2'}/(x_1')^2 = a|x'|^{-3}$. Lisäksi $L_{x_1} = 0$ ja $L_{x_1' x_2} = 1$ joten
$$a(x_2' x_1'' - x_1' x_2'') = -|x'|^3$$
Muistetaan $|x'| = 1$ joten
$$x_2' x_1'' - x_1' x_2'' = -1/a$$
Toisaalta $\langle x', x''\rangle = 0$ joten
$$(x_2')^2 x_1'' - x_1' x_2' x_2'' = |x'|^2 x_1'' = x_1'' = -x_2'/a$$
Vastaavasti $x_2'' = x_1'/a$ jolloin ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa
$$\begin{aligned} x_1(t) &= q_1 + c_1 \cos(t/a) + c_2 \sin(t/a) \\ x_2(t) &= q_2 - c_2 \cos(t/a) + c_1 \sin(t/a) \end{aligned}$$
missä $c_1^2 + c_2^2 = a^2$. Ekstremaalit on siis ympyröitä.

5. Ensin

$$\begin{aligned} J\big((1-\mu)y+\mu z\big) &= \int_a^b L\big(x,(1-\mu)y+\mu z,(1-\mu)y'+\mu z'\big)dx \\ &\le (1-\mu)\int_a^b L\big(x,y,y'\big)dx + \mu\int_a^b L\big(x,z,z'\big)dx \\ &= (1-\mu)J(y)+\mu J(z) \end{aligned}$$

Sitten

$$\begin{aligned} g\big((1-\mu)\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2\big) &= J\big((1-\mu)(y+\varepsilon_1\varphi)+\mu(y+\varepsilon_2\varphi)\big) \\ &\le (1-\mu)J(y+\varepsilon_1\varphi)+\mu J(y+\varepsilon_2\varphi) = (1-\mu)g(\varepsilon_1)+\mu g(\varepsilon_2) \end{aligned}$$

6. (i) $L = ((y')^2+2yy'+2y'+2y)/2$, joten

$$d^2L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(d^2L) < 0$ joten ei konveksi lemman C.2 kohdan (ii) mukaan.
(ii) $L = y\sqrt{1+(y')^2}$ joten

$$d^2L = \begin{pmatrix} 0 & y'/\sqrt{1+(y')^2} \\ y'/\sqrt{1+(y')^2} & y/(\sqrt{1+(y')^2})^3 \end{pmatrix}$$

Jälleen $\det(d^2L) < 0$.