Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 5

1. $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$ joten

$$\begin{cases} 12x_1 + (4+\lambda)x_2 = 0 \\ 6x_2 + (4+\lambda)x_1 = 0 \\ x_1 x_2 - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^4 - 49 = 0 \\ 7x_2 - 2x_1^3 = 0 \\ 7\lambda + 12x_1^2 + 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \approx \pm 2.22 \\ x_2 \approx \pm 3.15 \\ \lambda \approx -12.5 \end{cases}$$

$f(x_*) \approx 87.4$. Tulkitaan x_ε käyräksi $x_\varepsilon = x(\varepsilon)$ ja merkitään $a(\varepsilon) = g(x(\varepsilon)) - \varepsilon$ ja $b(\varepsilon) = f(x(\varepsilon))$. Nyt siis $x(0) = x_*$ ja oletuksen mukaan $a(\varepsilon) = 0$ kaikilla ε. Siispä $a'(\varepsilon) = \langle \nabla g, x' \rangle - 1 = 0$. Sitten

$$\begin{aligned} b(\varepsilon) =& b(0) + b'(0)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = f(x_*) + \langle \nabla f, x' \rangle \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ =& f(x_*) - \lambda \langle \nabla g, x' \rangle \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = f(x_*) - \lambda \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

2. $\tilde{L} = L + \lambda N = \frac{1}{2}(y')^2 + \lambda y$ joten $\mathcal{E}_{\tilde{L}}(y) = y'' - \lambda = 0$. Siis $y(x) = \frac{1}{2}\lambda x^2 + c_1 x + c_0$.
(i) $y(0) = 1$, $y(2) = 3$ jolloin $y(x) = \frac{1}{2}\lambda x^2 + (1-\lambda)x + 1$ ja

$$\int_0^2 y(x)dx = -\tfrac{2}{3}\lambda + 4 = 8$$

Siis $\lambda = -6$ ja $y(x) = -3x^2 + 7x + 1$
(ii) $y(2)$ vapaa joten $\tilde{L}_{y'}(2) = y'(2) = 0$. Siis $y(x) = \frac{1}{2}\lambda x^2 - 2\lambda x + 1$ ja

$$\int_0^2 y(x)dx = -\tfrac{8}{3}\lambda + 2 = 8$$

Siis $\lambda = -9/4$ ja $y(x) = -\frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

3. $\tilde{L} = (y')^{4/3} + \lambda x y'$ joten $\mathcal{E}_{\tilde{L}}(y) = 0 \quad \Rightarrow$

$$4y'' + 9\lambda (y')^{2/3} = 0$$

Olkoon $z = y'$ jolloin

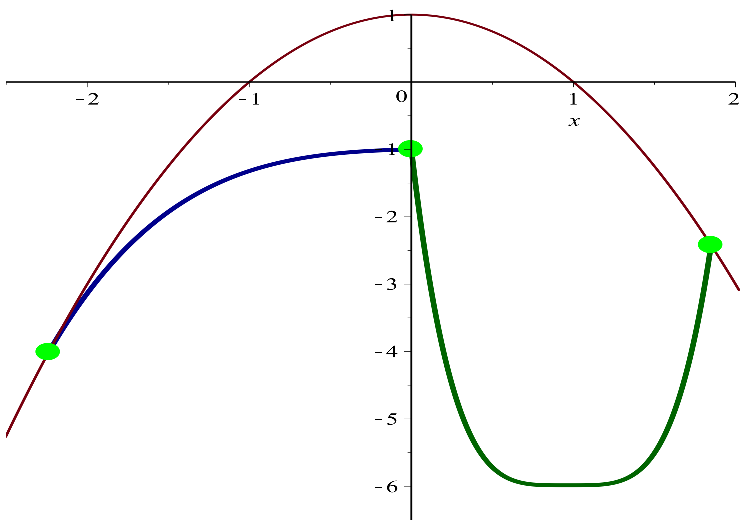
$$\frac{4dz}{z^{2/3}} = -9\lambda dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_0 - \frac{27(\lambda x - c)^4}{256\lambda}$$

$y(0) = -1$ joten $c_0 = -1 + 27c^4/256\lambda$. Merkitään $z = y(b)$. Sitten $\tilde{L}_{y'}(b) = c$ ja $\tilde{L} - y'\tilde{L}_{y'}(b) = \lambda(z - c_0) = \lambda(1 - b^2 - c_0)$. Olkoon

$$w = \big(\lambda(1 - b^2 - c_0), c\big) \quad , \quad v = \big(1, -2b\big)$$

Transversaalisuusehto

$$\langle w, v \rangle = (2 - b^2)\lambda - 2bc - \frac{27}{256}c^4 = 0$$



Lisäksi ehto $y(b) = 1 - b^2$ ja integraaliehto

$$\int_0^b xy'(x)dx = -\frac{27b^2}{1280}\left(4b^3\lambda^3 - 15b^2c\lambda^2 + 20bc^2\lambda - 10c^3\right) = 5$$

Kaksi reaalista ratkaisua, katso kuva. Maple-työkirjassa on muokattu yhtälöt siihen muotoon että voidaan olla varmoja että on vain 2 reaalista ratkaisua.

$$\begin{cases} b \approx -2.2 \\ c \approx 0.50 \\ \lambda \approx 0.74 \end{cases} , \quad \begin{cases} b \approx 1.8 \\ c \approx -3.7 \\ \lambda \approx -3.8 \end{cases}$$

4. $\tilde{L} = (y')^2 + 2y\sin(x) + \lambda y$ joten

$$\mathcal{E}_{\tilde{L}}(y) = 2y'' - 2\sin(x) - \lambda = 0$$

Siis kun otetaan huomioon $y(0) = 0$ niin

$$y(x) = \tfrac{1}{4}\lambda x^2 + c\,x - \sin(x)$$

$y(\pi)$ on vapaa joten $\tilde{L}_{y'}(b) = 2y'(b) = 0$. Siis $1 + c + \lambda\pi/2 = 0$ josta saadaan c. Integraaliehto

$$\int_0^\pi ydx = -\tfrac{1}{6}\lambda\pi^3 - \tfrac{1}{2}\pi^2 - 2 = 1$$

Siis

$$y(x) = -\frac{3\pi^2 + 18}{4\pi^3}\,x^2 + \frac{\pi^2 + 18}{2\pi^2}\,x - \sin(x) \approx -0.38\,x^2 + 1.4\,x - \sin(x)$$

5. $\tilde{L} = 2yy' + \lambda(y^2 + (y')^2)$ joten

$$\mathcal{E}_{\tilde{L}}(y) = 2\lambda(y'' - y) = 0$$

Siis kun otetaan huomioon $y(0) = 1$ niin

$$y(x) = (1 - c)e^x + c\, e^{-x}$$

Integraaliehto

$$\int_0^1 (y^2 + (y')^2)dx = (e^2 - e^{-2})c^2 + 2(1 - e^2)c + 2c - 1 = 1$$

Ratkaisut $c_1 \approx 0.70$ ja $c_2 \approx 1.1$. $\tilde{L}_{y'}(1) = 2y(1) + 2\lambda y'(1) = 0$ josta saadaan λ. Nyt

$$y_1(1)^2 \approx 1.2 \quad , \quad y_2(1)^2 \approx 0.049$$