Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 6

1. $T = \frac{1}{2}|x'|^2$, $U = x_3$, $L = T - U$. Rajoitusehto $g(x) = \frac{1}{2}\big(|x|^2 - 1\big) = 0$.

$$\begin{cases} x_1'' + \lambda x_1 = 0 \\ x_2'' + \lambda x_2 = 0 \\ x_3'' + \lambda x_3 + 1 = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$\langle x, x' \rangle = 0$ joten derivoimalla $\langle x, x'' \rangle + |x'|^2 = 0$. Toisaalta

$$\langle x, x'' \rangle + \lambda |x|^2 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -x_3 - \langle x, x'' \rangle = |x'|^2 - x_3$$

Siis saadaan alkuarvotehtävä perusmuodossa.

2.
$$\tfrac{d}{dt}\big(x_1 x_2' - x_1' x_2\big) = x_1 x_2'' - x_1'' x_2 = x_1(-\lambda x_2) - (-\lambda x_1) x_2 = 0$$

Selvästi $z' = Ax'$ joten $|z'|^2 = \langle Ax', Ax' \rangle = \langle x', A^T A x' \rangle = |x'|^2$. Lisäksi $z_3 = x_3$.

3. $g(x) = (x_1^2 + x_2^2)/2 - x_3 = 0$, $x'' + \lambda \nabla g = 0$, $|x'| = 1$. Nyt

$$\nabla g = \big(x_1, x_2, -1\big) \quad , \quad |\nabla g|^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$$
$$\lambda = -\frac{\langle \nabla g, x'' \rangle}{|\nabla g|^2} = \frac{\langle x', d^2 g x' \rangle}{|\nabla g|^2} = \frac{(x_1')^2 + (x_2')^2}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

Siis

$$\begin{cases} x_1'' + \lambda x_1 = 0 \\ x_2'' + \lambda x_2 = 0 \\ x_3'' - \lambda = 0 \\ x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1'' + \lambda(x_1.x_2) x_1 = 0 \\ x_2'' + \lambda(x_1, x_2) x_2 = 0 \\ x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/2 \end{cases}$$

Jos graafi, niin $g(x) = f(x_1, x_2) - x_3$, joten jos merkitään $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ niin

$$d^2 g = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{12} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siis λ ei riipu x_3:sta.

4. Kun vakiot normalisoitu niin

$$L = \tfrac{1}{2}\,|x'|^2 - x_2 - x_4$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 1 \\ (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 - 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \\ dg &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_4 & x_3 - x_1 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$(x_1, x_2) \neq (0,0)$ joten dg:n ensimmäinen rivi ei ole nolla. Toisaalta $(x_1, x_2) \neq (x_3, x_4)$ joten rivit lineaarisesti riippumattomia joten nolla on säännöllinen arvo.

Olkoon $v = (0,1,0,1)$ jolloin Eulerin yhtälöt

$$x'' + v + (dg)^T \lambda = 0$$

5. Energia: $H = T + U = \tfrac{1}{2}\,|x'|^2 + x_2 + x_4$.

$\frac{d}{dt}\,H = \langle x', x''\rangle + x_2' + x_4' = -\langle x', v + (dg)^T\lambda\rangle + x_2' + x_4' = x_2' + x_4' - \langle x', v\rangle - \langle dg\,x', \lambda\rangle = 0$

$dg\,x' = 0$ joten $dg\,x'' + d^2g(x', x') = 0$. Siispä

$$\begin{aligned} \lambda &= -\Big(dg(dg)^T\Big)^{-1}\big(dg\,x'' + dg\,v\big) = \Big(dg(dg)^T\Big)^{-1}\big(d^2g(x', x') - dg\,v\big) \\ &= \Big(dg(dg)^T\Big)^{-1}\begin{pmatrix} (x_1')^2 + (x_2')^2 - x_2 \\ |x'|^2 - 2(x_1'x_3' + x_2'x_4') \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Big(dg(dg)^T\Big)^{-1}$ on olemassa koska nolla on säännöllinen arvo.