Variaatiolasku kevät 2014

Ratkaisut 7

1. Olkoon $M^T\mathcal{I} + \mathcal{I}M = 0$ ja $Mv = \mu v$. Tällöin

$$\mathcal{I}Mv = -M^T\mathcal{I}v = \mu\mathcal{I}v$$

Siis $\mathcal{I}v$ on M^T:n ominaisvektori jota vastaa ominaisarvo $-\mu$. Toisaalta matriisilla ja sen transpoosilla on samat ominaisarvot. Jos μ_j, $1 \le j \le 2n$ on ominaisarvot, niin voidaan järjestää ne siten, että $\mu_{n+j} = -\mu_j$. Siis

$$\mathsf{tr}(M) = \sum_{j=1}^{2n} \mu_j = 0$$

2. Olkoon μ_j matriisin $\mathcal{H}$ ominaisarvot. Siis $\mathcal{S}(t)$:n ominaisarvot on $\zeta_j = e^{\mu_j t}$. Edellisen kohdan perusteella

$$\det\big(\mathcal{S}(t)\big) = \prod_{j=1}^{2n} \zeta_j = \exp(t\,\mathsf{tr}(\mathcal{H})) = 1$$

3. Olkoon (x, u, λ) ratkaisu ja $H = \lambda u - L(t, x, u)$. Optimiratkaisulle

$$H_u = \lambda - L_u(t, x, u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = L_{x'}(t, x, x')$$

Toisaalta $\lambda' = -H_x = L_x(t, x, x')$.

4. $H = \lambda_1 x_2 + \lambda_2(u - x_2) - \frac{1}{2}\big(x_1^2 + u^2\big)$. Siis $H_u = \lambda_2 - u = 0$ joten

$$H = \big(\lambda_1 - \lambda_2\big)x_2 + \tfrac{1}{2}\big(\lambda_2^2 - x_1^2\big)$$

Saadaan systeemi

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \lambda_2 - x_2 \\ \lambda_1' = x_1 \\ \lambda_2' = \lambda_2 - \lambda_1 \\ x(0) = p \\ \lambda_1(\bar{t}) = 0 \\ \lambda_2(\bar{t}) = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad p_H = \det\big(\mu I - \mathcal{H}\big) = \mu^4 - \mu^2 + 1$$

Siis ominaisarvot $\mu = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}\,i$. Loppuaika vapaa, siis $H = 0$ joten

$$H = \big(\lambda_1(\bar{t}) - \lambda_2(\bar{t})\big)x_2(\bar{t}) + \tfrac{1}{2}\big(\lambda_2(\bar{t})^2 - x_1(\bar{t})^2\big) = -\tfrac{1}{2}x_1(\bar{t})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(\bar{t}) = 0$$

5. Moodlessa Maple-työkirja.

6. Oletetaan, että $x' = Ax + Bu$ ja $u_\varepsilon = u + \varepsilon\varphi$. Tällöin

$$x'_\varepsilon = Ax_\varepsilon + B(u + \varepsilon\varphi)$$

Jos siis oletetaan, että x_ε voidaan kirjoittaa muodossa $x_\varepsilon = x + \varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, niin

$$\begin{aligned} x'_\varepsilon =& x' + \varepsilon\,\eta' + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = A\big(x + \varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big) + B(u + \varepsilon\varphi) \\ =& Ax + Bu + \Big(A\eta + B\varphi\Big)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Jotta yhtäsuuruus voisi päteä, niin $\eta' = A\eta + B\varphi$. Koska alkuehto on kiinteä, niin $\eta(t_0) = 0$.