

Variaatiolasku

tentti 21.3.2014

1. Olkoon

$$J(y) = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 (y')^2 dx.$$

Laske ekstremaalit. Laske ekstremaali, joka toteuttaa ehdot $y(0) = 0$ ja $y(1) = 1$.

2. Määrittele Weierstrassin & Erdmanin kulmaehdot. Laske seuraavan tehtävän ekstremaalit.

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^5 - (y')^3) dx \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0.$$

Etsi jokin kulmaekstremaali. Antaako kulmaekstremaali pienemmän vai suuremman arvon kuin ekstremaali? Voiko jompikumpi olla globaali minimi tai maksimi?

3. Määrittele transversaalisuusehdot. Olkoon

$$J(y) = \int_0^b (\exp(y') - y) dx \quad , \quad y(0) = 0$$

ja vaaditaan, että $(b, y(b))$ on suoralla $x + y - 2 = 0$. Laske ekstremaali.

4. Mikä on parametrinen variaatiotehtävä? Olkoon $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} (x'_1 x_1 - |x'|) dt.$$

Tarkista, että tämä on parametrinen tehtävä. Näytä, että tehtävän ekstremaalit ovat suoria.

5. Olkoon $y : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jokin funktio ja $y(0) = 1$ ja $y(b) = 0$, mutta b on vapaa. Etsi sellainen y , että sen määrittämän käyrän ja x -akselin välisen alueen pinta-ala on 1 ja että y :n määrittämän pyörähdyskappaleen pinta-ala on mahdollisimman pieni.