Variaatiolaskenta

Petri Juutinen

25. lokakuuta 2005

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Mitä on variaatiolaskenta?

> *"Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite qu'il soit possible"*
>
> *(If there occurs some change in nature, the amount of action necessary for this change must be as small as possible.)*
>
> Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

Variaatiolaskentaa voidaan pitää ääretönulotteisena yleistyksenä analyysin peruskursseilta tutusta ongelmasta löytää reaaliarvoisen funktion minimi- ja maksimipisteet. Hieman laajemman tulkinnan mukaan kyseessä on tietyn tyyppisten optimointi-ongelmien matemaattinen teoria. Klassisessa variaatiolaskennassa käsiteltävät ongelmat ovat peräisin yleensä fysiikasta tai geometriasta, kun taas moderni teoria saa innoituksensa esimerkiksi taloustieteistä, tietotekniikasta, kemiasta, biologiasta jne. 1700-luvun alussa alkunsa saanut ala on vaikuttanut hyvin merkittävästi monien muiden matematiikan alojen kuten funktionaalianalyysin ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teorian kehitykseen ja on yhä edelleen hyvin aktiivisen tutkimuksen kohteena.

Esimerkkejä

Parhaiten variaatiolaskennasta saa kuvan esimerkkien avulla. Alla on käsitelty lyhyesti joitakin hyvin klassisia ongelmia, joista osaan palataan tarkemmin myöhemmin. Mukaan on otettu myös pari hieman erikoisempaa variaatio-ongelmaa, joiden tarkoituksena on antaa lukijalle jonkinlainen aavistus tämän matematiikan alan kattavuudesta.

1. Brachistochrone-ongelma

Variaatiolaskennan katsotaan usein saaneen alkunsa Johann Bernoullin vuonna 1696 *Acta Eruditorum* lehdessä esittämästä Brachistochrone-ongelmasta, joka voidaan muotoilla seuraavasti: Olkoot $P_1 = (x_1, y_1)$ ja $P_2 = (x_2, y_2)$ tason $\mathbb{R}^2$ kaksi pistettä siten, että $x_1 < x_2$ ja $y_1 > y_2$. Tehtävänä on etsiä sellainen pisteet P_1 ja P_2 yhdistävä käyrä γ, jota pitkin kitkatta liukuva kappale liukuu pisteestä P_1 pisteeseen P_2 mahdollisimman nopeasti.

Jos käyrä γ on esitettävissä jatkuvasti differentioituvan funktion $u : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ kuvaajana, saadaan liukumiseen kuluvaksi ajaksi

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{y_1 - u(x)}}\, dx,$$

olettaen, että $u(x) \leq y_1$ kaikilla $x \in [x_1, x_2]$. Ongelmana on siis etsiä funktion

$$I : \mathcal{K} \to \mathbb{R}, \quad I(u) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{\sqrt{y_1 - u(x)}}\, dx$$

minimi joukossa

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = \{u : [x_1, x_2] \to\,]-\infty, y_1] : u \in C([x_1, x_2]) \cap C^1(]x_1, x_2[),\\ u(x_1) = y_1,\ u(x_2) = y_2\}.\end{aligned}$$

Brachistochrone-ongelman ratkaisivat Johann Bernoullin ohella ainakin hänen veljensä Jakob ja herrat Isaac Newton, Gottfried Leibniz ja Guillaume de l'Hôpital. Veljesten välisen kilpailun nimissä Jakob Bernoulli johti brachistochrone-ongelmasta vaikeamman version, jota ratkaistessaan hän ja hänen oppilaansa Leonhard Euler tulivat kehittäneeksi joitakin klassisen variaatiolaskennan perusmetodeista.

2. Pyörähdyskappaleen pinnan pinta-alan minimointi

Tehtävänä on minimoida funktion $u : [0, 1] \to [0, \infty[$, $u \in C^1(]0, 1[) \cap C([0, 1])$ kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyvän pinnan pinta-ala

$$A(u) = 2\pi \int_0^1 u(x) \sqrt{1 + u'(x)^2}\, dx$$

joukossa

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \{u \in C^1(]0, 1[) \cap C([0, 1]) : u(0) = \alpha > 0, u(1) = \beta > 0\},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ovat funktion u ennalta määrätyt reuna-arvot. Huomaa, että vaikka säännöllisyysvaatimus $u \in C^1(]0, 1[) \cap C([0, 1])$ takaa sen, että integrandi $u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}$ on pisteittäin hyvin määritelty, ei siitä kuitenkaan voida suoraan päätellä, että $A(u)$ olisi äärellinen. Lisäksi on selvää, että $A(u)$ voidaan järkevästi määritellä myös esimerkiksi paloittain affiinille funktiolle, joka ei kuulu luokkaan $C^1(]0, 1[)$.

3. Newtonin virtausongelma (Principia 1686)

Tehtävänä on suunnitella kappale siten, että sen virtausvastus (ilmassa tai vedessä) on mahdollisimman pieni. Yksinkertaisimmassa tapauksessa tutkittavana on pyörähdyskappale, jonka muoto ilmaistaan vähenevän funktion $v : [0, r] \to [0, M]$, $v \in C^1(]0, r[) \cap C([0, r])$

avulla; reunaehdot ovat nyt $v(0) = M$ ja $v(r) = 0$, missä pyörähdyskappaleen pohjan säde $r > 0$ ja sen korkeus $M > 0$ on annettu. Minimoitava integraali saa tällä kertaa muodon

$$R(v) = \int_0^r \frac{v(x)v'(x)^3}{1 + v'(x)^2}\,dx.$$

Lisää ongelmasta ja sen yleistyksistä löytyy viitteestä [14].

4. Dirichlet'n integraali

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja yhtenäinen rajoitettu joukko ja $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ annettu jatkuva funktio. Ongelmana on löytää $u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ siten, että

(i) $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$

(ii) $u_0(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \partial\Omega$.

(iii) $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2\,dx = \inf\Big\{\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx : v \text{ toteuttaa ehdot (ii) ja (iii)}\Big\}.$

Tehtävänä on siis minimoida funktionaali

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

joukossa

$$\mathcal{K} = \{u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = f\}.$$

Tämän ongelman ratkaisuja kutsutaan *harmonisiksi funktioiksi*, ja ne toteuttavat osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in \Omega$$

missä

$$\Delta u(x) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_j}(x)$$

on ns. *Laplace-operaattori*. Dirichlet'n integraali on ylivoimaisesti tärkein useampi ulotteinen variaatiointegraali ja variaatiolaskennan yleinen teoria on kehittynyt suurelta osin sen ymmärtämisen kautta.

Dirichlet'n integraalista on olemassa lukuisia yleistyksiä. Esimerkiksi funktionaali

$$I_g(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 + 2g(x)u(x)\,dx$$

missä $g \in C(\Omega)$ on annettu funktio, johtaa ns. Poisson' yhtälöön $-\Delta u = g(x)$, ja funktionaalin

$$I_p(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p\,dx,\ 1 < p < \infty$$

minimoivia funktioita kutsutaan p-harmonisiksi funktioiksi.

5. Minimipinnat

Olkoon Ω ja f kuten edellisessä kohdassa. Tehtävänä on minimoida funktionaalia

$$J(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx$$

joukossa $\mathcal{K} = \{u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = f\}$. Geometrisesti tulkittuna $J(u)$ tarkoittaa funktion u graafin $\{(x, u(x)) : x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ n-ulotteista pinta-alaa. Aiheesta kiinnostuneen lukijan kannattaa tutustua viitteeseen [11].

6. Isoperimetrinen ongelma

Tehtävänä on etsiä ennalta määrätyn pituisten tason suljettujen ja itseään leikkaamattomien käyrien joukosta se, jonka rajaaman alueen pinta-ala on suurin mahdollinen. Matemaattisesti tämä voidaan muotoilla esimerkiksi seuraavasti: Tutkitaan jatkuvasti differentioituvia polkuja

$$\mathcal{P} = \{\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : \gamma \in C^1, \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = 1\}.$$

Tavoitteena on löytää polku γ_0 siten, että sen rajaaman alueen pinta-alalle pätee

$$A(\gamma_0) \geq A(\gamma) \qquad \text{kaikilla } \gamma \in \mathcal{P},$$

missä pinta-ala saadaan kaavalla

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_1'(t)\gamma_2(t)\, dt,$$

kun merkitään $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Isoperimetrinen ongelma poikkeaa edellisistä esimerkeistä siinä, että se ei sisällä varsinaisia reunaehtoja, mutta kylläkin rajoitteen $\int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt = 1$. Näin ollen kyseessä on "sidottu ääriarvo-ongelma".

Isoperimetrinen ongelma voidaan yleistää myös korkeampiulotteiseen tilanteeseen ja se on mahdollista muotoilla matemaattisesti monella eri tavalla.

7. Laplace-operaattorin ominaisarvot

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, yhtenäinen ja rajoitettu. Merkitään

$$\begin{aligned} C_0^2(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) :\ & \text{on olemassa kompakti joukko } K \subset \Omega \text{ siten, että} \\ & u(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in \Omega \setminus K\}. \end{aligned}$$

Ongelmana on etsiä $u_0 \in C_0^2(\Omega)$ siten, että $\int_{\Omega} |u_0|^2\, dx = 1$ ja

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2\, dx = \inf\Big\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2\, dx : v \in C_0^2(\Omega) \text{ ja } \int_{\Omega} |v|^2\, dx = 1 \Big\}.$$

Osoittautuu, että etsitty funktio u_0 toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda_1 u(x) & \text{kaikilla } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in \overline{\Omega}, \end{cases}$$

missä luvun

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\varphi \in C_0^2(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \, dx}{\int_\Omega |\varphi|^2 \, dx}$$

neliöjuuri on alueen Ω yli pingotetun elastisen kalvon värähtelyn ensimmäinen ominaistaajuus [2].

8. Mongén-Kantorovichin massansiirto-ongelma

Olkoon meille annettu tasaisella alustalla kasa hiekkaa ja tilavuudeltaan hiekkakasan kokoinen kaivanto. Ongelmana on siirtää hiekka kaivantoon mahdollisimman pienellä työmäärällä, kuitenkin niin, että kaivanto täyttyy eikä hiekkaa jää sen ulkopuolelle.

Ongelman matemaattista muotoilua varten olkoot $f^+, f^- : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[$ jatkuvia ja kompaktikantajaisia funktioita siten, että

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^+(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f^-(x) \, dx;$$

tässä f^+ kertoo hiekkakasan sijainnin ja muodon, kun taas $-f^-$ kuvaa kaivantoa. Määritellään kaikkien tilavuudet säilyttävien siirtokuvausten joukko

$$\mathcal{S}(f^+, f^-) = \Big\{ s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \text{kaikille Borel mitallisille } E \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{pätee } \int_E f^-(y) \, dy = \int_{S^{-1}(E)} f^+(x) \, dx \Big\}.$$

Tehtävänä on minimoida hiekan siirrossa tarvittava työmäärä

$$W(s) = \int_{\mathbb{R}^2} |x - s(x)| f^+(x) \, dx$$

joukossa $S(f^+, f^-)$. Aiheesta lisää viitteessä [6].

Variaatiolaskennassa tutkittavia kysymyksiä

1. Ratkaisun olemassaolo

Ei ole mitenkään itsestään selvää, että annetulla variaatio-ongelmalla on olemassa ratkaisu. Itse asiassa jo koko ratkaisun käsite on monissa tilanteissa epäselvä ja vaatii pohdintaa. Yllä olevissa esimerkeissä tämä ongelma tulee vastaan vaikkapa mietittäessä pitäisikö pyörähdyspinnan pinta-alaa minimoitaessa ottaa kisaan mukaan myös paloittain säännölliset funktiot vai ei. Kurssin aikana käy lisäksi selville, että hyvin usein käytettävät todistusmetodit pakottavat laajentamaan joukkoa, jonka yli minimointi tapahtuu; samalla joutuvat tutkiskelun kohteeksi myös mm. reuna-arvojen tai sidosehtojen tulkinta.

Esimerkki 1.0.1. (i) Olkoon $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ja ongelmana etsiä lyhin pisteet $(1, 0)$ ja $(-1, 0)$ yhdistävä joukkoon U sisältyvä polku. On helppo nähdä, että jokaisen tällaisen polun pituus on aidosti suurempi kuin 2, ja että kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy polku, jonka pituus on pienempi kuin $2 + \varepsilon$. Näin ollen lyhintä polkua ei ole olemassa.

(ii) Olkoon

$$I(u) = \int_0^1 u'(x)^2 x^4 \, dx,$$

missä

$$u \in \mathcal{A} := \{v : [-1, 1] \to \mathbb{R} : \ v \in C^1(]-1, 1[) \cap C([-1, 1]), v(-1) = -1, v(1) = 1\}.$$

Jos $\varepsilon > 0$ on annettu, niin voidaan valita $u_\varepsilon \in \mathcal{A}$ siten, että

(i) $u_\varepsilon(x) = -1$ kaikilla $x \in [-1, -\varepsilon]$,

(ii) $u_\varepsilon(x) = 1$ kaikilla $x \in [\varepsilon, 1]$, ja

(iii) $0 \leq u_\varepsilon'(x) \leq \frac{2}{\varepsilon}$ kaikilla $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Tällöin

$$0 \leq I(u_\varepsilon) = \int_{-1}^1 u_\varepsilon'(x)^2 x^4 \, dx \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{4}{\varepsilon^2} \varepsilon^4 \, dx = 8\varepsilon^3 \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

eli $I(u_\varepsilon) \longrightarrow 0$ kun $\varepsilon \longrightarrow 0$. Koska selvästi $I(u) \geq 0$ kaikilla $u \in \mathcal{A}$, on $\inf_{u \in \mathcal{A}} I(u) = 0$.

On kuitenkin helppo nähdä, että $I(u) > 0$ kaikilla $u \in \mathcal{A}$. Nimittäin, koska $\int_{-1}^1 u'(x) \, dx = u(1) - u(-1) = 2$, niin on olemassa $x_0 \in]-1, 1[$ siten, että $u'(x)^2 \geq \delta \geq 0$ jossakin pienessä x_0:n ympäristössä $[a, b] \subset [-1, 1]$. Tästä saamme

$$\int_{-1}^1 u'(x)^2 x^4 \, dx \geq \int_a^b u'(x)^2 x^4 \, dx \geq \delta \int_a^b x^4 \, dx > 0.$$

Näin ollen tutkimallamme variaatio-ongelmalla ei ole ratkaisua.

2. Ratkaisun yksikäsitteisyys (tai ratkaisujen lukumäärä)

Mikäli onnistumme osoittamaan, että tutkimallamme ongelmalla on olemassa ratkaisuja, tulee seuraavaksi vastaan kysymys niiden lukumäärästä. Ratkaisun yksikäsitteisyys olisi toivottava tilanne, sillä silloin tiedetään, että kaikki ratkaisun tuottavat menetelmät vievät samaan lopputulokseen. Jos ratkaisuja kuitenkin on useita, voidaan niitä yrittää jotenkin luokitella tai mahdollisesti etsiä lisäehtoja, jotka toteuttavia ratkaisuja on vain yksi kappale.

Esimerkki 1.0.2. Edellä mainittu Laplace-operaattorin ominaisarvo-ongelma muotoillaan usein osamäärän

$$\frac{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx}{\int_\Omega |\varphi|^2\,dx}$$

minimoinnin kautta. Jos funktio u minimoi tämä Rayleighin osamääränä tunnetun funktionaalin, niin samoin tekee myös funktio Cu mille tahansa vakiolle $C \in \mathbb{R}$. Näin ollen minimoija, jos sellaista ylipäänsä on olemassa, ei voi olla yksikäsitteinen.

3. Riittävät ja välttämättömät ehdot

Usein tulee vastaan tilanne, jossa halutaan tutkia onko jokin konkreettinen funktio annetun variaatio-ongelman ratkaisu vai ei. Suoraan määritelmän avulla tämän selvittäminen ei yleensä ainakaan helposti onnistu, ja siksi tarvitaankin ehtoja, jotka funktion on toteutettava voidakseen olla minimoija (välttämättömät ehdot) ja toisaalta ehtoja, joiden voimassaolo takaa sen, että kyseinen funktio on minimoija (riittävät ehdot).

Välttämättömistä ehdoista ehdottomasti tärkein on ns. Eulerin yhtälö, joka vastaa differentiaalilaskennasta tuttua ehtoa gradientin häviämisestä funktion minimikohdassa. Eulerin yhtälön toteutuminen ei yleisesti ottaen ole riittävä ehto minimointiominaisuudelle, mutta monissa tärkeissä tapauksissa näin kuitenkin on. Muita riittäviä ehtoja ovat tietyt toisen variaation kautta tulevat ehdot, mutta niihin emme tällä kurssilla puutu.

4. Stabiilisuus

Monissa käytännön tilanteissa jotkin variaatio-ongelman parametreista saadaan esimerkiksi mittausten avulla ja ne ovat näin ollen alttiita mittausvirheille. Olisi siis suotavaa, että mittausvirheistä johtuva pieni muutos ongelman parametreissa muuttaisi ongelman ratkaisua vain vähän. Esimerkiksi pyörähdyskappaleen pinnan pinta-alaa minimoitaessa tämä tarkoittaa sitä, että minimoiva funktio muuttuisi jatkuvasti annettujen reunaehtojen α ja β muuttuessa. Reuna- ja sidosehtojen lisäksi ongelman stabiilisuutta voidaan tarkastella vaikkapa alueen Ω (esimerkiksi Laplace operaattorin ominaisarvojen yhteydessä) tai funktionaalin määrittävän integrandin suhteen.

Toinen käytännön syy stabiilisuus tarkasteluihin on niiden merkitys numeeristen ratkaisumenetelmien yhteydessä. Numeeriset menetelmät perustuvat yleensä ongelman sopivaan approksimointiin yksinkertaisimmilla ongelmilla ja ne antavat parhaimmassakin tapauksessa vain approksimatiivisen ratkaisun, joka voi poiketa todellisesta ratkaisusta huomattavasti, jos variaatio-ongelma on epästabiili.

Tällä kurssilla emme juurikaan ehdi syventyä ratkaisujen stabiilisuuskysymyksiin.

5. Ratkaisun säännöllisyys

Variaatiolaskennassa käytettävät menetelmät pakottavat meidät hyvin usein laajentamaan tarkasteltavien funktioiden joukkoa, jotta ratkaisun olemassaolo saataisiin todistettua. Tämän jälkeen pyritään kuitenkin osoittamaan, että löydetty ratkaisu kuuluu ongelman lähtökohdan kannalta “luonnolliseen” luokkaan, eli siihen funktiojoukkoon, jolle ongelma on alunperin muotoiltu. Toisaalta on perusteltua olettaa, että variaatio-ongelman ratkaisulla on joitakin “tavallisista” funktioista poikkeavia ominaisuuksia, jotka ovat seurausta sen minimointiominaisuudesta. Tällaisia ovat erilaiset jatkuvuus-, differentioituvuus- ja integroituvuus ominaisuudet, sekä tietyt kvalitatiiviset omainaisuudet kuten maksimi- ja minimiperiaatteet ja ns. Harnackin epäyhtälö.

Tämä ns. säännöllisyysteoria muodostaa variaatiolaskennan kenties vaikeimman ja laajimman osalueen. Tällä kurssilla tutustumme siihen lyhyesti yksiulotteisten ongelmien yhteydessä.

6. Eksplisiittiset ratkaisut

Vaikka ratkaisun (eli minimoijan) olemassaolo ja yksikäsitteisyys pystyttäisiinkin todistamaan, ei ratkaisua yleensä osata kirjoittaa eksplisiittisesti ja on tyydyttävä sen kvalitatiivisten ominaisuuksien tutkimiseen. Tietyissä erikoistapauksissa ongelma voidaan kuitenkin ratkaista lähinnä Euler-Lagrangen yhtälöä hyödyntäen. Tällä kurssilla aihetta tarkastellaan muutaman esimerkin kautta.

Huomautus 1.0.3. Yleisessä teoriassa riittää tutkia minimointiongelmia, sillä jos tehtävänä on maksimoida funktionaali

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$$

joukossa $\mathcal{A}$, on tämä yhtäpitävää funktionaalin

$$\widetilde{I}(u) = -\int_\Omega F(x, u, \nabla u)\, dx$$

minimoimisen kanssa.

Harjoitustehtäviä

1. Tarkastellaan tason kaikkia kolmioita, joiden piiri on 1. Osoita, että tällaisten kolmioiden joukossa on olemassa pinta-alan maksimoiva kolmio.

2. Tarkastellaan kolmioita ΔABC, missä $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (x, y)$, $y > 0$, ja kolmion piiri on 3. Osoita, että tällaisten kolmioiden joukossa suurin pinta-ala on tasakylkisellä kolmiolla (siis $C = (1/2, \sqrt{3}/2)$).

3. Olkoon

$$\mathbb{K} = \{v : [0, 1] \to [0, \infty[,\ v \in C([0, 1]) \text{ ja } v(0) = v(1) = 1\},$$

ja

$$I(v) = \pi \int_0^1 v(x)^2\, dx$$

(ts. $I(v)$ on käyrän v pyörähtäessä syntyvän kappaleen tilavuus). Osoita, että jokaiselle $v_0 \in \mathbb{K}$ pätee $I(v_0) > \inf_{v\in\mathbb{K}} I(v)$.

Luku 2

Ääriarvo-ongelmista $\mathbb{R}^n$:ssä

Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ annettu funktio. Tehtävänä on tutkia, millä ehdoilla

(i) on olemassa piste $x_0 \in \mathbb{R}^n$, jossa f saavuttaa pienimmän arvonsa, ts.

$$f(x_0) \leq f(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) minimipiste x_0 on yksikäsitteinen, ts.

$$f(x_0) < f(x) \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n,\ x_0 \neq x.$$

Lisäksi halutaan löytää riittäviä ja/tai välttämättömiä ehtoja minimipisteelle x_0. Tämä differentiaalilaskennan kurssilta tuttu ongelma toimii ikäänkuin harjoitusvastustajana ennen varsinaisten variaatio-ongelmien kimppuun käymistä, ja sen yhteydessä on helpompi tutustua myöhemmin runsaasti tarvittaviin käsitteisiin puolijatkuvuus ja konveksisuus.

2.1 Puolijatkuvuus

Määritelmä 2.1.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa epätyhjä joukko. Funktio $g : A \to \mathbb{R}$ on *alhaalta puolijatkua*, jos

$$\liminf_{\substack{y \to x \\ y \in A}} g(y) \geq g(x) \text{ kaikilla } x \in A,$$

missä

$$\liminf_{\substack{y \to x \\ y \in A}} g(y) := \lim_{r \to 0} \big(\inf\{g(y) :\ y \in A, 0 < |x - y| < r\}\big).$$

Vastaavasti, funktio $g : A \to \mathbb{R}$ on *ylhäältä puolijatkuva*, jos $-g$ on alhaalta puolijatkuva, toisin sanoen,

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in A}} g(y) \leq g(x) \text{ kaikilla } x \in A,$$

missä

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in A}} g(y) := \lim_{r \to 0} \big(\sup\{g(y) :\ y \in A, 0 < |x - y| < r\}\big).$$

Huomautus 2.1.2. (i) Puolijatkuvuus määritellään kirjallisuudessa usein funktioille, jotka voivat reaaliarvojen lisäksi saada myös arvot $\pm\infty$.

(ii) Funktio $g : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva jos ja vain jos g on sekä alhaalta että ylhäältä puolijatkuva.

(iii) Aivan kuten jatkuvuus, myös puolijatkuvuus voidaan karakterisoida jonoja käyttäen. Funktio $g : A \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva jos ja vain jos kaikilla $x_0 \in A$ pätee: jos $x_j \to x_0$, $x_j \in A$, niin

$$g(x_0) \leq \liminf_{j\to\infty} g(x_j) := \lim_{j\to\infty}(\inf_{k\geq j} \{g(x_k)\}).$$

Lemma 2.1.3. *Funktio $g : A \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva jos ja vain jos*

$$g^{-1}(]-\infty, c]) = \{x \in A : \ g(x) \leq c\}$$

on suljettu (relatiivitopologiassa).

Todistus. Oletetaan ensin, että $g : A \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva, ja olkoon jono $(x_j) \subset \{x \in A : \ g(x) \leq c\}$ siten, että $x_j \to x_0 \in A$. Tavoitteena on osoittaa, että $g(x_0) \leq c$. Ilman yleisyyden menetystä voimme olettaa, että $x_j \neq x_0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Koska oletuksen mukaan

$$g(x_0) \leq \liminf_{y\to x_0} g(y) = \lim_{r\to 0}(\inf\{g(y) : \ y \in A, 0 < |x_0 - y| < r\}),$$

ja $0 < |x_0 - x_j| < r$ kun $j \in \mathbb{N}$ on riittävän suuri, on $g(x_0) \leq c$.

Käänteisen puolen todistamiseksi tehdään antiteesi ja oletetaan, että löytyy $x_0 \in A$ siten, että

$$\liminf_{y\to x_0} g(y) < g(x_0) - \varepsilon,$$

jolloin

$$\inf\{g(y) : \ y \in A, \ 0 < |x_0 - y| < r\} < g(x_0) - \varepsilon/2$$

kaikilla riittävän pienillä $r > 0$. Siten löytyy jono $(y_j) \subset A$, $0 < |x_0 - y_j| < 1/j$ siten, että $g(y_j) \leq g(x_0) - \varepsilon/2$ kaikille riittävän suurille $j \in \mathbb{N}$. Koska joukko

$$\{x \in A : \ g(x) \leq g(x_0) - \varepsilon/2\}$$

on oletuksen mukaan suljettu, on oltava

$$g(x_0) \leq g(x_0) - \varepsilon/2,$$

mikä on absurdia. Siispä $\liminf_{y\to x_0} g(y) \geq g(x_0)$. □

Esimerkki 2.1.4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ ja

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ g(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

(ts. $g = \chi_E$ on joukon E karakteristinen funktio). Tällöin edellisen lemman nojalla g on alhaalta puolijatkuva jos ja vain jos E on avoin.

Seuraavaa tulosta emme tällä kurssilla tarvitse, mutta se on silti hyvä tietää. Todistus jää lukijalle harjoitustehtäväksi.

Lemma 2.1.5. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Tällöin $g : \Omega \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva jos ja vain jos on olemassa kasvava jono $g_j : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita siten, että*

$$\lim_{j\to\infty} g_j(x) = g(x) \quad \textit{kaikilla } x \in \Omega.$$

Huomautus 2.1.6. Itse asiassa yllä olevan lemman tilanteessa löytyy kasvava jono funktioita $g_j \in C^\infty$, joka suppenee pisteittäin kohti alhaalta puolijatkuvaa funktiota g. Ylhäältä puolijatkuvalle funktiolle pätee luonnollisesti vastaava tulos eli löytyy vähenevä jono siistejä fuktioita, joka konvergoi pisteittäin.

2.2 Konveksit joukot ja funktiot

Määritelmä 2.2.1. Joukko $E \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi*, jos

$$x, y \in E \implies \lambda x + (1-\lambda)y \in E \text{ kaikille } \lambda \in [0,1].$$

Määritelmä 2.2.2. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko. Funktio $g : E \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, jos

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \qquad \text{kaikille } x, y \in E \text{ ja kaikille } \lambda \in [0,1].$$

Konveksit funktiot ja konveksit joukot liittyvät läheisesti toisiinsa. On nimittäin helppo nähdä, että funktio $g : E \to \mathbb{R}$ on konveksi jos ja vain jos sen *epigrafi*

$$\mathrm{Epi}(g) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in E, \ t \geq g(x)\}$$

on konveksi joukko.

Annetun funktion konveksisuuden tutkiminen tapahtuu hyvin usein sen derivaattaa hyväksi käyttäen.

Lemma 2.2.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja konveksi, ja $g : \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva. Tällöin g on konveksi jos ja vain jos*

$$(\nabla g(x) - \nabla g(y)) \cdot (x-y) \geq 0 \qquad \textit{kaikilla } x, y \in \Omega.$$

Tapauksessa $n = 1$ Lemma 2.2.3 sanoo yksinkertaisesti, että jatkuvasti derivoituva funktio $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ on konveksi jos ja vain jos sen derivaattafunktio g' on kasvava. Sama idea tulee vastaan myös korkeammissa ulottuvuuksissa. Koska

$$\begin{aligned}(\nabla g(x) - \nabla g(y)) \cdot (x-y) &= (\nabla g(x) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} - \nabla g(y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|})|x-y| \\ &= |x-y|(D_e g(x) - D_e g(y)),\end{aligned}$$

missä $e = \frac{x-y}{|x-y|}$ ja $D_e g(x)$ on g:n suuntaisderivaatta vektorin e suuntaan pisteessä x, nähdään Lemman 2.2.3 avulla, että g on konveksi jos ja vain jos funktio $t \to D_e g(y + t(x-y))$ on kasvava välillä $[0,1]$ kaikille $x, y \in E$.

Todistus. Yllä olevan päättelyn perusteella riittää todistaa väite tapauksessa $n = 1$. Oletetaan ensin, että funktion $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivaatta on kasvava, ja olkoon $x, y \in]a, b[$, $y < x$ ja $t \in]0, 1[$. Merkitään $z = tx + (1 - t)y = y + t(x - y)$, jolloin todistettava epäyhtälö saa muodon

$$g(z) \leq tg(x) + (1 - t)g(y).$$

Väliarvolauseen mukaan on olemassa $\eta \in]y, z[$ ja $\xi \in]z, x[$ siten, että

$$\frac{g(z) - g(y)}{z - y} = g'(\eta) \quad \text{ja} \qquad g'(\xi) = \frac{g(x) - g(z)}{x - z}.$$

Koska g' on kasvava, on $g'(\eta) \leq g'(\xi)$, ja siten

$$\frac{g(z) - g(y)}{t(x - y)} \leq \frac{g(x) - g(z)}{(1 - t)(x - y)}.$$

Kertomalla yhtälö puolittain termillä $x - y$ ja järjestelemällä sopivasti saadaan

$$g(z) \leq tg(x) + (1 - t)g(y).$$

Käänteistä implikaatiota varten kiinnitetään $x, y \in]a, b[$ siten, että $y < x$. Koska nyt oletuksen mukaan g on konveksi, pätee

$$g(z) \leq tg(x) + (1 - t)g(y) \qquad \text{kaikilla } z = tx + (1 - t)y,\ t \in]0, 1[,$$

joka termien uudelleen järjestelyn jälkeen voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{g(z) - g(y)}{z - y} \leq \frac{g(x) - g(z)}{x - z}.$$

Kun yllä $z \to x$ eli $t \to 1$, saadaan

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \leq g'(x).$$

Vastaavasti, kun $z \to y$ eli $t \to 0$, saadaan epäyhtälö

$$g'(y) \leq \frac{g(x) - g(y)}{x - y}$$

Näin ollen siis $g'(y) \leq g'(x)$. □

Siinä tapauksessa, että funktio $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ sattuu olemaan kahdesti jatkuvasti derivoituva, kertoo Lemma 2.2.3, että g on konveksi jos ja vain jos $g''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \Omega$. Yleisemmin on voimassa

Seuraus 2.2.4. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja konveksi, sekä $g \in C^2(\Omega)$. Tällöin funktio g on konveksi jos ja vain jos toisen kertaluvun osittaisderivaattojen muodostama symmetrinen $n \times n$ -matriisi $D^2 g(x)$ on positiivisesti semidefiniitti kaikille $x \in \Omega$.*

Yllä siis

$$\left[D^2 g(x)\right]_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

toisin sanoen

$$D^2 g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_2}(x) \cdots & \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Lisäksi muistetaan, että matriisi $D^2 g(x)$ on positiivisesti semidefiniitti jos ja vain jos

$$\left(D^2 g(x)\xi\right) \cdot \xi \geq 0 \qquad \text{kaikilla} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

mikä puolestaan on yhtäpitävää sen kanssa, että matriisin $D^2 g(x)$ kaikki ominaisarvot ovat ei-negatiivisia. Yllä olevan ehdon ja funktion

$$h(t) = D_e g(x + te) = \nabla g(x + te) \cdot e = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x + te) e_i$$

kasvavuuden välinen yhteys tulee esille, kun huomataan, että

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x + te) e_j e_i = \left(D^2 g(x + te)e\right) \cdot e$$

kaikille suuntavektoreille $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Jos $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, niin voidaan valita $e = \frac{\xi}{|\xi|}$, jolloin saadaan

$$\left(D^2 g(x)\xi\right) \cdot \xi = |\xi|^2 \left(D^2 g(x)e\right) \cdot e = |\xi|^2 h'(0).$$

Lemma 2.2.5. *Olkoon $g : \Omega \to \mathbb{R}$ konveksi ja $g \in C^1(\Omega)$. Tällöin*

$$g(x) \geq g(x_0) + \nabla g(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ kaikilla } x, x_0 \in \Omega.$$

Todistus. Kiinnitetään $x, x_0 \in \Omega$ ja olkoon $t \in [0, 1]$. Koska $g(tx + (1 - t)x_0) \leq tg(x) + (1 - t)g(x_0)$ eli $g(x_0 + t(x - x_0)) - g(x_0) \leq t\,(g(x) - g(x_0))$, on voimassa

$$\frac{g(x_0 + t(x - x_0)) - g(x_0)}{t} \leq g(x) - g(x_0).$$

Kun $t \to 0$, saamme tästä halutun epäyhtälön $\nabla g(x_0) \cdot (x - x_0) \leq g(x) - g(x_0)$. □

Edellä todistettiin tuloksia jatkuvasti differentioituville konvekseille funktioille, mutta kaikki konveksit funktiot eivät suinkaan ole differentioituvia; helppo esimerkki on funktio $g(x) = |x|$. Derivaattoja toiseen kertalukuun saakka löytyy aina kuitenkin melkein kaikissa pisteissä.

Lause 2.2.6. *Olkoon $g : \Omega \to \mathbb{R}$ konveksi funktio, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja konveksi. Tällöin*

(i) g on jatkuva

(ii) *g on differentiotuva m.k. Ω:ssa*

(iii) *g on kahdesti differentioituva m.k. Ω:ssa: m.k. $x_0 \in \Omega$ on olemassa symmetrinen $n \times n$-matriisi A siten, että*

$$g(x) = g(x_0) + \nabla g(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}A(x - x_0) \cdot (x - x_0) + \wr(|x - x_0|^2),$$

toisin sanoen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - \left(g(x_0) + \nabla g(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}A(x - x_0) \cdot (x - x_0)\right)}{|x - x_0|^2} = 0.$$

Tämän tuloksen todistus ei ole aivan helppo ja se sivuutetaan, katso esim. [7].

Määritelmä 2.2.7. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko. Funktio $g : E \to \mathbb{R}$ on *aidosti konveksi*, jos

$$g(tx + (1 - t)y) < tg(x) + (1 - t)g(y)$$

kaikilla $x, y \in E,\ x \neq y$, ja kaikilla $t \in]0, 1[$.

2.3 Minimin olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Lause 2.3.1. *Jos funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on alhaalta puolijatkuva ja $\lim_{|x| \to \infty} g(x) = +\infty$, niin g saavuttaa pienimmän arvonsa.*

Todistus. Olkoon $M_0 = g(0) \in \mathbb{R}$. Koska $\lim_{|x| \to \infty} g(x) = +\infty$, löytyy $R_0 > 0$ siten, että $g(x) \leq g(0)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$.

Seuraavaksi tarvitaan pientä aputulosta: Jos $K \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti ja $g : K \to \mathbb{R}$ alhaalta puolijatkuva, niin g saavuttaa joukossa K pienimmän arvonsa eli on olemassa $\hat{x} \in K$ siten, että $g(\hat{x}) = \inf_{x \in K} g(x)$. Tämän toteen näyttämiseksi määritellään

$$c_j = \begin{cases} \inf_{x \in K} g(X) + \frac{1}{j} & , \text{jos } \inf_{x \in K} g(x) > -\infty, \\ -j & , \text{jos } \inf_{x \in K} g(x) = -\infty. \end{cases}$$

Tällöin $(c_j) \subset \mathbb{R}$ on vähenevä jono ja $\lim_{j \to \infty} c_j = \inf_{x \in K} g(x)$. Infimumin määritelmän perusteella kaikille $j \in \mathbb{N}$ on olemassa $x_j \in K$ siten, että $g(x_j) < c_j$. Koska K on kompakti (ja siten jonokompakti), on olemassa osajono $(x_{j_k}) \subset (x_j)$, joka suppenee kohti jotain pistettä $x_0 \in K$. Funktion g alhaalta puolijatkuvuuden nojalla

$$g(x_0) \leq \liminf_{y \to x_0} g(y) \leq \liminf_{k \to \infty} g(x_{j_k}) \leq \liminf_{y \to x_0} c_{j_k} = \inf_{x \in K} g(x).$$

Tämä todistaa aputuloksen. Huomaa kuitenkin, että alhaalta puolijatkuva funktio *ei* välttämättä saavuta suurinta arvoaan kompaktissa joukossa.

Jatketaan alkuperäisen lauseen todistusta soveltamalla aputulosta kompaktiin joukkoon $\overline{B}(0, R)$. Näemme, että on olemassa $x_0 \in \overline{B}(0, R)$ siten, että

$$g(x_0) \leq g(y) \qquad \text{kaikilla } y \in \overline{B}(0, R).$$

Koska erityisesti $g(x_0) \leq g(0)$, seuraa tästä, että g saavuttaa pienimmän arvonsa $\mathbb{R}^n$:ssä pisteessä x_0. □

Huomautus 2.3.2. Jos oletetaan lisäksi, että g on aidosti konveksi, niin edellä löydetty minimipiste on yksikäsitteinen. Nimittäin jos olisi pisteet $x_1 \neq x_2$ siten, että $g(x_1) = g(x_2) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$, niin funktion g aidon konveksisuuden nojalla

$$g\left(\tfrac{x_1+x_2}{2}\right) < \tfrac{1}{2}g(x_1) + \tfrac{1}{2}g(x_2) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} g(x),$$

mikä on mahdotonta.

Harjoitustehtäviä

1. Olkoot $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ alhaalta puolijatkuvia funktioita joukossa $A \subset \mathbb{R}^n$. Osoita, että tällöin myös funktiot $f + g$ ja $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ovat alhaalta puolijatkuvia.

2. Anna esimerkki alhaalta puolijatkuvasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joka ei saavuta suurinta arvoaan välillä $[0,1]$.

3. Olkoon $f_j : A \to \mathbb{R}$ kasvava jono jatkuvia funktioita, jotka suppenevat pisteittäin kohti funktiota $f : A \to \mathbb{R}$, ts.

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Osoita, että f on alhaalta puolijatkuva.

4. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ epätyhjä konveksi joukko. Osoita (vaikkapa induktiolla), että jos $m \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ovat siten, että $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, niin

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in E.$$

5. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ mikä tahansa epätyhjä joukko. Määritellään *E:n konveksi verho* (convex hull) coE asettamalla

$$coE = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i : m \in \mathbb{N},\ x_i \in E,\ \lambda_i \geq 0 \text{ ja } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}.$$

(a) Osoita, että

$$coE = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F,$$

missä

$$\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R}^n : E \subset F \text{ ja } F \text{ konveksi}\}.$$

(b) Päteekö $co(E_1 \cap E_2) = co(E_1) \cap co(E_2)$ kaikille joukoille $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$?

6. Olkoon $E \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko ja $g_j : E \to \mathbb{R}$ jono konvekseja funktioita. Osoita, että

(i) $g_i + g_j$ on konveksi.

(ii) λg_i on konveksi kaikille $\lambda \geq 0$.

(iii) jos $g(x) := \sup_{j \in \mathbb{N}} g_j(x) < \infty$ jokaiselle $x \in E$, niin $g : E \to \mathbb{R}$ on myös konveksi.

7. Olkoon $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksi ja jatkuvasti differentioituva. Osoita, että

(i) jos $\nabla g(x_0) = 0$, niin g saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä x_0.

(ii) jos g on ylhäältä rajoitettu (ts. on olemassa $M > 0$ siten, että $g(x) \leq M$ kaikille $x \in \mathbb{R}^n$), niin g on vakiofunktio.

8. Olkoon $g :]0, 1[\to \mathbb{R}$ konveksi. Osoita, että g on jatkuva funktio.

Luku 3

Funktioavaruuksista

3.1 Valittuja paloja funktionaalianalyysistä

3.1.1 Banach-avaruudet

Olkoon X mielivaltainen reaalikertoiminen vektoriavaruus, toisin sanoen

(i) X on Abelin ryhmä "yhteenlaskun" $+ : X \times X \to X$ suhteen.

(ii) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$ kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f \in X$.

(iii) $(\lambda + \mu) f = \lambda f + \mu f$; $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$.

(iv) $1 f = f$ kaikilla $f \in X$.

Näistä ehdoista seuraa erityisesti, että

- jos $f, g \in X$, niin $f + g \in X$.
- jos $f \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin $\lambda f \in X$.
- on olemassa nolla-alkio $0 \in X$ siten, että $f + 0 = f$ kaikilla $f \in X$.
- kaikilla $f \in X$ on olemassa vasta-alkio $-f \in X$ siten, että $f + (-f) = 0$.

Huomautus 3.1.1. Tällä kurssilla X on poikkeuksetta jokin funktioavaruus,

$$X \subset \{f : \Omega \to \mathbb{R}^m\}, \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Tällöin määritellään

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \text{ jne.}$$

Määritelmä 3.1.2. Kuvaus $||\cdot|| : X \to [0, \infty[$ on *normi* avaruudessa X, jos

(1) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$ kaikilla $f, g \in X$.

(2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ kaikilla $f \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $\|f\| = 0$ jos ja vain jos $f = 0$.

$(X, \|\cdot\|)$ on tällöin normiavaruus.

Huomautus 3.1.3. Samaan avaruuteen (funktiojoukkoon) voidaan liittää useita normeja. Esimerkiksi jos $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\} =: C([0,1])$, niin

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{ja} \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$$

ovat normeja avaruudessa X.

Määritelmä 3.1.4. (i) Jono $(f_k)_{k=1}^\infty \subset X$ *suppenee* (vahvasti/normin mielessä) kohti alkiota $f \in X$, merkitään $f_k \to f$, jos $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0$.

(ii) Jono (f_n) on *Cauchy-jono*, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $N = N(\varepsilon) > 0$ siten, että

$$\|f_k - f_j\| < \varepsilon \qquad \text{kaikille } k, j \geq N.$$

Määritelmä 3.1.5. Normiavaruus $(X, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee; ts. jos (f_k) on Cauchy jono, on olemassa $f \in X$ siten, että $f_k \to f$.
Täydellisiä normiavaruuksia kutsutaan *Banach-avaruuksiksi*.

Esimerkki 3.1.6. $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ on Banach, mutta $(C(\Omega), \|\cdot\|_1)$ ei ole.

3.1.2 Duaali

Määritelmä 3.1.7. Banach-avaruuden $(X, \|\cdot\|)$ *duaali* X^* koostuu kaikista rajoitetuista lineaarikuvauksista $x^* : X \to \mathbb{R}$. Toisin sanoen $x^* \in X^*$ jos ja vain jos

1. $x^*(\lambda f + \mu g) = \lambda x^*(f) + \mu x^*(g)$ kaikille $f, g \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. $\|x^*\|_{X^*} := \sup\{x^*(f) : f \in X, \ \|f\|_X \leq 1\} < \infty$.

Esimerkki 3.1.8. Olkoon $(X, \|\cdot\|) = (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_\infty)$, ja asetetaan

$$x^*(f) := \int_\Omega f(x)\, dx,$$

mikä selvästi määrittelee lineaarikuvauksen $x^* : X \to \mathbb{R}$. Jos $f \in X$ on siten, että $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} \leq 1$, niin

$$x^*(f) \leq \int_\Omega 1\, dx = |\Omega|$$

missä $|\Omega|$ tarkoittaa avoimen joukon Ω n-ulotteista Lebesgue mittaa. Näin ollen $x^* \in X^*$ jos $|\Omega| < \infty$.

Huomautus 3.1.9. (i) Duaaliavaruus $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ on aina Banach-avaruus (vaikka X olisi itse pelkästään normiavaruus), kun määritellään

$$(x^* + y^*)(x) := x^*(x) + y^*(x)$$

jne.

(ii) Usein käytetään merkintää $\langle x^*, f\rangle := x^*(f)$. Yksi syy tähän on se, että Cauchy-Schwartzin epäyhtälö yleistyy muotoon

$$\langle x^*, f\rangle = x^*(\|f\|\frac{f}{\|f\|}) = \|f\|\, x^*\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \leq \|f\|\,\|x^*\|_{X^*}.$$

(iii) Lineaarikuvaus $x^* : X \to \mathbb{R}$ on rajoitettu jos ja vain jos x^* on jatkuva: Cauchy-Schwartzin nojalla nähdään ensin, että jos $\|x^*\|_{X^*} < \infty$, niin

$$|x^*(f) - x^*(g)| = |x^*(f-g)| \leq \|x^*\|_{X^*}\,\|f-g\| \to 0 \qquad \text{kun} \quad \|f-g\| \to 0.$$

Jos taas x^* on jatkuva, mutta ei ole rajoitettu, niin on olemassa jono $f_j \in X$, $\|f_j\|_X \leq 1$ siten, että $x^*(f_j) \geq j$. Olkoon $g_j = \frac{1}{j} f_j \in X$. Tällöin $\|g_j\| = \frac{1}{j}\|f_j\| \leq \frac{1}{j} \to 0$ kun $j \to \infty$, mutta

$$x^*(g_j) = \frac{1}{j} x^*(f_j) \geq 1 > 0 = x^*(0),$$

mikä on ristiriidassa x^*:n jatkuvuuden kanssa.

Määritelmä 3.1.10. Banach-avaruus $(X, \|\cdot\|)$ on *refleksiivinen*, jos $(X^*)^* = X$. Tässä yhtäsuuruudella tarkoitetaan, että avaruudet ovat isometrisesti isomorfiset: on olemassa bijektiivinen lineaarikuvaus $T : X \to X^{**}$ siten, että $\|Tf\|_{X^{**}} = \|f\|_X$ kaikilla $x \in X$.

Huomautus 3.1.11. Avaruus $(X^*)^*$ on siis duaaliavaruuden X^* (joka on itsekin normiavaruus) duaaliavaruus. Siten $\hat{x} \in X^{**} = (X^*)^*$ jos ja vain jos

$$\hat{x}(\lambda x^* + \mu y^*) = \lambda\hat{x}(x^*) + \mu\hat{x}(y^*) \qquad \text{kaikilla } x^*, y^* \in X^* \text{ ja } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

ja

$$\|\hat{x}\|_{X^{**}} := \sup\{\hat{x}(x^*) : \|x^*\|_{X^*} \leq 1\} < \infty.$$

3.1.3 Heikko konvergenssi

Määritelmä 3.1.12. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ Banach ja $(X^*, \|\cdot\|_*)$ sen duaali. Jono $(f_j) \subset X$ *suppenee heikosti* kohti alkiota $f \in X$, merkitään $f_j \rightharpoonup f$, jos

$$x^*(f_k) \to x^*(f) \quad \text{kaikilla } x^* \in X^*.$$

Huomautus 3.1.13. Koska yllä olevassa määritelmässä $x^*(f_k)$ ja $x^*(f)R$ ovar reaalilukuja, konvergenssi $x^*(f_k) \to x^*(f)$ tarkoittaa normaalia reaalilukujen konvergenssiä.

Lause 3.1.14. *Olkoon* $(f_j) \subset X$ *siten, että* $f_j \rightharpoonup f \in X$. *Tällöin*

(i) *jono* (f_j) *on rajoitettu, ts. on olemassa* $M > 0$ *siten, että* $\|f_j\| \leq M$ *kaikilla* j.

(ii) $\|f\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_j\|$, *(ts. normi on heikosti alhaalta puolijatkuva).*

Määritelmä 3.1.15. (a) Joukko $K \subset X$ on *heikosti jonokompakti*, jos jokaisella jonolla $(f_j) \subset K$ on osajono (f_{j_k}), joka suppenee heikosti kohti jotakin $f \in K$.

(b) Joukko $K \subset X$ on *heikosti suljettu*, jos K on suljettu heikon suppenemisen suhteen: ehdoista $(f_j) \subset K$, $f_j \rightharpoonup f$ seuraa aina $f \in K$.

Huomautus 3.1.16. (i) Jos $f_j \to f$ vahvasti/normin mielessä, toisin sanoen $\|f_j - f\| \to 0$ kun $j \to \infty$, niin $f_j \rightharpoonup f$:
Olkoon $x^* \in X$. Tällöin

$$|x^*(f_j) - x^*(f)| = |x^*(f_j - f)| \leq \|x^*\|_{X^*}\|f_j - f\| \to 0,$$

sillä $\|x^*\|_{X^*} < \infty$. Käänteinen tulos ei yleisesti ottaen pidä paikkaansa. Esimerkkejä heikosti suppenevista jonoista, jotka eivät suppene vahvasti tulee vastaan hieman myöhemmin.

(ii) Jos $K \subset X$ on heikosti suljettu, niin K on suljettu (normitopologian suhteen). Käänteinen tulos ei jälleenkään päde yleisesti.

(iii) Heikko raja-arvo on yksikäsitteinen: jos $f_j \rightharpoonup f$ ja $f_j \rightharpoonup g$, niin $f = g$.

Lause 3.1.17. *Olkoon* X *refleksiivinen Banach-avaruus. Tälloin* $K \subset X$ *on heikosti jonokompakti jos ja vain jos* K *on rajoitettu ja heikosti suljettu.*

Muista, että joukko $K \subset X$ on rajoitettu jos on olemassa $M > 0$ siten, että $\|x\| \leq M$ kaikilla $x \in K$. Se, että jokainen heikosti jonokompakti joukko on rajoitettu ja heikosti suljettu on totta myös ilman oletusta X refleksiivisyydestä ja suhteellisen helppo todistaa. Käänteinen suunta sen sijaan on hieman vaikeampi. Lauseen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [8].

Huomautus 3.1.18. Voidaan osoittaa, että avaruuden $(X, \|\cdot\|)$ normin mielessä suljetut ja rajoitetut joukot ovat kaikki kompakteja jos ja vain jos avaruus X on äärellisulotteinen. Äärettönulotteisen avaruuden tapauksessa on siis pakko siirtyä käyttämään heikon suppenemisen käsitettä. Äärellisulotteisessa avaruudessa heikko ja vahva suppeneminen ovat sama asia.

Lause 3.1.19. *(Mazurin lemma) Jos* $f_j \rightharpoonup f$, *niin on olemassa* $(g_j) \subset X$ *siten, että*

$$g_j = \sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} f_k, \quad \lambda_{k,j} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} = 1$$

ja

$$g_j \to f \quad \textit{eli} \quad \|g_j - f\| \to 0.$$

Seuraus 3.1.20. *Jos* $K \subset X$ *on konveksi ja suljettu, niin* K *on heikosti suljettu.*

Todistus. Olkoon $(f_j) \subset K$ siten, että $f_j \rightharpoonup f \in X$. Halutaan osoittaa, että $f \in K$. Mazurin lemman nojalla löytyy luvut $\lambda_{k,j} \geq 0$ siten, että

$$\sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} = 1 \quad \text{ja} \quad g_j \to f, \quad \text{missä} \quad g_j = \sum_{k=1}^{j} \lambda_{k,j} f_j.$$

Koska K on konveksi ja $(f_j) \subset K$, niin $g_j \in K$ kaikilla j. Edelleen, koska K on suljettu ja $g_j \to f$, niin $f \in K$. □

Edelliset lauseet yhdistämällä saadaan seuraavan abstrakti minimin olemassaolotulos:

Lause 3.1.21. *Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ refleksiivinen Banach-avaruus ja olkoon $K \subset X$ suljettu ja konveksi joukko. Oletetaan, että kuvaus $I : K \to \mathbb{R}$ on*

(i) koersiivinen: $I(u) \to \infty$ kun $\|u\| \to \infty$, $u \in K$.

(ii) heikosti alhaalta puolijatkuva joukossa K: jokaiselle jonolle $(u_j) \subset K$ siten, että $u_j \rightharpoonup u \in K$ kun $j \to \infty$ pätee $I(u) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_j)$.

Tällöin $\inf_{u \in K} I(u) > -\infty$ ja on olemassa $u_0 \in K$ siten, että $I(u_0) = \inf_{u\in K} I(u)$.

Todistus. Merkitään

$$c_j = \begin{cases} \inf_{u\in K} I(u) + \frac{1}{j}, & \text{jos} \inf_{u\in K} I(u) > -\infty, \\ -j, & \text{jos} \inf_{u\in K} I(u) = -\infty. \end{cases}$$

Infimumin määritelmän nojalla on olemassa $u_j \in K$ siten, että $I(u_j) \leq c_j$, jolloin erityisesti

$$\lim_{j\to\infty} I(u_j) = \inf_{u\in K} I(u).$$

Funktion I koersiivisuuden nojalla jono (u_j) on rajoitettu, eli on olemassa $M > 0$ siten, että $\|u_j\| \leq M$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Nyt jono (u_j) sisältyy joukkoon $K \cap \overline{B}(0, M)$, joka on rajoitettu, konveksi ja suljettu, ja siten rajoitettu ja heikosti suljettu. Koska X on refleksiivinen, Lause 3.1.17 takaa, että joukko $K \cap \overline{B}(0, M)$ on heikosti jonokompakti. Tällöin on olemassa osajono $(u_{j_k}) \subset (u_j)$ ja $u_0 \in K \cap \overline{B}(0, M)$ siten, että $u_{j_k} \rightharpoonup u_0$. Koska I on heikosti alhaalta puolijatkuva, on

$$I(u_0) \leq \liminf_{k\to\infty} I(u_{j_k}) = \inf_{u\in K} I(u).$$

Etsitty minimipiste on siten löydetty. □

Esimerkki 3.1.22. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ refleksiivinen Banach-avaruus, $K \subset X$ konveksi ja suljettu, sekä $\overline{u} \in X$. Tällöin on olemassa $u_0 \in K$ siten, että

$$\|u_0 - \overline{u}\| \leq \|u - \overline{u}\| \quad \text{kaikilla} \quad u \in K.$$

Todistus. Määritellään funktio

$$I : K \to \mathbb{R},\ I(u) = \|u - \overline{u}\|.$$

Koska $I(u) \geq \|u\| - \|\overline{u}\| \to \infty$ kun $\|u\| \to \infty$, on I koersiivinen. Lisäksi I on heikosti alhaalta puolijatkuva: Olkoon $(v_j) \subset K$ siten, että $v_j \rightharpoonup v \in K$. Merkitään $w_j := v_j - \overline{u}$ ja $w = v - \overline{u}$. Tällöin kaikilla $x^* \in X^*$

$$x^*(w_j) = x^*(v_j - \overline{u}) = x^*(v_j) - x^*(\overline{u}) \overset{j\to\infty}{\to} x^*(v) - x^*(\overline{u}) = x^*(v - \overline{u}),$$

joten $w_j \rightharpoonup w$. Normin heikosta alhaalta puolijatkuvuudesta seuraa, että

$$I(v) = \|v - \overline{u}\| = \|w\| \leq \liminf_{j\to\infty} \|w_j\| = \liminf_{j\to\infty} \|v_j - u\| = \liminf_{j\to\infty} I(v_j),$$

eli I on heikosti alhaalta puolijatkuva. Nyt Lauseen 3.1.21 nojalla on olemassa $u_0 \in K$ siten, että $I(u_0) = \inf_{u\in K} I(u)$. □

Huomautus 3.1.23. (i) $\mathbb{R}^n$:ssä alhaalta puolijatkuvuus määriteltiin epäyhtälöllä

$$g(x) \leq \liminf_{\substack{y\to x \\ y\in A}} g(y) = \lim_{r\to 0} \left(\inf\{g(y) : 0 < |x - y| < r,\ y \in A\}\right).$$

Heikko alhaalta puolijatkuvuus täytyy määritellä jonojen avulla, sillä "heikkoja palloja"ei ole olemassa.

(ii) Variaatiolaskennassa esiintyvät funktionaalit $I : K \to \mathbb{R}$ ovat erittäin harvoin jatkuvia heikon konvergenssin suhteen, ja tämän vuoksi alhaalta puolijatkuvuus on oleellisen tärkeä käsite.

(iii) Variaatiolaskentaa voidaan harrastaa myös ei-refleksiivisissä avaruuksissa.

3.2 L^p-avaruudet

Määritelmä 3.2.1. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ (Lebesgue-) mitallinen ja $1 \leq p \leq \infty$. Määritellään

$$L^p(A) := \{f : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : f \text{ on mitallinen ja } \|f\|_p < \infty\},$$

missä

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(A)} := \left(\int_A |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

ja

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(A)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)| = \inf\{t > 0 : |f(x)| \leq t \text{ m.k. } x \in A\}.$$

Yllä olevassa määritelmässä samaistetaan funktiot, jotka yhtyvät melkein kaikkialla joukossa A, ts. $f = g$ jos ja vain jos joukon $\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$ n-ulotteinen Lebesgue mitta on nolla. Avaruus $L^p(A)$ on siis tarkkaan ottaen tällaisten ekvivalenssiluokkien kokoelma. Käytännössä ajatellaan, että L^p-funktiot on määritelty vain m.k. pisteissä. Mitta- ja integraaliteorian kurssilta muistetaan, että

(1) $(L^p(A), \|\cdot\|_p)$ on Banach-avaruus. Erityisesti

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \text{kaikilla } f, g \in L^p(A).$$

(2) Hölderin epäyhtälö: Olkoon $f, g : A \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mitallisia ja luvut $1 \leq p, q \leq \infty$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jos $f \in L^p(A)$ ja $g \in L^q(A)$, niin $fg \in L^1(A)$ ja $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, ts.

$$\int_A |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_A |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, 1 < p, q < \infty$$

ja

$$\int_A |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} |f(x)|\right) \int_A |g(x)|\,dx \qquad \text{jos } p = \infty, q = 1.$$

(3) Olkoon $f_j, f \in L^p(A)$. Jos $f_j \to f$ (siis $\|f_j - f\|_p = \left(\int_A |f_j(x) - f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$), niin on olemassa osajono $(f_{j_k}) \subset (f_j)$ siten, että

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \text{ m.k. } x \in A.$$

Huomautus 3.2.2. Hölderin epäyhtälöstä seuraa, että jos $|A| < \infty$ ja $1 \leq p \leq q \leq \infty$, niin

$$L^q(A) \subset L^p(A)$$

ja

$$\left(⨍_A |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(⨍_A |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{kaikille } f \in L^p(A).$$

Tässä

$$\left(⨍_A |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{|A|} \int_A |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jos $|A| = \infty$ ja $p \neq q$, niin $L^p(A) \not\subset L^q(A)$ ja $L^q(A) \not\subset L^p(A)$.

Seuraavaksi osoitetaan, että avaruuden $(L^p(A), \|\cdot\|_p)$ duaali on isometrisesti isomorfinen avaruuden $(L^q(A), \|\cdot\|_q)$ kanssa, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (eli $q = \frac{p}{p-1}$) ja $1 < p, q < \infty$. Ensin helppo osuus:

Lause 3.2.3. *Olkoon $1 < p < \infty$ ja $q = \frac{p}{p-1}$ (siis $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), ja $g \in L^q(A)$. Määritellään*

$$T_g : L^p(A) \to \mathbb{R},\ T_g(f) = \int_A fg\,dx.$$

Tällöin $T_g \in \left(L^p(A), \|\cdot\|_p\right)^*$ ja sen duaalinormi $\|T_g\|_* = \|g\|_q$. Erityisesti siis $L^q(A) \subset (L^p(A))^*$.

Todistus. Koska

$$T_g(\lambda f_1 + \mu f_2) = \int_A (\lambda f_1 + \mu f_2) g\, dx = \lambda \int_A f_1 g\, dx + \mu \int_A f_2 g\, dx = \lambda T_g(f_1) + \mu T_g(f_2)$$

kaikilla $f_1, f_2 \in L^p(A)$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, kuvaus T_g on lineaarinen. Hölderin epäyhtälön nojalla on

$$\begin{aligned} |T_g(f)| &= |\int_A fg\, dx| \leq \int_A |f||g|\, dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_A |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_A |g|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_p \|g\|_q, \end{aligned}$$

joten

$$\|T_g\|_* = \sup\{T_g(f) : f \in L^p(A), \|f\|_p \leq 1\} \leq \|g\|_q < \infty.$$

Osoitetaan vielä, että $\|T_g\|_* \geq \|g\|_q$. Tätä varten valitaan $f = |g|^{q-2} g$, jolloin $|f(x)|^p = \left(|g(x)|^{q-1} \right)^p = |g(x)|^q$. Siten

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_A |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_A |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} = \|g\|_q^{q-1} < \infty$$

ja

$$\begin{aligned} T_g(f) &= \int_A |g|^{q-2} g g\, dx = \int_A |g(x)|^q\, dx = \|g\|_q^q \\ &= \|g\|_q^{q-1} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Näin ollen $T_g(\frac{f}{\|f\|_p}) = \|g\|_q$ ja siten $\|T_g\|_* \geq \|g\|_q$ duaalinormin määritelmän perusteella. □

Käänteinen inkluusio $(L^p(A))^* \subset L^q(A)$ on hankalampi todistaa. Siinä tarvitaan mm. Radon-Nikodymin lausetta, joka muotoillaan seuraavaksi. Olkoon $\mathcal{M}$ Lebesgue-mitallisten joukkojen σ-algebra $\mathbb{R}^n$:ssä. Kuvaus $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ on *merkkimitta* (*signed measure*), jos

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$ kaikilla pareittain pistevierailla $E_j \in \mathcal{M}$.

Huomautus 3.2.4. Pätee: μ on merkkimitta jos ja vain jos on olemassa ei-negatiiviset mitat μ^+, μ^- siten, että $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

Määritelmä 3.2.5. Merkkimitta μ on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, merkitään $\mu << |\cdot|$, jos ehdosta $|E| = 0$ aina seuraa $\mu(E) = 0$.

Lause 3.2.6 (Radon-Nikodym). *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen ja μ äärellinen merkkimitta, joka on absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen. Tällöin on olemassa tasan yksi $g \in L^1(A)$ siten, että*

$$\mu(E) = \int_E g(x)\, dx \qquad \textit{kaikille mitallisille } E \subset A.$$

Radon-Nikodymin lauseen todistus löytyy mm. lähteestä [8].

Lause 3.2.7. *(F. Riesz) Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^n$ *mitallinen,* $1 < p < \infty$ *ja* $T \in \left(L^p(A), \|\cdot\|_p\right)^* = (L^p(A))^*$ *. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen* $g \in L^q(A)$*,* $q = \frac{p}{p-1}$*, siten, että*

$$T(f) = \int_A f\,g\,dx \qquad \text{kaikilla } f \in L^p(A)$$

ja $\|T\|_* = \|g\|_q$*.*

Huomautus 3.2.8. Lauseiden 3.2.3 ja 3.2.7 nojalla siis $(L^p(A))^* = L^q(A)$. Erityisesti avaruus $L^p(A)$ on refleksiivinen kaikilla $1 < p < \infty$.

Todistus. Oletetaaan ensin, että $|A| < +\infty$. Olkoon $E \in \mathcal{M}$ ja merkitään

$$\chi_{E\cap A}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \cap A \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Tällöin

$$\|\chi_{E\cap A}\|_p = \left(\int_{E\cap A} 1\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = |E \cap A|^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Määritellään $\mu(E) := T(\chi_{E\cap A})$, jolloin

$$\mu(\emptyset) = T(\chi_\emptyset) = T(0) = 0$$

ja

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) =& T(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap A}) = T\left(\chi_{\bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j\cap A)}\right) \\ =& T(\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_j\cap A}) = \sum_{j=1}^{\infty} T(\chi_{E_j\cap A}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\end{aligned}$$

kaikilla pareittain pistevierailla $E_j \in \mathcal{C}$. Lisäksi

$$|\mu(E)| = |T(\chi_{E\cap A})| \le \|T\|_* \|\chi_{E\cap A}\|_p \le \|T\|_* |E \cap A|^{\frac{1}{p}} \le \|T\|_* |A|^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

joten μ on äärellinen merkkimitta. Ja jos $|E| = 0$, niin $\mu(E) = T(\chi_{E\cap A}) = T(0) = 0$. Näin ollen μ on myös absoluuttisesti jatkuva Lebesguen mitan suhteen, ja Radon-Nikodymin lauseen nojalla on olemassa $g \in L^1(A)$ siten, että $\mu(E) = \displaystyle\int_E g\,dx$ kaikilla $E \in \mathcal{M}$, $E \subset A$. Seuraavaksi on tarkoitus osoittaa, että g on etsitty funktio, toisin sanoen, $g \in L^q(A)$ ja $T(f) = \int_A fg\,dx$ kaikilla $f \in L^p(A)$.

(1) Olkoon $f \in L^p(A)$ yksinkertainen funktio, ts. $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i \cap A}$ joillakin $c_i \in \mathbb{R}$ ja $A_i \in \mathcal{C}$. Tällöin

$$\begin{aligned} T(f) &= T\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i \cap A}\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i T(\chi_{A_i \cap A}) = \sum_{i=1}^{k} c_i\, \mu(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i \int_{A_i} g\, dx = \sum_{i=1}^{k} c_i \int_A \chi_{A \cap A_i}(x)\, g(x)\, dx = \int_A \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A \cap A_i}\right) g\, dx \\ &= \int_A f\, g\, dx. \end{aligned}$$

(2) Olkoon $f \geq 0$, rajoitettu ja mitallinen; tällöin $f \in L^p(A)$, sillä $|A| < \infty$. Valitaan yksinkertaiset funktiot f_i siten, että $0 \leq f_i \leq f_{i+1} \leq f$ ja $\lim_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$ m.k. $x \in A$. Koska $|f_i - f|^p \leq |f|^p$ ja $|f|^p \in L^1(A)$, niin $\|f - f_i\|_p^p \to 0$ kun $i \to \infty$ dominoidun konvergenssin lauseen nojalla. Edelleen, koska T on jatkuva lineaarikuvaus, niin kohdan (1) nojalla

$$T(f) = \lim_{i \to \infty} T(f_i) = \lim_{i \to \infty} \int_A f_i\, g\, dx = \int_A f\, g\, dx,$$

missä viimeisin yhtäsuuruus seuraa jälleen dominoidun konvergenssin lauseesta ja siitä, että $|f_i(x) g(x)| \leq |f(x) g(x)| \leq \|f\|_\infty |g(x)| \in L^1(A)$.

(3) Olkoon f rajoitettu ja mitallinen funktio, ja f^+ ja f^- sen positiivi- ja negatiiviosat. Edellisen kohdan nojalla

$$\begin{aligned} T(f) &= T(f^+ - f^-) = T(f^+) - T(f^-) = \int_A f^+ g\, dx - \int_A f^- g\, dx \\ &= \int_A (f^+ - f^-) g\, dx = \int_A f\, g\, dx. \end{aligned}$$

(4) Osoitetaan seuraavaksi, että $g \in L^q(A)$. Tätä varten merkitään $h = |g|^{q-2} g$ ja

$$h_j(x) = \begin{cases} h(x), & \text{jos } |h(x)| \leq j \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Koska $h_j \in L^\infty(A)$ kaikilla j, seuraa kohdasta (3), että

$$|\int_A h_j g\, dx| = |T(h_j)| \leq \|T\|_* \|h_j\|_p < \infty \tag{3.2.1}$$

ja siten

$$\int_A h_j g\, dx = \int_{A \cap \{|h| \leq j\}} |g|^q\, dx =: I_j \in \mathbb{R} \qquad \text{kaikilla } j.$$

Toisaalta

$$\|h_j\|_p = \left(\int_A |h_j|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{A \cap \{|h| \leq j\}} (|g|^{q-1})^{\frac{q}{q-1}}\, dx\right)^{\frac{q-1}{q}} = \left(\int_{A \cap \{|h| \leq j\}} |g|^q\, dx\right)^{\frac{q-1}{q}} = I_j^{\frac{q-1}{q}},$$

joten epäyhtälö (3.2.1) voidaan kirjoittaa muotoon $I_j^{1/q} \leq \|T\|_*$. Näin ollen

$$\left(\int_{A\cap\{|g|\leq t\}} |g|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|T\|_* \qquad \text{kaikilla } t > 0.$$

Kun vielä huomataan, että koska $g \in L^1(A)$, niin $|g(x)| < +\infty$ m.k. $x \in A$, seuraa edellisestä, että $g \in L^q(A)$ ja $\|g\|_q \leq \|T\|_*$.

(5) Määritellään funktionaali

$$\widetilde{T} : L^p(A) \to \mathbb{R}, \widetilde{T}(f) := \int_A f\,g\,dx.$$

Lauseen 3.2.3 nojalla $\widetilde{T} \in \left(L^p(A), \|\cdot\|_p\right)^*$ ja $\|\widetilde{T}\|_* = \|g\|_q$. Lisäksi tiedetään, että $T(f) = \widetilde{T}(f)$ kaikilla $f \in L^\infty(A)$. Olkoon $f \in L^p(A)$ ja valitaan jono rajoitettuja funktioita $f_j \in L^\infty(A)$ siten, että $f_j \to f\, L^p(A)$:ssa. Tällaiseksi jonoksi kelpaa esimerkiksi funktiot

$$f_j(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } |f(x)| \leq j, \\ j, & \text{jos } f(x) > j, \\ -j, & \text{jos } f(x) < -j. \end{cases}$$

Kuvausten T ja $\widetilde{T}$ jatkuvuuden perusteella saamme

$$\widetilde{T}(f) = \lim_{j\to\infty} \widetilde{T}(f_j) = \lim_{j\to\infty} T(f_j) = T(f).$$

Näin ollen siis $T = \widetilde{T}$, ja erityisesti

$$T(f) = \int_A f\,g\,dx \qquad \text{kaikilla } f \in L^p(A)$$

ja $\|T\|_* = \|g\|_q$. Funktion g yksikäsitteisyyden toteaminen on helppoa, ja se jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

(6) Tapaus $|A| = \infty$: Olkoon $A_i = A \cap B(0, i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Tällöin $|A_i| < +\infty$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ ja $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = A$. Määritellään

$$T_i : L^p(A_i) \to \mathbb{R}, T_i(f) = T(\tilde{f}),$$

missä

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{jos } x \in A_i \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Koska $f \in L^p(A_i)$, niin $\tilde{f} \in L^p(A)$. Lisäksi selvästi $T_i \in \left(L^p(A_i), \|\cdot\|_p\right)^*$ ja $\|T_i\|_* \leq \|T\|_*$. Todistuksen alkuosan perusteella on olemassa yksikäsitteinen $g_i \in L^q(A_i)$ siten, että

$$T_i(f) = \int_{A_i} f\,g_i\,dx \qquad \text{kaikilla } f \in L^p(A_i)$$

ja $\|T_i\|_* = \|g_i\|_q$. Jos $i > j$, niin $g_i(x) = g_j(x)$ kaikilla $x \in A_j \subset A_i$, sillä muutoin g_j ei olisi yksikäsitteinen. Täten on olemassa $g(x) := \lim_{i\to\infty} g_i(x)$ m.k. $x \in A$. Edelleen

$$\int_A |g|^q\, dx = \lim_{i\to\infty} \int_A |\tilde{g}_i|^q\, dx = \lim_{i\to\infty} \|T_i\|_*^q \le \|T\|_*^q$$

monotonisen konvergenssin lauseen nojalla, joten $g \in L^q(A)$ ja $\|g\|_q \le \|T\|_*$. Lisäksi $g_i \to g$ L^q:ssa dominoidun konvergenssin lauseen perusteella.

Olkoon nyt $f \in L^p(A)$ ja merkitään $f_i = f\chi_{A_i}$. Jälleen $f_i \to f$ L^p :ssä kun $i \to \infty$ dominoidun konvergenssin lauseen nojalla, joten

$$T(f) = \lim_{i\to\infty} T(f_i) = \lim_{i\to\infty} T_i(f_i) = \lim_{i\to\infty} \int_A f_i g_i\, dx = \int_A f\, g\, dx.$$

Yllä viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $f_i \to f$ L^p :ssä, $g_i \to g$ L^q:ssa ja Hölderin epäyhtälöstä. □

Huomautus 3.2.9. (i) Samaan tapaan voidaan osoittaa, että $\left(L^1(A)\right)^* = L^\infty(A)$. Sen sijaan $(L^\infty(A))^* \ne L^1(A)$: esimerkiksi $T(f) = \int_A f\, d\delta_0 \in (L^\infty(A))^* \setminus L^1(A)$. Erityisesti siis $L^1(A)$ ei ole refleksiivinen.

(ii) Nyt tiedetään, että $f_k \rightharpoonup f$ avaruudessa $L^p(A)$, ($f_k, f \in L^p(A), 1 < p < \infty$) jos ja vain jos

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k g\, dx = \int_A f\, g\, dx \qquad \text{kaikilla } g \in L^q(A),\ \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Esimerkki 3.2.10. Olkoon $1 < p < \infty$, $A =]0, 1[$ ja

$$f_k(x) = \begin{cases} k^{\frac{1}{p}}, & x \in]0, \frac{1}{k}[, \\ 0, & x \in [\frac{1}{k}, 1[. \end{cases}$$

Tällöin $f_k \rightharpoonup 0$ kun $k \to \infty$, mutta jono (f_k) ei suppene vahvasti minnekään: Olkoon $g \in L^q(A)$ ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\varphi \in C_0^\infty(A)$ siten, että $\|\varphi - g\|_q < \varepsilon$ (tällaisen funktion olemassaolo osoitetaan Lauseessa 3.2.14). Tällöin $\int_A \varphi f_k\, dx = 0$ kun k on riittävän suuri, ja siten Hölderin epäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned} \left| \int_A f_k g\, dx - \int_A 0 \cdot g\, dx \right| &\le \left| \int_A (g - \varphi) f_k\, dx \right| + \left| \int_A \varphi f_k\, dx \right| \le \int_A |g - \varphi||f_k|\, dx \\ &\le \|g - \varphi\|_q \|f_k\|_p < \varepsilon, \end{aligned}$$

sillä $\|f_k\|_p = 1$ kaikilla k. Siis:

1. $f_k \rightharpoonup 0$ kun $k \to \infty$, mutta koska $\|f_k - 0\|_p = \|f_k\| = 1$ kaikilla k, jono (f_k) ei suppene vahvasti nollaan (eikä tietysti mihinkään muuallekaan).

2. L^p-normi $\|\cdot\|_p$ ei ole jatkuva heikon konvergenssin suhteen: $f_k \rightharpoonup 0$, mutta $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_p \ne \|0\|_p$. Siten heikko alhaalta puolijatkuvuus

$$\|f\|_p \le \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p \qquad \text{kun } f_k \rightharpoonup f$$

on "parasta"mitä voidaan sanoa.

Heikon ja vahvan suppenemisen välistä suhdetta selventää ns. Radon-Rieszin lause:

Lause 3.2.11. *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* $f_k, f \in L^p(A)$. *Tällöin* $f_k \to f$ *vahvasti* L^p*:ssä jos ja vain jos* $f_k \rightharpoonup$ *ja* $\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_p = \|f\|_p$.

Vastaava tulos on itse asiassa totta kaikissa lokaalisti tasaisesti konvekseissa normiavaruuksissa, katso [13]. L^p-avaruuksien tasainen konveksisuus puolestaan perustuu ns. Clarksonin epäyhtälöihin. Tapaus $p = 2$ on helpohko harjoitustehtävä.

Seuraavaksi osoitetaan, että L^p-funktioita voidaa approksimoida C^∞- funktioilla. Tätä varten olkoon $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ siten, että

(i) $\eta(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $\eta(-x) = \eta(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $\operatorname{supp} \eta \subset \overline{B}(0, r)$, ts. $\eta(x) = 0$ kaikilla x, joille $|x| \geq 1$.

(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = \int_{B(0,1)} \eta(x)\, dx = 1$.

Esimerkiksi voitaisiin valita

$$\eta(x) = \begin{cases} C\, e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

missä $C > 0$ on valittu siten, että (iv) on voimassa.

Määritellään lisäksi $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Tällöin $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset \overline{B}(0, \varepsilon)$ ja $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon\, dx = 1$.

Määritelmä 3.2.12. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja η_ε kuten edellä. Määritellään funktion f *silotus*

$$f_\varepsilon(x) := \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Huomautus 3.2.13. (i) Kannattaa huomata, että silotuksen f_ε lauseke voidaan kirjoittaa muuttujanvaihtoja hyödyntäen monella eri tavalla:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_\varepsilon(x-y)\, dy &\overset{z=x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\eta_\varepsilon(z)\, dx \\ = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-z)\varepsilon^{-n}\eta(\frac{z}{\varepsilon})\, dz &\overset{\xi=\frac{z}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\varepsilon\,\xi)\eta(\xi)\, d\xi. \end{aligned}$$

(ii) Oletus $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ takaa sen, että silotus f_ε on aina pisteittäin hyvin määritelty ja reaaliarvoinen:

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\, \underbrace{|\eta_\varepsilon(x-y)|}_{\leq M_\varepsilon}\, dy \leq M_\varepsilon \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)|\, dy < +\infty.$$

Itse asiassa tähän riittäisi jo se, että f on integroituva jokaisessa pallossa.

Lause 3.2.14. *Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja η_ε kuten edellä. Tällöin*

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja $\dfrac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\eta_\varepsilon * f) = \left(\dfrac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}\right) * f$; vastaavalla tavalla saadaan myös silotuksen korkeammat osittaisderivaatat.

(ii) Jos $f \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin, niin $f_\varepsilon(x) \to f(x)$ tasaisesti Ω:n kompakteissa osajoukoissa.

(iii) Jos $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$, niin $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p$ ja $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$.

Todistus.

(i) Olkoon e_i $\mathbb{R}^n$:n i:s kantavektori, siis $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\frac{f_\varepsilon(x + te_i) - f_\varepsilon(x)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta(x + te_i - y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta(x - y)\,dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\underbrace{\left(\frac{\eta(x - y + te_i) - \eta(x - y)}{t}\right)}_{\overset{t\to 0}{\to}\ \frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x-y)} \underset{\text{dom. konv.}}{\overset{t\to 0}{\to}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x - y)\,dy \\
&= \frac{\partial \eta}{\partial x_i} * f(x),
\end{aligned}$$

joten osittaisderivaatta $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i}$ on olemassa ja $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta}{\partial x_i} * f(x)$. Soveltamalla samaa päättelyä funktion f_ε sijaan sen ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaattoihin saamme osoitettua toisen kertaluvun osittaisderivaattojen olemassaolon. Jatkamalla induktiivisesti näemme, että $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Olkoon $B = B(x_0, r) \subset \Omega$ siten, että $3B = B(x_0, 3r) \subset \Omega$. Koska f on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $\overline{2B}$, kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \delta$, kun $x, y \in \overline{2B}$, $|x - y| < \varepsilon$. Siten jos $x \in \overline{B}$ ja $0 < \varepsilon < r$, niin saadaan

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x) - f(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta(x - y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\eta(x - y)\,dy| \\
&\leq \int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\eta(x - y)\,dy \leq \delta \underbrace{\int_{B(x,\varepsilon)} \eta(x - y)\,dy}_{=1} = \delta.
\end{aligned}$$

Näin ollen $f_\varepsilon \to f$ tasaisesti suljetussa pallossa $\overline{B}$, ja koska mikä tahansa kompakti joukko $K \subset \Omega$ voidaan peittää äärellisellä määrällä tällaisia palloja, väite seuraa.

(iii) Hölderin epäyhtälön avulla saamme

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta(x - y)^{1/p}\eta(x - y)^{(p-1)/p}\,dy| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\eta(x - y)\,dy\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x - y)\,dy\right)^{(p-1)/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p\eta(x - y)\,dy\right)^{1/p},
\end{aligned}$$

joten Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon|^p \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \eta(x-y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x-y) \, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dy.\end{aligned}$$

Näin ollen siis $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ja $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p$.

Olkoon nyt $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva kompaktikantajainen funktio siten, että $\|\varphi - f\|_p < \delta$. (Tällainen funktio on aina olemassa: riittää todeta asia mitallisen joukon karakteristiselle funktiolle.) Nyt

$$\|f_\varepsilon - f\|_p = \|f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon - \varphi + \varphi - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_p + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_p + \|\varphi - f\|_p.$$

Koska $f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon = (f - \varphi)_\varepsilon$, niin $\|f_\varepsilon - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \|f - \varphi\|_p < \delta$. Lisäksi koska φ on kompakti kantajainen, on olemassa suljettu pallo $\overline{B} = \overline{B}(0, R)$ siten, että $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}$ ja kaikilla $0 < \varepsilon < 1$. Siten

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_p = \left(\int_{B(0,R)} |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{x \in \overline{B}} |\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \, |\overline{B}|^{\frac{1}{p}},$$

mikä menee nollaan kun $\varepsilon \to 0$ kohdan (ii) nojalla. Näin ollen $\limsup_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_p < 2\delta$ kaikilla $\delta > 0$. □

Seuraus 3.2.15. *$C_0^\infty(\Omega)$ on tiheä $L^p(\Omega)$:ssa kaikille $1 \leq p < \infty$, ts. jokaiselle $f \in L^p(\Omega)$ on olemassa jono $f_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\|f_j - f\|_p \xrightarrow{j \to \infty} 0$.*

Todistus. Olkoon $f \in L^p(\Omega)$ ja valitaan kompaktikantajainen funktion $\varphi \in C(\Omega)$ siten, että $\|f - \varphi\|_p \leq \delta$. Olkoon $K \subset \Omega$ kompakti joukko siten, että $\varphi(x) = 0$ kaikilla $x \in \Omega \setminus K$. Jos $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, niin $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ kompaktin joukon $K_\varepsilon := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$ ulkopuolella. Siten $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ ja $\|f - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \|f - \varphi\|_p + \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_p \leq \delta + \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_p$, joten väite seuraa Lauseen 3.2.14 kohdasta (iii). □

3.3 Sobolev-avaruudet

Tarkastellaan funktionaalia

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx,$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja rajoitettu, $f \in C(\partial\Omega)$ ja $u \in K$, missä

$$K = \{v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : v(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in \partial\Omega\}.$$

Jotta voisimme soveltaa Lausetta 3.1.21, meidän tulisi löytää refleksiivinen Banach-avaruus $(X, \|\cdot\|)$ siten, että

1. $K \subset X$ on suljettu ja konveksi.

2. I on koersiivinen: $I(u) \to +\infty$ kun $||u|| \to +\infty$.

3. I on heikosti alhaalta puolijatkuva joukossa K.

Koersiivisuus edellyttää sitä, että termin $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$ tulisi esiintyä normissa $||\cdot||$. Edellisen kappaleen perusteella tiedetään, että $\left(L^p(\Omega), ||\cdot||_p\right)$ on refleksiivinen Banach-avaruus, kun $1 < p < \infty$. Näin ollen ensimmäinen yritys vaadituksi avaruudeksi voisi olla $(C^1(\Omega), ||\cdot||_{L^{1,2}})$, missä

$$||u||_{L^{1,2}} := ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tämä ei kuitenkaan ole normiavaruus, sillä $||u||_{L^{1,2}} = 0$ kaikilla vakiofunktioilla $u \equiv c$. Normiin on siis otettava mukaan myös funktio u itse eikä pelkästään sen derivaattoja. Tämä johtaa luonnollisella tavalla yritteeseen $(C^1(\Omega), ||\cdot||_{1,2})$, missä

$$||u||_{1,2} := ||u||_2 + ||\nabla u||_2 = \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Näin saadaan normiavaruus, joka ei kuitenkaan ole täydellinen.

Määritelmä 3.3.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $1 \le p < \infty$. Määritellään Sobolev-avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ joukon

$$\{\, \varphi \in C^\infty(\Omega) : \ ||\varphi||_{1,p} < +\infty\}$$

täydentymänä normin

$$||\varphi||_{1,p} := ||\varphi||_p + ||\nabla\varphi||_p = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

suhteen, ts. $u \in W^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u \in L^p(\Omega)$ ja on olemassa vektoriarvoinen funktio $v \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$ siten, että jollekin funktiojonolle $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ pätee $||\varphi_j - u||_{L^p(\Omega)} \to 0$ ja $||\nabla\varphi_j - v||_{L^p(\Omega)} \to 0$. Tällöin sanotaan, että v on u:n *Sobolev gradientti* (heikko gradientti) ja merkitään

$$v = Du, \quad (\text{eli } (v_1, v_2, \dots, v_n) = (D_1 u, \dots, D_n u)\ ).$$

Huomautus 3.3.2. (i) $W^{1,p}(\Omega)$ on normiavaruus (HT), joten se on Banach.
(ii) $W^{1,p}$:ssa käytetään usein ekvivalenttia normia

$$||u||'_{1,p} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p + |\nabla u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

jolloin $\frac{1}{2^{1/p}}||u||'_{1,p} \le ||u||_{1,p} \le 2||u||'_{1,p}$, tai ekvivalenttia normia

$$||u||''_{1,p} := ||u||_p + \sum_{i=1}^n ||\frac{\partial u}{\partial x_i}||_p.$$

(iii) Jos $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, niin u:n Sobolev gradientti Du on sen "rehellinen"gradientti ∇u: Olkoon $u_\varepsilon = \eta * u$ funktion u silotus. Tällöin

$$u_\varepsilon(x) = \int_{B(x,\varepsilon)} u(y)\eta(x-y)\,dy = \int_{B(0,\varepsilon)} u(x+z)\eta(z)\,dz,$$

joten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{u_\varepsilon(x+te_i) - u_\varepsilon(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \int_{B(0,\varepsilon)} \left(\frac{u(x+te_i+z) - u(x+z)}{t}\right)\eta(z)\,dz \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} \left(\lim_{t\to 0} \frac{u(x+te_i+z) - u(x+z)}{t}\right)\eta(z)\,dz \\
&= \int_{B(0,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+z)\eta(z)\,dz = \eta * \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_\varepsilon (x).
\end{aligned}$$

Lauseen 3.2.14 nojalla $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_\varepsilon \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ L^p:ssä kaikilla $i = 1, \ldots, n$, ja siten $\|u_\varepsilon - u\|_p \to 0$ ja $\|\nabla u_\varepsilon - \nabla u\|_p \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$. Sobolev gradientin Du määritelmästä seuraa nyt suoraan, että $Du = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

Sobolev avaruus $W^{1,p}(\Omega)$ voidaan samaistaa avaruuden $\underbrace{L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)}_{n+1 \text{ kpl}}$ suljetun aliavaruuden kanssa:

$$u \sim (u, D_1 u, \ldots, D_n u) \in L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega).$$

Tämä havainto ja hieman funktionaalianalyysiä antaa

Lause 3.3.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $1 < p < \infty$. Tällöin*

(a) $W^{1,p}(\Omega)$ on refleksiivinen

(b) $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)^* = \underbrace{L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \times \ldots \times L^q(\Omega)}_{n+1 \ kpl}$, missä $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Erityisesti siis jos $u_k, u \in W^{1,p}(\Omega)$, niin $u_k \rightharpoonup u$ avaruudessa $W^{1,p}$ jos ja vain jos $u_k \rightharpoonup u$ L^p:ssä ja $D_i u_k \rightharpoonup D_i u$ L^p:ssä kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Kirjallisuudessa Sobolev avaruudet määritellään yleensä seuraavassa lauseessa esiintyvän osittaisintegrointikaavan avulla.

Lause 3.3.4. *Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \le p < \infty$. Tällöin $v \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ on u:n Sobolev gradientti jos ja vain jos*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega v_i \psi\,dx \quad \textit{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega),\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.3.1}$$

Todistus. Osoitamme tässä yhteydessä pelkästään, että Sobolev gradientti toteuttaa osittaisintegrointikaavan (3.3.1). Tätä varten olkoot $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ siten, että $\varphi_j \to u$ L^p:ssä ja $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \to v_i$ L^p:ssä, $i = 1, \ldots, n$. Olkoon $x \in \Omega$ ja $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ i:s kantavektori. Funktio $\varphi_j \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ja asettamalla $\varphi_j(x)\psi(x) = 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ voidaan tulkita, että $\varphi_j \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nyt

$$\begin{aligned}(\varphi_j\psi)(x + te_i) - (\varphi_j\psi)(x - te_i) &= \int_{-t}^{t} \frac{\partial(\varphi_j\psi)}{\partial x_i}(x + se_i)\, ds \\ &= \int_{-t}^{t} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x + se_i)\psi(x + se_i)\, ds + \int_{-t}^{t} \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x + se_i)\varphi_j(x + se_i)\, ds,\end{aligned}$$

mistä saadaan kun $t \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\psi\, dx_i = -\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Integroimalla muiden muuttujien x_k, $k \neq i$, suhteen ja käyttämällä Fubinin lausetta saadaan

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\psi(x)\, dx = -\int_\Omega \varphi_j(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\, dx.$$

Koska $\varphi_j \to u$ L^p:ssä, niin $\varphi_j \rightharpoonup u$ L^p:ssä. Siten

$$\int_\Omega \varphi_j \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx \overset{j\to\infty}{\to} \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx,$$

sillä $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \in C_0(\Omega) \subset L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))^*$. Samoin

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\psi\, dx \overset{j\to\infty}{\to} \int_\Omega v_i \psi\, dx,$$

joten (3.3.1) seuraa. □

Esimerkki 3.3.5. (a) Olkoon $n = 1$, $\Omega =]0, 2[$, ja

$$u(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Tällöin $u \in W^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $1 \leq p < \infty$ ja sen Sobolev derivaatta on

$$v(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{kun } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Tämän osoittamiseksi huomataan ensin, että $u, v \in L^p(\Omega)$ kaikilla $1 \leq p \leq \infty$. Olkoon nyt $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega u(x)\psi'(x)\,dx &= \int_0^1 x\psi'(x)\,dx + \int_1^2 \psi'(x)\,dx \\
&= \Big/_0^1 x\psi(x) - \int_0^1 \psi(x)\,dx + \underbrace{\psi(2)}_{=0} - \psi(1) \\
&= \psi(1) - \int_0^1 \psi(x)\,dx - \psi(1) = -\int_0^2 \psi(x)v(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

(b) Olkoon $n = 1$, $\Omega =]0, 2[$ ja

$$
u(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in]0, 1], \\ 2, & \text{kun } x \in [1, 2[. \end{cases}
$$

Tällöin $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ millään p, sillä jos olisi olemassa $v \in L^p(\Omega)$ siten, että osittaisintegrointikaava (3.3.1) pätee, niin

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega v\psi\,dx = \int_\Omega u\psi'\,dx &= \int_0^1 x\psi'(x)\,dx + 2\int_1^2 \psi'(x)\,dx \\
&= -\int_0^1 \psi(x)\,dx - \psi(1)
\end{aligned}
$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Valitaan nyt $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\psi_j(1) = 1$, $0 \leq \psi_j \leq 1$ kaikilla j ja $\psi_j(x) \to 0$ kun $j \to \infty$ kaikilla $x \in]0, 2[\setminus \{1\}$ (esimerkiksi voitaisiin valita $\psi_j = \chi_{]1-\frac{1}{j},1+\frac{1}{j}[} * \eta_{1/j}$). Tällöin dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$
0 = \lim_{j\to\infty}\left(-\int_\Omega v\psi_j\,dx\right) = \lim_{j\to\infty}\left(-\int_0^1 \psi_j(x)\,dx - \psi_j(1)\right) = -1,
$$

mikä on mahdotonta.

Huomautus 3.3.6. (i) Edellisestä esimerkistä *ei* saa vetää sitä johtopäätöstä, että Sobolev funktiot olisivat jatkuvia, sillä se ei ole totta.

(ii) Edellisen esimerkin (b)-kohdan nojalla on olemassa $u \in L^p(\Omega)$ siten, että $u \notin W^{1,p}(\Omega)$. Vastaavasti esimerkin (a)-kohdassa on esimerkki funktiosta $u \in W^{1,p}(\Omega)$ siten, että $u \notin C^1(\Omega)$.

Sobolev derivaatoille pätevät mm. seuraavat laskusäännöt: (katso esim. [7], [15])

1. jos $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, niin $\lambda u + \mu v \in W^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ja

$$D(\lambda u + \mu v) = \lambda Du + \mu Dv \qquad \text{m.k.}$$

2. jos $u \in W^{1,p}$ ja $\varphi \in C^1(\Omega)$ siten, että $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega)$, niin $u\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ ja

$$D(u\varphi) = uD\varphi + \varphi Du \qquad \text{m.k. (tulosääntö).}$$

3. jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva s.e. $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ niin, $f \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ ja

$$D(f \circ u) = f'(u)Du \qquad \text{m.k. (ketjusääntö).}$$

4. jos $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, niin $\max\{u, v\}, \min\{u, v\} \in W^{1,p}$ ja

$$D(\max\{u, v\}) = \begin{cases} Du & \text{m.k. joukossa } \{u(x) \geq v(x)\} \\ Dv & \text{m.k. joukossa } \{u(x) \leq v(x)\} \end{cases}$$
$$D(\min\{u, v\}) = \begin{cases} Du & \text{m.k. joukossa } \{u(x) \leq v(x)\} \\ Dv & \text{m.k. joukossa } \{u(x) \geq v(x)\} \end{cases}$$

   Erityisesti

$$\begin{aligned} u^+ &= \max\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega) \\ u^- &= -\min\{u, 0\} \in W^{1,p}(\Omega) \\ |u| &= u^+ + u^- \in W^{1,p}(\Omega) \end{aligned}$$

   Lisäksi kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$, $Du(x) = 0$ m.k. joukossa $\{x \in \Omega : \ u(x) = \lambda\}$.

3.3.1 Reuna-arvoista Sobolev-mielessä

Tarkastellaan jälleen funktionaalin

$$I(u) = \int_\Omega |Du|^2 \, dx,$$

minimoimista joukossa $K =$ ”$\{u : \ u \in W^{1,2}(\Omega), \ u|_{\partial\Omega} = f\}$”, missä reuna-arvot $f \in C(\partial\Omega)$ on annettu. Lauseen 3.1.21 soveltaminen tässä tapauksessa edellyttäisi, että K on Sobolev avaruuden $W^{1,2}(\Omega)$ suljettu (ja konveksi) osajoukko. Ongelmana on kuitenkin löytää oikea tulkinta ehdolle $u|_{\partial\Omega} = f$. Tässä yhteydessä on syytä pitää mielessä, että Sobolev funktio u on periaatteessa määritelty vain m.k. ja $|\partial\Omega| = 0$, ainakin jos Ω on "siisti".

Ensimmäisenä mieleen voisi tulla minimimoida funktionaalia joukossa

$$K_1 = \{u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \ u(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in \partial\Omega\}.$$

Joukko K_1 ei kuitenkaan yleensä ole suljettu $W^{1,2}(\Omega)$:ssa.

Määritelmä 3.3.7. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja $1 \leq p < \infty$. Määritellään aliavaruus $W_0^{1,p}(\Omega)$ joukon $C_0^\infty(\Omega)$ sulkeumana normin $\|\cdot\|_{1,p}$ suhteen, toisin sanoen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos on olemassa jono $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\|\varphi_j - u\|_{1,p} \to 0$ kun $j \to \infty$ eli

$$\begin{cases} \varphi_j \to u & L^p\text{:ssä,} \\ \nabla\varphi_j \to Du & L^p\text{:ssä.} \end{cases}$$

Huomautus 3.3.8. (i) Joukko $W_0^{1,p}(\Omega)$ on $W^{1,p}(\Omega)$:n suljettu aliavaruus: jos $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, niin $\lambda u + \mu v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$ aina kun Ω on rajoitettu joukko. Tämän osoittamiseksi riittää tarkastella vakiofunktioita, todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijalle.

(iii) Intuitiivisesti $W_0^{1,p}(\Omega)$ koostuu niistä Sobolev funktioista, jotka häviävät reunalla $\partial\Omega$. Tämän tulkinnan kanssa kannattaa kuitenkin olla varovainen, sillä ehdosta $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *ei* yleisesti ottaen seuraa, että $u(x) = 0$ kaikilla $\partial\Omega$.

Olkoon $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Merkitään

$$W_v^{1,p}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)\},$$

toisin sanoen $W_v^{1,p}(\Omega)$ koostuu niistä Sobolev funktioista, joilla on samat reuna-arvot kuin funktiolla v (edellä määritellyssä mielessä). Joukko $W_v^{1,p}(\Omega)$ on suljettu (ja konveksi): $u \in W_v^{1,p}(\Omega)$ jos ja vain jos $u = v + h$ jollekin $h \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Seuraavassa lauseessa oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on rajoitettu avoin joukko, jonka reuna $\partial\Omega$ on luokkaa C^1. Tämä tarkoittaa seuraavaa: jokaisella $x_0 \in \partial\Omega$ on olemassa $r > 0$ ja diffeomorfismi (jatkuva differentioituva bijektio, jonka käänteiskuvaus on myös jatkuvasti differentioituva) $\sigma : B(x_0, r) \to D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ siten, että

(i) $\sigma(\, B(x_0, r) \cap \Omega\,) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$,

(ii) $\sigma(\, B(x_0, r) \cap \partial\Omega\,) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$.

Lause 3.3.9. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko, jonka reuna $\partial\Omega$ on luokkaa C^1. Tällöin jokaisella $1 < p < \infty$ on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $R_p : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ siten, että*

(i) jos $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, niin $R_p(u) = u|_{\partial\Omega}$.

(ii) $R_p(u) = 0$ jos ja vain jos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
(ts. $R_p(u) = R_p(v) \iff u - v \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff u \in W_v^{1,p}(\Omega)$.)

Funktio $R_p(u) \in L^p(\partial\Omega)$ on nimeltään Sobolev funktion u jälki *(engl. trace).*

Huomautus 3.3.10. (i) On olemassa $f \in C(\partial B)$, $B = B(0, 1)$, siten, että $f \neq R_p(u)$ kaikilla $u \in W^{1,p}(B)$, $1 < p < \infty$, ts. f ei ole minkään Sobolev funktion jälki. Itse asiassa pätee seuraava tulos: Olkoon Ω rajoitettu, $\partial\Omega$ luokkaa C^1 ja $f \in C(\partial\Omega)$. Tällöin

$$\begin{aligned} & f = R_p(u) \quad \text{jollakin } u \in W^{1,p}(\Omega) \\ \iff & \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+p-2}}\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) < +\infty, \end{aligned}$$

missä $\mathcal{H}^{n-1}$ tarkoittaa $n-1$-ulotteista Hausdorff-mittaa.

(ii) Lause 3.3.9 ja yo. huomautus pätevät hieman yleisemmin oletuksin, esimerkiksi jos Ω on kuutio.

Esimerkki 3.3.11. Jos $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ on Lipschitz-jatkuva, ts. on olemassa $L < +\infty$ siten, että $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ kaikilla $x, y \in \partial\Omega$, niin on olemassa u siten, että $u \in W^{1,p}(\Omega$ ja $R_p(u) = f$ kaikilla $1 \leq p \leq \infty$. Erityisesti jos $f \in C^1(\partial\Omega)$, niin $f = R_p(u)$ jollakin $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

3.3.2 Epäyhtälöitä ja upotuslauseita

Tarkastellaan jälleen funktionaalin

$$I(u) = \int_\Omega |Du|^2\, dx$$

minimointia joukossa $K = \{u \in W^{1,2}(\Omega) : u - g \in W_0^{1,2}(\Omega)\}$, missä $g \in W^{1,2}(\Omega)$ on annettu funktio; reunaehto on siis nyt $R_2(u) = R_2(g)$. Lauseen 3.1.21 oletuksiin kuului funktionaalin I koersiivisuus: $I(u) \to +\infty$ kun $\|u\|_{1,2} \to \infty$. Koska

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{1/2} = \|u\|_2 + I(u)^2,$$

tarvitsemme koersiivisuuden toteamista varten epäyhtälön, joka kertoo, että jos $\|u\|_2 \to +\infty$, niin myös $\|\nabla u\|_2 \to +\infty$.

Lause 3.3.12. *(Sobolevin epäyhtälö) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin. Tällöin jos $1 \leq p < n$, niin $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ ja on olemassa vakio $C = C(n,p)$ siten, että*

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq C\,\|Du\|_p \qquad \textit{kaikilla } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Todistus. Olkoon $u \in C_0^\infty(\Omega)$ ja $p = 1$. Jatkamalla u nollana Ω:n ulkopuolelle voidaan olettaa että $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tällöin kaikilla $x \in \Omega$ on

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots)\, dt, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

joten

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx_i \leq \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_i.$$

Integroimalla x_1:n suhteen tämä antaa

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_i\, dx_1\right)^{1/n-1},$$

missä viimeisin epäyhtälö saadaan yleistettyä Hölderin epäyhtälöä

$$\int |g_1(x)\, g_2(x)\, \cdots\, g_{n-1}(x)|\, dx \le \left(\int |g_1|^{n-1}\right)^{1/n-1} \left(\int |g_2|^{n-1}\right)^{1/n-1} \ldots \left(\int |g_{n-1}|^{n-1}\right)^{1/n-1}$$

käyttäen. Intergroimalla samaan tapaan muuttujan x_2 suhteen saadaan

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx_1 dx_2 \\
&\quad\le \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\right)^{1/n-1} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_i\, dx_1\right)^{1/n-1} dx_2 \\
&\quad= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_i\, dx_1\right)^{\frac{1}{n-1}} dx_2 \\
&\quad\le \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, dx_2\, dx_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Jatkamalla muuttujien $x_3, \ldots, x_n$ osalta vastaavasti saadaan lopulta

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^{n/n-1}\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{n/n-1}\, dx_1\, \ldots\, dx_n \\
&\le \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1\, \ldots\, dx_n\right)^{1/n-1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|\, dx\right)^{n/n-1}
\end{aligned}$$

eli epäyhtälö $||u||_{\frac{n}{n-1}} \le ||\nabla u||_1$ on nyt todistettu kaikille $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Jos $u \in W_0^{1,1}(\Omega) \setminus C_0^\infty(\Omega)$, niin löytyy $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\varphi_j \to u$ avaruudessa $W^{1,1}$. Tällöin $||\varphi_j - \varphi_k||_{\frac{n}{n-1}} \le ||\nabla\varphi_j - \nabla\varphi_k||_1 \to 0$, joten (φ_j) on Cauchy-jono $L^{n/n-1}(\Omega)$:ssa ja koska $L^{n/n-1}(\Omega)$ on Banach, löytyy $v \in L^{n/n-1}(\Omega)$ siten, että $||\varphi_j - v||_{n/(n-1)} \to 0$ kun $j \to \infty$. Mutta koska $\varphi_j \to u$ $L^1(\Omega)$:ssa, niin $v = u$ ja siten

$$||u||_{n/n-1} = ||v||_{n/n-1} = \lim_{j\to\infty} ||\varphi_j||_{n/n-1} \le \lim_{j\to\infty} ||\nabla\varphi_j||_1 = ||Du||_1.$$

Lauseen tapaus $p > 1$ seuraa soveltamalla tapausta $p = 1$ funktioon $v = |u|^\gamma$, missä $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$:

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |u|^{\gamma n/n-1}\, dx\right)^{n/n-1} &= \left(\int_\Omega |v|^{n/n-1}\, dx\right)^{n/n-1} \le \int_\Omega |Dv|\, dx \\
&= \gamma \int_\Omega |u|^{\gamma-1} |Du|\, dx \overset{\text{Hölder}}{\le} \gamma \left(\int_\Omega |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx\right)^{p/p-1} \left(\int_\Omega |Du|^p dx\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Luvun γ valinnan perusteella

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p},$$

joten

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\,dx\right)^{n-p/np} \leq C\left(\int_\Omega |Du|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

□

Lause 3.3.13. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $|\Omega| < \infty$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja $1 < p < \infty$. Tällöin*

(a) jos $1 \leq p < n$, niin $u \in L^q(\Omega)$ kaikilla $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p}$ ja

$$(*) \qquad \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{1/q} \leq C\,|\Omega|^{1/n}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |Du|^p\,dx\right)^{1/p}, C = C(n,p).$$

(b) jos $p = n$, niin $u \in L^q(\Omega)$ kaikilla $1 \leq q < \infty$ ja $(*)$ pätee.

(c) jos $p > n$, niin $u \in C(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ kaikilla $1 \leq q \leq \infty$ ja

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq C\,|\Omega|^{1/n-1/p}\left(\int_\Omega |Du|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Yllä olevasta lauseesta seuraa erityisesti, että jos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja Ω on rajoitettu, niin $||u||_p \leq C(n,p,\Omega)\,||Du||_p$. Tämä epäyhtälö riittää useimmissa tällä kurssilla vastaan tulevista tilanteista.

Edelliset lauseet ovat voimassa oletuksella $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Yleisemmin pätee

Lause 3.3.14. *(Poincarén epäyhtälö) Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin on olemassa vakio $C = C(n,p) > 0$ siten, että*

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |u - u_B|^p\,dx\right)^{1/p} \leq C(n,p)\,r\,\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Du|^p\,dx\right)^{1/p}$$

kaikilla palloilla $B = B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ ja kaikilla $u \in W^{1,p}(B)$; tässä $u_B := \frac{1}{|B|}\int_B u(x)\,dx$.

Variaatiolaskennassa tarvitaan hyvin usein erilaisia kompaktisuustuloksia. Sobolev avaruuksien kohdalla tärkein näistä on ns. Rellich-Kondratshovin lause:

Lause 3.3.15. *(Rellich-Kondratshov) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $1 < p < \infty$ ja $u_j \in W_0^{1,p}(\Omega)$ siten, että*

$$||u_j||_{1,p} \leq M < +\infty \quad \text{kaikilla } j = 1, 2, \ldots$$

Tällöin on olemassa $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja osajono $(u_{j_k}) \subset (u_j)$ s.e. $u_{j_k} \rightharpoonup u$ $W^{1,p}$:ssa ja

(a) jos $1 < p < n$ niin $u_{j_k} \to u$ $L^q(\Omega)$:ssa kaikilla $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$

(b) jos $p = n$, niin $u_{j_k} \to u$ $L^q(\Omega)$:ssa kaikilla $1 \leq q < \infty$

(c) jos $p > n$, niin $u_{j_k} \to u$ tasaisesti Ω:ssa. (ja $L^q(\Omega)$:ssa kaikilla $1 \leq q \leq \infty$)

Edellä olevien lauseiden todistukset ja paljon lisää Sobolev-avaruuksista löytyy mm. kirjoista [7] ja [15].

Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, f \text{ jatkuva}\}$, ja

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Osoita, että $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ on normiavaruus, mutta ei Banach.

2. Olkoon $(X, \|\cdot\|)$ refleksiivinen Banach avaruus, $K \subset X$ suljettu ja konveksi, sekä $\tilde{u} \in X \setminus K$. Osoita, että on olemassa $u_0 \in K$ siten, että

$$\|u_0 - \tilde{u}\| \leq \|u - \tilde{u}\| \qquad \text{kaikille } u \in K.$$

3. Olkoon $f_j, f \in L^p(A)$ ja $g_j, g \in L^q(A)$ siten, että $f_j \to f$ $L^p(A)$:ssa ja $g_j \to g$ $L^q(A)$:ssa ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Osoita, että

$$f_j g_j \to fg \qquad L^1(A)\text{:ssa.}$$

(Vihje: Hölderin epäyhtälö).

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen siten, että $|A| < \infty$ ja $f \in L^p(A)$. Osoita, että jos $1 \leq q \leq p < \infty$, niin

$$\left(\frac{1}{|A|}\int_A |f|^q\, dx\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{|A|}\int_A |f|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

(Vihje: Hölderin epäyhtälö).

5. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin siten, että $|\Omega| < \infty$ ja $f\ \Omega \to \mathbb{R}$ jatkuva ja rajoitettu. Osoita, että

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f|^p\, dx\right)^{1/p} = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

6. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu, $\varepsilon > 0$ ja $1 \leq p < \infty$. Osoita, että

(a) jos $E \subset \Omega$ on mitallinen, niin on olemassa jatkuva, kompaktikantajainen funktio $\varphi \in C_0(\Omega)$ siten, että $\|\chi_E - \varphi\|_p < \varepsilon$.

(b) jos $f = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$, missä $c_i \geq 0$ ja $E_i \subset \Omega$ on mitallinen, niin on olemassa jatkuva, kompaktikantajainen funktio $\varphi \in C_0(\Omega)$ siten, että $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.

(Vihje: jos $E \subset \Omega$ on mitallinen, niin kaikille $\epsilon > 0$ on olemassa avoin joukko A ja suljettu joukko F siten, että $F \subset E \subset A \subset \Omega$ ja $|A \setminus F| < \epsilon$.)

7. Osoita, että $C_0^\infty(]0,1[)$ ei ole tiheässä avaruudessa $L^\infty(]0,1[)$.

8. Olkoon Ω_1 ja Ω_2 $\mathbb{R}^n$:n avoimia joukkoja siten, että $\overline{\Omega}_1$ on Ω_2:n kompakti osajoukko. Osoita, että on olemassa $u \in C_0^\infty(\Omega_2)$ siten, että $0 \leq u(x) \leq 1$ kaikilla $x \in \Omega_2$ ja $u \equiv 1$ joukossa Ω_1.

9. Olkoon $f, f_j \in L^2(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$. Osoita, että

$$\|f_j - f\|_2 \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f_j \rightharpoonup f \text{ ja } \lim_{j\to\infty} \|f_j\|_2 = \|f\|_2.$$

10. Olkoon $f, f_j \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, siten, että

(i) on olemassa $M > 0$ siten, että $\|f_j\|_p \le M$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$ kaikille $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Osoita, että $f_j \rightharpoonup f$ avaruudessa $L^p(\Omega)$.

11. Määritellään

$$f_k :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in]k, k+1], \\ 0, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Osoita, että $f_k \rightharpoonup 0$ avaruudessa $L^p(]0, \infty[)$ kaikille $1 < p < \infty$, mutta $f_k \not\rightharpoonup 0$ avaruudessa $L^1(]0, \infty[)$.

12. Olkoot $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Osoita, että $D(u+v)(x) = Du(x) + Dv(x)$ m.k. $x \in \Omega$.

13. Olkoon $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ ja $\phi \in C^1(\Omega)$ siten, että $\phi, |\nabla\phi| \in L^\infty(\Omega)$. Osoita, että $u\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $D(u\phi) = uD\phi + \phi Du$.

14. Olkoon $u \in W^{1,p}(]0, 1[)$, $1 < p < \infty$. Osoita, että

$$|u(x) - u(y)| \le |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |Du|^p \, dx \right)^{1/p}$$

m.k. $x, y \in]0, 1[$. (Vihje: todista ensin sama tulos funktiolle $\phi \in C^\infty \cap W^{1,p}$ käyttäen Hölderin epäyhtälöä.)

15. Olkoon $0 < \alpha < 1$, $n = 2$ ja $u : B(0, 1) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $u(x) = |x|^{-\alpha}$. Osoita, että $u \in W^{1,1}(B(0, 1))$.
(Ohje: Osoita, että $Du = -\alpha|x|^{-\alpha-2}x$ toteuttaa osittaisintegrointikaavan.)

16. Osoita määritelmää käyttäen, että $W_0^{1,2}(]0, 1[) \ne W^{1,2}(]0, 1[)$.

17. Olkoon $u : B(0, 1) \to \mathbb{R}$, $u(x) = 1 - |x|$. Osoita, että $u \in W_0^{1,2}(B(0, 1))$.
(Vihje: silota funktioita $u_k(x) = \max\{u(x) - \frac{1}{k}, 0\}$.)

18. Olkoon $u \in W_0^{1,p}(]0, 1[)$, $1 < p < \infty$. Osoita, että

$$\|u\|_\infty \le p \, \|Du\|_p.$$

19. Olkoon $u \in W_0^{1,p}(]0, 1[)$, $1 < p < \infty$. Osoita, että on olemassa jatkuva funktio $\tilde{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ siten, että $u(x) = \tilde{u}(x)$ m.k. $x \in \Omega$ ja $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$.
(Vihje: edellinen tehtävä + tasainen suppeneminen.)

20. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $1 < p < \infty$. Osoita, että

$$\mathbb{S} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \, \|u\|_p = 1\}$$

on Sobolev avaruuden $W^{1,p}(\Omega)$ heikosti suljettu osajoukko.
(Vihje: Rellich-Kondratshov)

Luku 4

Variaatiolaskennan suora menetelmä ja ratkaisun olemassaolo

4.1 Heikko alhaalta puolijatkuvuus

Tarkastellaan funktionaalia

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)\, dx,$$

missä $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ on avoin ja rajoitettu, $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja toteuttaa seuraavan kasvuehdon: on olemassa $1 < p < \infty$, $\alpha, \beta > 0$ siten, että

$$F(x, s, \xi) \geq \alpha|\xi|^p - \beta \qquad \text{kaikilla } (x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{4.1.1}$$

Tällöin

$$I(u) \geq \int_\Omega \alpha|Du|^p - \beta\, dx = \alpha\|Du\|^p_{L^p(\Omega)} - \beta|\Omega|.$$

Nyt jos halutaan minimoida funktionaalia I joukossa $K = W^{1,p}_g(\Omega)$, missä $g \in W^{1,p}(\Omega)$ on annettu, niin Lauseen 3.3.13 nojalla

$$\begin{aligned}
I(u) &\geq \alpha\|Du\|^p_p - \beta|\Omega| \geq \alpha\left(\|D(u-g)\|_p - \|Dg\|_p\right)^p - \beta|\Omega| \\
&\geq \alpha\left(C(n,p)\|u-g\|_{1,p} - \|Dg\|_p\right)^p - \beta|\Omega| \\
&\geq \alpha\left(C(n,p)\|u\|_{1,p} - C(n,p)\|g\|_{1,p} - \|Dg\|_p\right)^p - \beta|\Omega| \to +\infty \quad \text{jos } \|u\|_{1,p} \to +\infty.
\end{aligned}$$

Näin ollen ehto (4.1.1) takaa funktionaalin I koersiivisuuden.

Lause 4.1.1. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja olkoon kuvaus $F : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että ehto (4.1.1) on voimassa, $F \in C^1$ ja kuvaus $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ on konveksi kaikille $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Tällöin I on heikosti alhaalta puolijatkuva $W^{1,p}(\Omega)$:ssa: jos $u_j \rightharpoonup u$ $W^{1,p}(\Omega)$:ssa, niin*

$$I(u) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_j).$$

Todistus. Ilman yleisyyden menetystä voidaan olettaa, että $\beta = 0$; muussa tapauksessa tarkastellaan funktiota $\tilde{F} = F + \beta$, jota vastaavan funktionaalin minimoivat täsmälleen samat funktiot kuin alkuperäisenkin funktionaalin.

Olkoon $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ siten, että $u_j \rightharpoonup u$ $W^{1,p}$:ssä. Koska jokainen heikosti suppeneva jono on rajoitettu, on olemassa $M < +\infty$ siten, että

$$\|u_j\|_{1,p} \le M \quad \text{kaikilla } j = 1, 2, \ldots.$$

Rellich-Kondratshov'n lauseen, Lause 3.3.15, nojalla on olemassa osajono $(u_{j_k}) \subset (u_j)$ siten, että $u_{j_k} \to u$ $L^p(\Omega)$:ssa ja $u_{j_k}(x) \to u(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Egorovin lauseesta (katso tähän lukuun liittyvät harjoitustehtävät) puolestaan seuraa, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa mitallinen joukko $E_\varepsilon \subset \Omega$ siten, että $|\Omega \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ ja $u_{j_k} \to u$ tasaisesti joukossa E_ε. Merkitään

$$F_\varepsilon := \Big\{x \in \Omega : \ |u(x)| + |Du(x)| \le \frac{1}{\varepsilon}\Big\}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
|\Omega \setminus F_\varepsilon| &\le |\{x : \ |u(x)| > \frac{1}{2\varepsilon}\}| + |\{x : \ |Du(x)| > \frac{1}{2\varepsilon}\}| \\
&\le 2\varepsilon \int_{\{|u| > \frac{1}{2\varepsilon}\}} |u|\,dx + 2\varepsilon \int_{\{|Du| > \frac{1}{2\varepsilon}\}} |Du|\,dx \\
&\le 2\varepsilon\,(\|u\|_1 + \|Du\|_1)
\end{aligned}$$

ja $2\varepsilon\,(\|u\|_1 + \|Du\|_1) \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$, sillä $u \in W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$, koska Ω rajoitettu. Näin ollen jos asetetaan $G_\varepsilon = E_\varepsilon \cap F_\varepsilon$, niin $|\Omega \setminus G_\varepsilon| \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$. Lisäksi voidaan olettaa $G_\varepsilon \subset\subset \Omega$.

Koska $F(x, s, \xi) \ge 0$ kaikilla $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ja koska $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ on konveksi, saamme Lemman 2.2.5 avulla

$$\begin{aligned}
I(u_{j_k}) &= \int_\Omega F(x, u_{j_k}, Du_{j_k})\,dx \ge \int_{G_\varepsilon} F(x, u_{j_k}, Du_{j_k})\,dx \\
&\ge \int_{G_\varepsilon} F(x, u_{j_k}, Du)\,dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla_\xi F(x, u_{j_k}, Du) \cdot (Du_{j_k} - Du)\,dx.
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Osoitamme ensin, että

$$\lim_{k\to\infty} \int_{G_\varepsilon} F(x, u_{j_k}, Du)\,dx = \int_{G_\varepsilon} F(x, u, Du)\,dx. \tag{4.1.3}$$

Tätä varten palautetaan ensin mieleen, että jos $x \in G_\varepsilon$, niin $|u(x)|, |Du(x)| \le \frac{1}{\varepsilon}$. Koska lisäksi $u_{j_k} \to u$ tasaisesti joukossa G_ε ja $F \in C^1$, on

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial s}(x, t, Du(x))\Big| \le C \qquad \text{kaikilla } x \in G_\varepsilon \text{ ja } |t| \le \sup\{|u(x)|, |u_{j_k}(x)|\}.$$

Siten analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{G_\varepsilon} F(x, u_{j_k}, Du(x)) - F(x, u(x), Du(x))\,dx\Big| &\le \int_{G_\varepsilon} \int_{u(x)}^{u_{j_k}(x)} \Big|\frac{\partial F}{\partial s}(x, t, Du(x))\Big|\,dt\,dx \\
&\le C \int_{G_\varepsilon} |u(x) - u_{j_k}(x)|\,dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

sillä $u_{j_k} \to u$ tasaisesti G_ε:ssa; (4.1.3) on siten todistettu.

Seuraavaksi tarkastelemme epäyhtälön (4.1.2) oikean puolen jälkimmäistä termiä ja osoitamme, että

$$\int_{G_\varepsilon} \nabla_\xi F(x, u_{j_k}, Du) \cdot (Du_{j_k} - Du)\, dx \to 0, \qquad \text{kun } k \to \infty. \tag{4.1.4}$$

Tutkittava integraali voidaan hajottaa kahteen palaseen

$$\begin{aligned}\int_{G_\varepsilon} \nabla_\xi F(x, u_{j_k}, Du) \cdot (Du_{j_k} - Du)\, dx &= \int_{G_\varepsilon} (\nabla_\xi F(x, u_{j_k}, Du) - \nabla_\xi F(x, u, Du)) \cdot (Du_{j_k} - Du)\, dx \\ &\quad + \int_{G_\varepsilon} \nabla_\xi F(x, u, Du) \cdot (Du_{j_k} - Du)\, dx \\ &= A_k + B_k.\end{aligned}$$

Näistä $B_k \to 0$ kun $k \to \infty$, sillä $Du_{j_k} \to Du$ heikosti $L^p(\Omega)$:ssa ja $\nabla_\xi F(x, u, Du) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \subset (L^p(\Omega; \mathbb{R}^n))^*$. Koska $\nabla_\xi F$ on jatkuva, on se tasaisesti jatkuva jokaisessa kompaktissa joukossa $S \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Siten kaikille $\delta > 0$ saadaan Hölderin epäyhtälöä käyttäen

$$\begin{aligned}|A_k| &\le \int_{G_\varepsilon} |\nabla_\xi F(x, u_{j_k}, Du) - \nabla_\xi F(x, u, Du)|\, |Du_{j_k} - Du|\, dx \\ &\le \left(\int_{G_\varepsilon} |\nabla_\xi F(x, u_{j_k}, Du) - \nabla_\xi F(x, u, Du)|^q\right)^{1/q} \|Du_{j_k} - Du\|_p \\ &\le \delta |G_\varepsilon|^{1/q} 2M,\end{aligned}$$

kun $k = k(\delta) \in \mathbb{N}$ on riittävän suuri. Siten (4.1.4) on myös todistettu.

Yhdiställä aputulokset (4.1.3) ja (4.1.4) saamme epäyhtälön (4.1.2) nojalla

$$\liminf_{k\to\infty} I(u_{j_k}) \ge \int_{G_\varepsilon} F(x, u, Du)\, dx = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x)) \chi_{G_\varepsilon}\, dx$$

kaikille $\varepsilon > 0$. Koska $F(x, s, \xi) \ge 0$ ja $|\Omega \setminus G_\varepsilon| \to 0$ kun $\varepsilon \to 0$, monotonisen konvergenssin lause antaa $\int_\Omega F(x, u, Du) \chi_{G_\varepsilon}\, dx \to \int_\Omega F(x, u, Du)\, dx$. Lause on todistettu. □

Huomautus 4.1.2. Oletus $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ei ole välttämätön, vaan riittäisi olettaa, että

- F on ns. Caratheodory-funktio:

$$\begin{aligned}&x \to F(x, s, \xi) \text{ on mitallinen} \quad \text{kaikilla } (s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ &(s, \xi) \to F(x, s, \xi) \text{ on jatkuva m.k. } x \in \Omega.\end{aligned}$$

- $\xi \to F(x, s, \xi)$ on konveksi m.k. $x \in \Omega$ ja kaikille $s \in \mathbb{R}$.
- $F(x, s, \xi) \ge \alpha |\xi|^p - \beta$.

Kuvauksen $\xi \to F(x, s, \xi)$ konveksisuus on itse asiassa myös välttämätön ehto heikolle alhaalta puolijatkuvuudelle.

Lause 4.1.3. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu,* $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jatkuva ja oletetaan, että*

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x))\, dx$$

on heikosti alhaalta puolijatkuva $W^{1,p}$*:ssa,* $1 \le p < \infty$*. Tällöin kuvaus* $\xi \to F(x, s, \xi)$ *on konveksi kaikille* $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$*.*

Todistus. Oletetaan, yksinkertaisuuden vuoksi, että $F(x, s, \xi) = G(\xi)$, missä $G \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ja $G(\xi) \ge 0$ kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että $\Omega =]0, 1[^n =]0, 1[\times \ldots \times]0, 1[$.

Kiinnitetään $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ ja olkoon $\varphi \in C_0^1(]0, 1[^n)$. Seuraavaksi määritellään $[0, 1]^n$ -jaksollinen funktio $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ siten, että $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ kaikilla $x \in [0, 1]^n$; jatkossa samaistamme funktiot φ ja $\tilde{\varphi}$. Määritellään seuraavaksi funktiojonot

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x) &= \frac{1}{k}\varphi(kx), \\
u_k(x) &= \xi_0 \cdot x + \varphi_k(x).
\end{aligned}$$

Todistuksen ensimmäisenä askeleena toteamme, että $u_k \rightharpoonup u$ heikosti $W^{1,p}(\Omega)$:ssa, missä $u(x) = \xi_0 \cdot x$: kaikilla $\psi \in C_0^\infty(]0, 1[^n)$ nimittäin pätee

$$|\int_{]0,1[^n} u_k\, \psi\, dx - \int_{]0,1[^n} u\, \psi\, dx| = |\int_{]0,1[^n} \varphi_k(x)\psi(x)\, dx| \le \frac{||\varphi||_\infty}{k} ||\psi||_\infty \to 0$$

ja

$$\begin{aligned}
|\int_{]0,1[^n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\psi\, dx - \int_{]0,1[^n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \psi\, dx| &= |\int_{]0,1[^n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\psi\, dx| = |\int_{]0,1[^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(kx)\psi(x)\, dx| \\
&= |\int_{]0,1[^n} \frac{1}{k}\frac{\partial(\varphi \circ h_k)}{\partial x_i}(x)\, \psi(x)\, dx| \\
&\overset{\text{ositt.}}{\underset{\text{integ.}}{=}} |-\int_{]0,1[^n} \frac{1}{k}\varphi \circ h_k(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\, dx\,| \\
&\le \frac{||\varphi||_\infty}{k}||\frac{\partial \psi}{\partial x_i}||_\infty \overset{k\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

missä $h_k(x) := kx$. Koska lisäksi

$$\begin{aligned}
||u_k||_p &\le \left(\int_{]0,1[^n} |\xi_0 \cdot x|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_{]0,1[^n} |\varphi_k|^p\, dx\right)^{1/p} \\
&\le C_n|\xi_0| + \frac{1}{k}||\varphi||_\infty
\end{aligned}$$

ja

$$||\tfrac{\partial u_k}{\partial x_i}||_p \le |\xi_0| + \left(\int_{]0,1[^n} |\frac{\partial \varphi(kx)}{\partial x_i}|^p\, dx\right)^{1/p} \le |\xi_0| + ||\tfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}||_\infty$$

eli $\sup_k \|u_k\|_{1,p} < \infty$, niin tämä riittää osoittamaan, että $u_k \rightharpoonup u$ $W^{1,p}$:ssä. Nyt oletuksen mukaan

$$\int_{]0,1[^n} G(Du(x))\,dx \le \liminf_{k\to\infty} \int_{]0,1[^n} \underbrace{G(Du_k(x))}_{G(\xi_0+D\varphi_k(x))}\,dx$$

joten

$$G(\xi_0) \le \liminf_{k\to\infty} \int_{]0,1[^n} G(\xi_0 + D\varphi(kx))\,dx = \liminf_{k\to\infty} \left(k^{-n} \int_{]0,k[^n} G(\xi_0 + D\varphi(y))\,dy\right).$$

Koska $y \mapsto G(\xi_0 + D\varphi(y))$ on jaksollinen funktio, on

$$\int_{]0,k[^n} G(\xi_0 + D\varphi(y))\,dy = k^n \int_{]0,1[^n} G(\xi_0 + D\varphi(y))\,dy$$

ja siten saamme lopulta epäyhtälön

$$G(\xi_0) \le \int_{]0,1[^n} G(\xi_0 + D\varphi(y))\,dy \qquad \text{kaikilla } \varphi \in C_0^1(]0,1[^n).$$

Erityisesti tästä seuraa, että funktio

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = \int_{]0,1[^n} G(\xi_0 + tD\varphi(x))\,dx$$

saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä $t = 0$. Näin ollen $g'(0) = 0$ ja $g''(0) \ge 0$ eli

$$\begin{aligned} g'(t)\,|_{t=0} &= \int_{]0,1[^n} \tfrac{d}{dt} G(\xi_0 + tD\varphi(x))\,dx\,|_{t=0} = \int_{]0,1[^n} \nabla G(\xi_0 + tD\varphi(x)) \cdot D\varphi(x)\,dx\,|_{t=0} \\ &= \int_{]0,1[^n} \nabla G(\xi_0) \cdot D\varphi(x)\,dx = 0 \end{aligned}$$

ja

$$g''(t)\,|_{t=0} = \int_{]0,1[^n} \frac{d^2}{dt^2} G(\xi_0 + tD\varphi(x))\,dx\,|_{t=0} = \int_{]0,1[^n} D^2G(\xi_0) D\varphi(x) \cdot D\varphi(x)\,dx \ge 0$$

kaikilla $\varphi \in C_0^1(]0,1[^n)$; edellä $\left(D^2G(\xi_0)\right)_{ij} = \frac{\partial^2 G}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\xi_0)$ on funktion G toisen kertaluvun osittaisderivaattojen muodostama symmetrinen $n \times n$-matriisi.

Kiinnitetään seuraavaksi $\eta \in \mathbb{R}^n$ ja valitaan $\varphi(x) = \varepsilon w_\varepsilon\left(\frac{x\cdot\eta}{\varepsilon}\right)\psi(x)$, missä $\psi \in C_0^\infty(]0,1[^n)$, $\varepsilon > 0$ ja w_ε on jaksollisen funktion

$$w(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{ja } w(x+1) = w(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

silotus. Tällöin

$$D\varphi(x) = \varepsilon\psi(x) w_\varepsilon'\left(\frac{x\cdot\eta}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}\eta + \varepsilon w_\varepsilon\left(\frac{x\cdot\eta}{\varepsilon}\right)\nabla\psi(x),$$

joten saamme

$$
\begin{aligned}
0 \le & \int_{]0,1[^n} (w'_\varepsilon)^2 \psi^2 \left[D^2G(\xi_0)\eta \cdot \eta \right] dx \\
& + 2\varepsilon \int_{]0,1[^n} \underbrace{\psi w_\varepsilon w'_\varepsilon}_{\text{raj.}} \underbrace{\left[D^2G(\xi_0)\eta \cdot \nabla\psi(x) \right]}_{\text{raj.}} dx \\
& + \varepsilon^2 \int_{]0,1[^n} \underbrace{(w_\varepsilon)^2 \left[D^2G(\xi_0)\nabla\psi(x) \cdot \nabla\psi(x) \right]}_{\text{raj.}} dx \\
& \overset{\varepsilon \to 0}{\to} \int_{]0,1[^n} \left[D^2G(\xi_0)\eta \cdot \eta \right] \psi^2(x)\, dx = \left[D^2G(\xi_0)\eta \cdot \eta \right] \int_{]0,1[^n} \psi^2\, dx.
\end{aligned}
$$

Siten

$$
D^2G(\xi_0)\eta \cdot \eta \ge 0 \quad \text{kaikilla } \xi_0 \in \mathbb{R}^n \text{ ja kaikilla } \eta \in \mathbb{R}^n,
$$

joten Seurauksen 2.2.4 nojalla funktio G on konveksi. □

4.2 Olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Sobolev avaruuksien yhteydessä abstrakti olemassaololause Lause 3.1.21 sanoo seuraavaa:

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $1 < p < \infty, K \subset W^{1,p}(\Omega)$ heikostu suljettu ja epätyhjä joukko ja kuvaus $I : K \to \mathbb{R}$ siten, että

(i) I on koersiivinen: $I(u_j) \to +\infty$, kun $\|u_j\|_{1,p} \to +\infty$, $u_j \in K$

(ii) I on heikosti alhaalta puolijatkuva: jokaiselle jonolle $(u_j) \subset K$ siten, että $u_j \rightharpoonup u \in K$ pätee

$$
I(u) \le \liminf_{j \to \infty} I(u_j).
$$

Tällöin $\inf_{u \in K} I(u) \in \mathbb{R}$ ja on olemassa $u_0 \in K$ siten, että

$$
I(u_0) = \inf_{u \in K}(u).
$$

Edellisissä luvuissa todistettujen tulosten perusteella saamme täten

Lause 4.2.1. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *rajoitettu ja*

$$
I(u) = \int_\Omega F(x, u, Du), dx, \quad F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)
$$

siten, että

(a) on olemassa $1 < p < \infty$, $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0, \beta_1, \beta_2 \ge 0$ *siten, että*

$$
\alpha_1 |\xi|^p - \beta_1 \le F(x, s, \xi) \le \alpha_2 |\xi|^p + \beta_2
$$

kaikilla $(x, s, \xi) \in (\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

(b) *kuvaus* $\xi \to F(x, s, \xi)$ *on konveksi kaikilla* $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Tällöin, jos $g \in W^{1,p}(\Omega)$ *ja* $K = W_g^{1,p}(\Omega)$, *niin on olemassa* $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$ *siten, että*

$$I(u_0) \leq I(u) \quad \textit{kaikilla } u \in W_g^{1,p}(\Omega).$$

Todistus. Ensin huomataan, että

$$\begin{aligned}\inf_{u \in K} I(u) \leq I(g) &= \int_\Omega F(x, g(x), Dg(x))\,dx \\ &\leq \alpha_2 \int_\Omega |Dg(x)|^p\,dx + \beta_2|\Omega| < +\infty,\end{aligned}$$

sillä $g \in W^{1,p}(\Omega)$. Lisäksi I on koersiivinen, koska oletuksen ja Lauseen 3.3.13 nojalla

$$\begin{aligned}I(u) &\geq \alpha_1 \int_\Omega |Du|^p\,dx - \beta_1|\Omega| = \alpha_1\|Du\|_p^p - \beta_1|\Omega| \\ &\geq \alpha_1 \Big(\|D(u-g)\|_p - \|Dg\|_p\Big)^p - \beta_1|\Omega| \\ &\geq \alpha_1 \Big(C(n,p)\|u-g\|_{1,p} - \|Dg\|_p\Big)^p - \beta_1|\Omega| \\ &\geq \alpha_1 \Big(C(n,p)\|u\|_{1,p} - C(n,p)\|g\|_{1,p} - \|Dg\|_p\Big)^p - \beta_1|\Omega| \to +\infty, \quad \text{jos} \quad \|u\|_{1,p} \to +\infty.\end{aligned}$$

Valitaan jono $u_k \in W_g^{1,p}(\Omega)$ siten, että

$$I(u_k) \to \inf_{u \in W_g^{1,p}(\Omega)} I(u);$$

tällainen jono löytyy aina infimumin määritelmän perusteella. Koersiivisuuden perusteella on olemassa $M > 0$ siten, että $\|u_k\|_{1,p} \leq M$ kaikilla $k = 1, 2, \ldots$, sillä muutoin löytyisi osajono $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ siten, että $\|u_{k_j}\|_{1,p} \to +\infty$ ja tällöin $I(u_{k_j}) \to +\infty$.

Koska $\overline{B}(0, M) = \{v \in W_g^{1,p}(\Omega) : \|v\|_{1,p} \leq M\}$ on konveksi, suljettu ja rajoitettu, on se heikosti jonokompakti. Siten on olemassa osajono $(u_{k_j}) \subset (u_k)$ ja $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega) \cap \overline{B}(0, M)$ siten, että $u_{k_j} \rightharpoonup u_0$ $W^{1,p}$:ssä. Lauseen 4.1.1 mukaan I on heikosti alhaalta puolijatkuva, joten

$$I(u_0) \leq \liminf_{j \to \infty} I(u_{k_j}) = \inf_{u \in K} I(u).$$

□

Lause 4.2.2. *Oletetaan edellisen lauseen oletusten lisäksi, että funktio* F *ei riipu muuttujasta* s, *ts.* $F(x, s, \xi) = G(x, \xi) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, *ja että* $\xi \to G(x, \xi)$ *on aidosti konveksi:*

$$G(x, t\xi_1 + (1-t)\xi_2) < tG(x, \xi_1) + (1-t)G(x, \xi_2)$$

kaikille $t \in\,]0, 1[$, $x \in \Omega$ *ja* $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\xi_1 \neq \xi_2$. *Tällöin on olemassa yksikäsitteinen minimoija* $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$, *ts.*

$$I(u_0) < I(u) \qquad \textit{kaikilla } u \in W_g^{1,p}(\Omega), u \neq u_0.$$

Todistus. Tehdään antiteesi ja oletetaan, että löytyy kaksi minimoijaa $u_1, u_2 \in W_g^{1,p}(\Omega)$, $u_1 \neq u_2$. Tällöin $\|u_1 - u_2\|_{1,p} = \|u_1 - u_2\|_p + \|Du_1 + Du_2\|_p > 0$, ja erityisesti Sobolevin epäyhtälön, Lause 3.3.13, nojalla $|\{x : Du_1(x) \neq Du_2(x)\}| > 0$. Koska $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in W_g^{1,p}(\Omega)$ ja $\xi \to G(x, \xi)$ on aidosti konveksi, niin

$$\begin{aligned}
\inf_{u \in W_g^{1,p}(\Omega)} I(u) \leq I(\bar{u}) &= \int_\Omega G(x, D\bar{u})\,dx = \int_\Omega G(x, \tfrac{1}{2}Du_1 + \tfrac{1}{2}Du_2)\,dx \\
&< \frac{1}{2}\int_\Omega G(x, Du_1)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega G(x, Du_2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(I(u_1) + I(u_2)\right) = \inf_{u \in W_g^{1,p}(\Omega)} I(u),
\end{aligned}$$

mikä selvästikin on mahdotonta. $\square$

Seuraavaksi tarkastellaan esimerkkejä, jotka näyttävät, että Lauseen 4.2.1 oletukset ovat todella tarpeen.

Esimerkkejä. a) Olkoon $n = 1$, $\Omega =]0, 1[$ ja

$$I(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}u(x)^2 + (1 - u'(x)^2)^2\,dx, \quad u \in W_0^{1,4}(\Omega).$$

Osoitamme seuraavaksi, ettei ole olemassa funktiota $u_0 \in W_0^{1,4}(\Omega)$ siten, että $I(u_0) = \inf_{u \in W_0^{1,4}(\Omega)} I(u)$, ts. minimointiongelmalla ei ole ratkaisua.

Olkoon $u \in W_0^{1,4}(\Omega)$. Lauseen 3.3.13 nojalla voidaan olettaa, että u on jatkuva. Toteamme aluksi, että $I(u) > 0$ kaikilla $u \in W_0^{1,4}(\Omega)$: Jos $u \equiv 0$, niin

$$I(u) \geq \int_0^1 (1 - u'(x)^2)^2\,dx = 1 > 0.$$

Jos taas $u \not\equiv 0$, niin joukon $\{x \in \Omega : |u(x)| > \frac{1}{k}\}$ mitta on positiivinen jollekin $k \in \mathbb{N}$, ja siten

$$I(u) \geq \int_0^1 \frac{1}{2}u(x)^2\,dx \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2 |\{|u| > \frac{1}{k}\}| > 0.$$

Lisäksi jo suoraan funktionaalin lausekkeesta nähdään, että $\inf_{u \in W_0^{1,4}(\Omega)} I(u) \geq 0$. Määritellään seuraavaksi jono sik-sak-funktioita $u_j \in W_0^{1,4}(\Omega)$ siten, että $|u_j(x)| \leq \frac{1}{2^j}$, $j = 1, 2, \ldots$ ja $|u_j'(x)| = 1$ m.k. Ω:ssa. Tällöin

$$I(u_j) = \int_0^1 \frac{1}{2}u_j(x)^2 + (1 - u_j'(x)^2)^2\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^j}\right)^2\,dx \overset{j \to \infty}{\to} 0$$

ja siten $\inf_{u \in W_0^{1,4}(\Omega)} I(u) = 0$. Nyt siis

$$\inf_{u \in W_0^{1,4}(\Omega)} I(u) = 0, \quad \text{mutta } I(u) > 0 \text{ kaikilla } u \in W_0^{1,4}(\Omega).$$

Ongelmana tässä esimerkissä on se, että vaikka $u_j \rightharpoonup 0$ $W^{1,4}(\Omega)$:ssa (vertaa Lauseen 4.1.3 todistus), niin $I(u_j) \to 0 < I(0)$ eli I ei ole heikosti alhaalta puolijatkuva. Syy tähän on se, että kuvaus $h : \xi \mapsto \frac{1}{2}s^2 + (1-\xi^2)^2$ ei ole konveksi: $h''(\xi) = -4 + 12\xi^2 < 0$ kun ξ on lähellä nollaa.

b) Olkoon $\Omega =]-1, 1[$, $I(u) = \int_{-1}^{1} u'(x)^2 x^4\, dx$, $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$, missä $g(x) = x$, ts. reunaehdot ovat $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$. Jälleen voidaan Lauseen 3.3.13 nojalla olettaa, että jokainen $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$ on jatkuva ja $u(-1) = -1$, $u(1) = 1$.

Kuten edellisessäkin esimerkissä osoitamme, ettei minimointiongelmalla ole ratkaisua. Tarkemmin sanottuna tulemme näyttämään, että $\inf I(u) = 0$, mutta $I(u) > 0$ kaikilla $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$.

Olkoon

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, -\varepsilon] \\ \frac{1}{\varepsilon}x, & x \in]-\varepsilon, \varepsilon[\\ 1, & x \in [\varepsilon, 1] \end{cases}.$$

Tällöin

$$0 \le I(u_\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 x^4\, dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2\varepsilon^5}{5} = \frac{2\varepsilon^3}{5} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

Koska selvästi $I(u) \ge 0$ kaikilla $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$, on $\inf I(u) = 0$.

Kiinnitetään seuraavaksi $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$ ja valitaan $\varphi_j \in C^\infty(\Omega)$ siten, että $\varphi_j \to u$ $W^{1,2}$:ssa ja $\varphi_j(x) \to u(x)$ kaikilla $x \in \Omega$. Koska $u(1) - u(-1) = 1 - (-1) = 2$ ja u on jatkuva, löytyy $x, y \in \Omega$ siten, että $u(x) - u(y) \ge 1$. Siten

$$1 \le u(x) - u(y) = \lim_{j\to\infty} \varphi_j(x) - \varphi_j(y) = \lim_{j\to\infty} \int_y^x \varphi_j'(t)\, dt \le \lim_{j\to\infty} \int_{-1}^{1} |\varphi_j'| = \int_{-1}^{1} |Du(t)|\, dt,$$

minkä perusteella $|\{x : |Du(x)| \ge \frac{1}{k}\}| > 0$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tämän perusteella puolestaan

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{-1}^{1} |Du(x)|^2 x^4\, dx \ge \int_{\{|Du| \ge \frac{1}{k}\}} |Du|^2 x^4\, dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{|Du| \ge \frac{1}{k}\} \cap \{2^{-j} \le |x| < 2^{-j+1}\}} |Du|^2 x^4\, dx \\ &\ge \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(2^{-j})^4 |\{|Du| \ge \frac{1}{k}\} \cap \{2^{-j} \le |x| < 2^{-j+1}\}| > 0, \end{aligned}$$

sillä jokin summan termeistä on positiivinen.

Tällä kertaa ongelmia aiheuttaa se, että funktionaali I ei ole koersiivinen:

$$\begin{aligned}||u_\varepsilon||_{1,2} = ||u_\varepsilon||_2 + ||Du_\varepsilon||_2 \geq ||Du_\varepsilon||_2 &= \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dx\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \infty,\end{aligned}$$

mutta $I(u_\varepsilon) \to 0$. Huomaa myös, että $F(x, s, \xi) = x^4|\xi|^2$ on konveksi muuttujan ξ suhteen.

c) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $1 < p < \infty$ ja $S = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : ||u||_p = 1\}$. Tällöin on olemassa $u_0 \in S$ siten, että

$$\int_\Omega |Du_0|^p\, dx \leq \int_\Omega |Dv|^p\, dx \quad \text{kaikilla } v \in S. \tag{4.2.1}$$

Jos $u \in S$, niin $-u \in S$ ja $\int_\Omega |D(-u)|^p = \int_\Omega |Du|^p$. Näin ollen ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. On kuitenkin niin, että ratkaisuja on vain 2 kappaletta, toinen ei-negatiivinen m.k. ja toinen ei-positiivinen m.k.

Tämän todistamiseksi olkoon $u_0 \in S$ siten, että (4.2.1) pätee kaikilla $v \in S$. Tällöin $w = |u_0| \in S$ ja $\int_\Omega |Dw|^p\, dx = \int_\Omega |Du_0|^p\, dx$, joten myös myös w on minimointiongelman ratkaisu. Oletetaan, että $\tilde{u} \in S$ on myös minimoija ja $\tilde{u}(x) \geq 0$ m.k. $x \in \Omega$. Merkitään

$$h(x) = \left(\frac{w(x)^p + \tilde{u}(x)^p}{2}\right)^{1/p}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}||h||_p^p &= \int_\Omega \frac{w^p + \tilde{u}^p}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega w^p + \int_\Omega \tilde{u}^p\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(||w||_p^p + ||\tilde{u}||_p^p\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1\end{aligned}$$

eli $||h||_p = 1$. Lisäksi

$$Dh = \frac{1}{p}\left(\frac{w^p + \tilde{u}^p}{2}\right)^{1/p-1} \frac{1}{2}(pw^{p-1}Dw + p\tilde{u}^{p-1}D\tilde{u}) = h^{1-p}\frac{1}{2}(w^{p-1}Dw + \tilde{u}^{p-1}D\tilde{u}),$$

joten

$$\begin{aligned}|Dh|^p &= h^{p(1-p)}|\frac{1}{2}(w^{p-1}Dw + \tilde{u}^{p-1}D\tilde{u}|^p = h^p\left|\frac{1}{2}\left(\frac{w^p Dw}{h^p\, w} + \frac{\tilde{u}^p D\tilde{u}}{h^p\, \tilde{u}}\right)\right|^p \\ &= h^p\left|s(x)\frac{Dw}{w} + (1-s(x))\frac{D\tilde{u}}{\tilde{u}}\right|^p,\end{aligned}$$

missä

$$s(x) = \frac{w^p}{w^p + \tilde{u}^p} = \frac{1}{2}\frac{w^p}{h^p}.$$

Koska kuvaus $\xi \mapsto |\xi|^p$ on konveksi, saamme edelleen

$$
\begin{aligned}
h^p \left| s(x)\frac{Dw}{w} + (1-s(x))\frac{D\tilde{u}}{\tilde{u}} \right|^p &\le h^p \left(s(x)\left|\frac{Dw}{w}\right|^p + (1-s(x))\left|\frac{D\tilde{u}}{\tilde{u}}\right|^p \right) \\
&= \frac{1}{2} w^p \left|\frac{Dw}{w}\right|^p + \frac{1}{2}\tilde{u}^p \left|\frac{D\tilde{u}}{\tilde{u}}\right|^p \\
&= \frac{1}{2}|Dw|^p + \frac{1}{2}|D\tilde{u}|^p,
\end{aligned}
$$

eli kaiken kaikkiaan

$$\int_\Omega |Dh|^p \le \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^p + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\tilde{u}|^p.$$

Koska w ja $\tilde{u}$ ovat minimoijia, on yllä oltava yhtäsuuruus. Edelleen, koska $\xi \mapsto |\xi|^p$ on aidosti konveksi, on yhtäsuuruus mahdollista jos ja vain jos $\dfrac{Dw(x)}{w(x)} = \dfrac{D\tilde{u}(x)}{\tilde{u}(x)}$ m.k. $x \in \Omega$. Tämä yhtäsuuruus puolestaan on voimassa jos ja vain jos $w = C\tilde{u}$ jollakin $C \in \mathbb{R}$.

Tarkkaavainen lukija huomaa varmaan, että edellä esitetty päättely on itse asiassa voimassa vain jos sekä w että $\tilde{u}$ ovat positiivisia funktioita. Tämä kuitenkin seuraa ns. Harnackin epäyhtälöstä, joka on voimassa kaikille ehdon (4.2.1) toteuttaville funktioille.

Harjoitustehtäviä

1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu ja $g \in W^{1,2}(\Omega)$. Osoita, että funktionaali

$$I : \mathbb{K} \to \mathbb{R},\ I(u) = \int_\Omega |Du(x)|^2\, dx$$

on koersiivinen joukossa $\mathbb{K} = W^{1,2}_g(\Omega)$: jos $u_j \in W^{1,2}_g(\Omega)$ on jono funktioita siten, että $\|u_j\|_{1,2} \to \infty$ kun $j \to \infty$, niin $I(u_j) \to \infty$.

2. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ symmetrinen $n \times n$ -matriisi siten, että

(i) $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$,

(ii) $|\xi|^2 \le (A(x)\xi)\cdot\xi \le 10^6|\xi|^2$ kaikilla $x \in \Omega$ ja kaikilla $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Olkoon

$$I(u) = \int_\Omega (A(x)Du(x))\cdot Du(x)\, dx.$$

Osoita, että I on heikosti alhaalta puolijatkuva $W^{1,2}(\Omega)$:ssa.

3. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $g \in W^{1,2}(\Omega)$ annettu funktio. Osoita, että on olemassa $u_0 \in W^{1,2}_g(\Omega)$ siten, että

$$\int_\Omega |Du_0|^2\, dx \le \int_\Omega |Dv|^2\, dx \qquad \text{kaikilla } v \in W^{1,2}_g(\Omega).$$

4. Osoita, että edellisen tehtävän funktio u_0 on yksikäsitteinen.

5. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $1 < p < \infty$ ja $\mathbb{S} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_p = 1\}$. Osoita, että on olemassa $u_0 \in \mathbb{S}$ siten, että

$$\int_\Omega |Du_0|^p \, dx \leq \int_\Omega |Dv|^p \, dx \qquad \text{kaikilla } v \in \mathbb{S}.$$

6. Olkoon

$$I(u) = \int_{-1}^{1} (4x^2 - (u'(x))^2)^2 \, dx, \quad u \in W_0^{1,4}(]-1,1[).$$

Osoita, että I saavuttaa pienimmän arvonsa joukossa $W_0^{1,4}(]-1,1[)$.
(Vihje: Minimoija u_0 löytyy päättelemällä.)

7. Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $h \in L^2(\Omega)$ ja

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du(x)|^2 - h(x)u(x) \, dx, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Osoita, että on olemassa funktio $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, joka minimoi funktionaalin I joukossa $W_0^{1,2}(\Omega)$.
(Vihje: Tarvitset Hölderin epäyhtälöä.)

8. Osoita, että edellisen tehtävän minimoija u_0 on yksikäsitteinen.

9. Todista Egorovin lause: Jos $|A| < \infty$, $f, f_j \; A \to \mathbb{R}$ ovat mitallisia siten, että $f_j(x) \to f(x)$ m.k. $x \in A$, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa mitallinen $E_\varepsilon \subset A$ siten, että $|A \setminus E_\varepsilon| < \varepsilon$ ja $f_j \to f$ tasaisesti joukossa E_ε.

(Vihje: Olkoot

$$E_{k,m} := \bigcup_{j=m}^{\infty} \{x \,|\, f_j(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Tällöin kaikille $k \in \mathbb{N}$ on olemassa $m_k \in \mathbb{N}$ siten, että $|E_{k,m_k}| < \varepsilon 2^{-k}$ (miksi?). Näytä, että $E_\varepsilon := A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} E_{k,m_k}$ kelpaa.)

Luku 5

Euler-Lagrangen yhtälö

Riittävät ja välttämättömät ehdot $\mathbb{R}^n$:ssä

Ennen kuin tarkastelemme ääretönulotteista tilannetta, on hyvä hakea mallia $\mathbb{R}^n$:stä. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva ja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ siten, että

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Tällöin jos $e \in \mathbb{R}^n$, niin

$$f(x_0) \leq f(x_0 + te) \quad \text{kaikilla } t \in \mathbb{R}.$$

Siten funktio $g(t) = f(x_0 + te)$ saa pienimmän arvonsa pisteessä $t = 0$, mistä seuraa, että

$$0 = g'(0) = \nabla f(x_0 + te) \cdot e \,|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot e = D_e f(x_0).$$

Lisäksi siitä, että $\nabla f(x_0) \cdot e = 0$ kaikilla yksikkövektoreilla $e \in \mathbb{R}^n$ seuraa tunnetusti, että $\nabla f(x_0) = 0$.

Huomautus 5.0.3. (i) Edellä riittäisi olettaa, että $f(x_0) \leq f(x)$ kaikilla x jossakin pienessä x_0:n ympäristössä.

(ii) Ehdosta $\nabla f(x_0) = 0$ ei yleisesti ottaen seuraa, että funktiolla f on minimi pisteessä x_0. Kuitenkin jos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti differentioituva ja konveksi, niin Lemman 2.2.5 nojalla $\nabla f(x_0) = 0$ jos ja vain jos f saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä x_0.

5.1 Ensimmäinen variaatio

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva siten, että on olemassa luvut $1 < p < \infty$, $\alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$ ja $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ joille

$$\alpha_1 |\xi|^p - \beta_1 \leq F(x, s, \xi) \leq \alpha_2 |\xi|^p + \beta_2.$$

Merkitään

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\, dx.$$

Kiinnitetään reuna-arvot $g \in W^{1,p}(\Omega)$ ja oletetaan, että $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$ on siten, että

$$I(u_0) \leq I(u) \quad \text{kaikilla } u \in W_g^{1,p}(\Omega).$$

Olkoon $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ja merkitään $u_t := u_0 + t\psi$. Tällöin $u_t \in W_g^{1,p}(\Omega)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, sillä

$$u_t - g = \underbrace{(u_0 - g)}_{\in W_0^{1,p}(\Omega)} + \underbrace{t\psi}_{\in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)} \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Koska u_0 minimoi funktionaalin I, niin $I(u_0) \leq I(u_t)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Näin ollen funktio $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = I(u_t)$ saavuttaa pienimmän arvonsa pisteessä $t = 0$, ja siten

$$\begin{aligned}
0 = h'(0) &= \frac{d}{dt} \int_\Omega F(x, u_0(x) + t\psi(x), Du_0(x) + tD\psi(x))\, dx \;\Big|_{t=0} \\
&\overset{(*)}{=} \int_\Omega \frac{d}{dt} F(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi)\, dx \;\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial s}(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi)\, \psi + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i}(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi)\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx \;\Big|_{t=0} \\
&= \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial s}(x, u_0(x), Du_0(x))\, \psi(x) + \nabla_\xi F(x, u_0(x), Du_0(x)) \cdot D\psi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Edellisen päättelyn kohta $(*)$ on voimassa dominoidun konvergenssin lauseen nojalla jos kaikilla riittävän pienillä $t \in \mathbb{R}$ erotusosamäärille

$$\frac{h(t) - h(0)}{t} = \frac{F(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi) - F(x, u_0, Du_0)}{t}$$

löytyy yhteinen integroituva majorantti. Väliarvolauseen nojalla tällainen majorantti löytyy jos

$$h'(t) = \frac{\partial F}{\partial s}(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi)\psi + \nabla_\xi F(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi) \cdot D\psi$$

on tasaisesti integroituva kaikilla itseisarvoltaan riittävän pienillä t. Koska $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, riittää olettaa, että $\frac{\partial F}{\partial s}(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi)$ ja $\nabla_\xi F(x, u_0 + t\psi, Du_0 + tD\psi)$ integroituvat tasaisesti. Tämä puolestaan on totta esimerkiksi jos on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|\tfrac{\partial F}{\partial s}(x, s, \xi)|, |\nabla_\xi F(x, s, \xi)| \leq C(1 + |s|^p + |\xi|^p) \tag{5.1.1}$$

kaikilla $(x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Määritelmä 5.1.1. Sanotaan, että funktio $u \in W^{1,p}(\Omega)$ toteuttaa funktionaalia I vastaavan *Eulerin yhtälön heikossa muodossa*, jos

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), Du(x))\psi(x) + \nabla_\xi F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\psi(x)\, dx = 0$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Esimerkki 5.1.2. Olkoon

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2 - h(x)u(x)\,dx,$$

missä $h \in L^2(\Omega)$ annettu funktio. Tällöin

$$F(x,s,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 - h(x)s, \quad \frac{\partial F}{\partial s}(x,s,\xi) = -h(x), \quad \text{ja } \nabla_\xi F(x,s,\xi) = \xi,$$

joten Eulerin yhtälön heikko muoto on

$$\int_\Omega -h(x)\psi(x) + Du(x)\cdot D\psi(x)\,dx = 0 \qquad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Edellä tehty päättely antaa meille seuraavan lauseen:

Lause 5.1.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $g \in W^{1,p}(\Omega)$ ja $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega)$ siten, että $I(u_0) \le I(u)$ kaikilla $u \in W_g^{1,p}(\Omega)$, missä*

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), Du(x))\,dx$$

toteuttaa ehdon $I(u) \in \mathbb{R}$ kaikilla $u \in W_g^{1,p}(\Omega)$. Tällöin jos osittaisderivaatat $\frac{\partial F}{\partial s}$ ja $\nabla_\xi F$ toteuttavat ehdon (5.1.1), niin u_0 toteuttaa Eulerin yhtälön heikossa muodossa, ts.

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial s}(x,u_0,Du_0)\psi(x) + \nabla_\xi F(x,u_0,Du_0)\cdot D\psi(x)\,dx = 0 \tag{5.1.2}$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Huomautus 5.1.4. Jos funktion F osittaisderivaatoille on voimassa vahvempi kasvuehto

$$|\tfrac{\partial F}{\partial s}(x,s,\xi)|, |\nabla_\xi F(x,s,\xi)| \le C(1 + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$$

jollakin $C > 0$ ja kaikilla $(x,s,\xi) \in \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, niin (5.1.2) pätee kaikilla $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tämä nähdään käyttäen Hölderin epäyhtälöä ja tietoa, että jokaiselle $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on olemassa jono $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\|\psi - \psi_j\|_{1,p} \to 0$ kun $j \to \infty$; todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Yleisesti ottaen funktio, joka toteuttaa Eulerin yhtälön heikossa muodossa ei välttämättä minimoi vastaavaa funktionaalia I. Sopivan konveksisuusoletuksen ollessa voimassa tulos kuitenkin pätee.

Lause 5.1.5. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja funktionaali*

$$I(u) = \int_\Omega G(x, Du)\,dx$$

siten, että $G \in C^1(\Omega)$, $\xi \mapsto G(x,\xi)$ on konveksi kaikille $x \in \Omega$ ja $\alpha_1|\xi|^p \le G(x,\xi) \le \alpha_2|\xi|^p$ joillekin $\alpha_2 \ge \alpha_1 > 0$. Tällöin, jos $g \in W^{1,p}(\Omega)$ on annettu, niin

$$I(u_0) = \inf_{u \in W_g^{1,p}(\Omega)} I(u) \quad \textit{jos ja vain jos} \quad u_0 \textit{ toteuttaa Eulerin yhtälön heikossa muodossa}.$$

Todistus. Oletetaan ensin, että u_0 minimoi funktionaalin I joukossa $W_g^{1,p}(\Omega)$ ja olkoon $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$. Edellisen lauseen todistelun perusteella riittää osoittaa, että

$$\int_\Omega |\nabla_\xi G(x, Du_0 + tD\psi) \cdot D\psi|\, dx \leq C$$

kaikilla $|t| \leq 1$. Lemman 2.2.5 nojalla

$$G(x,\xi) \geq G(x,\xi_0) + \nabla_\xi G(x,\xi_0) \cdot (\xi - \xi_0) \qquad \text{kaikilla } \xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi G(x, Du_0 + tD\psi) \cdot D\psi &\leq G(x, Du_0 + (1+t)D\psi) - G(x, Du_0 + tD\psi) \\
&\leq \alpha_2 |Du_0 + (1+t)D\psi|^p - \alpha_1 |Du_0 + tD\psi|^p \\
&\leq (2^p\alpha_2 - \alpha_1)|Du_0 + tD\psi|^p + 2^p\alpha_2 |D\psi|^p.
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi G(x, Du_0 + tD\psi) \cdot D\psi &\geq G(x, Du_0 + tD\psi) - G(x, Du_0 + (t-1)D\psi) \\
&\geq \alpha_1 |Du_0 + tD\psi|^p - \alpha_2 |Du_0 + tD\psi - D\psi|^p \\
&\geq (\alpha_1 - 2^p\alpha_2)|Du_0 + tD\psi|^p - 2^p\alpha_2 |D\psi|^p.
\end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä kaksi epäyhtälöä saamme

$$\int_\Omega |\nabla_\xi G(x, Du_0 + tD\psi) \cdot D\psi|\, dx \leq C \left(\int_\Omega |Du_0|^p\, dx + \int_\Omega |D\psi|^p\, dx \right) < +\infty$$

kaikilla $|t| < 1$ kuten halusimmekin.

Lauseen käänteistä puolta varten olkoon $v \in W_g^{1,p}(\Omega)$, jolloin siis $u_0 - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ja siistit funktiot $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\|\psi_j - (u_0 - v)\|_{1,p} \to 0$ ja $D\psi_j(x) \to Du_0(x) - Dv(x)$ m.k. $x \in \Omega$. Oletuksen nojalla

$$\int_\Omega \nabla_\xi G(x, Du_0) \cdot D\psi_j\, dx = 0 \qquad \text{kaikilla } j.$$

Dominoidun konvergenssin lauseen avulla, käyttäen hyväksi todistuksen alkuosan arvioita, saamme

$$\int_\Omega \nabla_\xi G(x, Du_0) \cdot (Du_0 - Dv)\, dx = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \nabla_\xi G(x, Du_0) \cdot D\psi_j\, dx = 0.$$

Koska kuvaus $\xi \mapsto G(x,\xi)$ on konveksi, Lemma 2.2.5 antaa

$$G(x, Du_0) + \nabla_\xi G(x, Du_0) \cdot (Dv - Du_0) \leq G(x, Dv).$$

Intergroimalla tämä epäyhtälö saadaan

$$\int_\Omega G(x, Du_0)\, dx + \int_\Omega \nabla_\xi G(x, Du_0) \cdot (Dv - Du_0)\, dx \leq \int_\Omega G(x, Dv)\, dx.$$

Koska vasemman puolen toisen termin tiedetään olevan nolla, tästä seuraa lopulta

$$\int_\Omega G(x, Du_0)\, dx \leq \int_\Omega G(x, Dv)\, dx.$$

□

Esimerkkejä. **a)** Olkoon

$$I(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}u'(x)^2 + (1-u(x)^2)^3\,dx, \quad u \in W^{1,2}(]0,1[).$$

Tällöin $F(s,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + (1-s^2)^3$, joten

$$\frac{\partial F}{\partial s} = -6(1-s^2)^2 s,$$
$$\nabla_\xi F = \frac{\partial F}{\partial \xi} = \xi.$$

Siten I:n Eulerin yhtälön heikko muoto on

$$\int_0^1 u'(x)\psi'(x) - 6(1-u(x)^2)^2 u(x)\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(]0,1[).$$

b) Olkoon

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p\,dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ u \in W_g^{1,p}(\Omega),\ 1 < p < \infty,$$

jolloin $F(x,s,\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p = \frac{1}{p}(|\xi|^2)^{p/2} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{p/2}$, $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_k}(\xi) = \frac{1}{p}\cdot\frac{p}{2}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2\right)^{p/2-1}\cdot 2\xi_k = |\xi|^{p-2}\xi_k, \quad k = 1,\ldots,n.$$

eli

$$\nabla_\xi F(\xi) = \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial \xi_n}\right) = (|\xi|^{p-2}\xi_1,\ldots,|\xi|^{p-2}\xi_n) = |\xi|^{p-2}\xi.$$

Siten Eulerin yhtälön heikko muoto on

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot D\psi\,dx = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tämä pätee myös kaikilla $\psi \in W_0^{1,p}(\Omega)$: Olkoon $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ja valitaan $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ siten, että $\|\psi_j - v\|_{1,p} \overset{j\to\infty}{\to} 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot Dv\,dx &= \int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot(Dv - D\psi_j)\,dx + \int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot D\psi_j\,dx\\ &= \int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot(Dv - D\psi_j)\,dx.\end{aligned}$$

Hölderin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot(Dv - D\psi_j)\,dx\right| &\le \left(\int_\Omega |Du|^p\,dx\right)^{1-1/p}\left(\int_\Omega |Dv - D\psi_j|^p\,dx\right)^{1/p}\\ &= \|Du\|_p^{p-1}\|D\psi_j - Dv\|_p \overset{j\to\infty}{\to} 0,\end{aligned}$$

joten $\int_\Omega |Du|^{p-2}Du\cdot Dv\,dx = 0$ kaikilla $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

5.2 Eulerin yhtälön vahva muoto

Eulerin yhtälön heikko muoto on hyödyllinen variaatiolaskennan teorian rakentamisen kannalta, mutta jos tarkoituksena on minimoivan funktion löytäminen ei siitä yleensä ole paljoakaan iloa. Jos kuitenkin minimoiva funktio on riittävän säännöllinen, voidaan sen osoittaa toteuttavan myös selvästi vahvemman ehdon, jota käyttäen voidaan sopivissa erikoistapauksissa löytää eksplisiittinen lauseke minimoivalle funktiolle. Tarkastelemme asiaa aluksi esimerkin kautta.

Esimerkki 5.2.1. Olkoon

$$I(u) = \int_0^1 \frac{1}{2}u'(x) - h(x)u(x)\,dx,$$

missä $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ja $h \in L^2(\Omega)$ on annettu funktio. Tällöin $F(x,s,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 - h(x)s$, joten Eulerin yhtälön heikko muoto on

$$\int_0^1 u'(x)\psi'(x) - h(x)\psi(x)\,dx = 0 \qquad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(]0,1[);$$

tämä ehto toteutuu jos ja vain jos u minimoi funktionaalin I. Oletetaan, että $u \in C^2(]0,1[)$ ja $h \in C(]0,1[)$. Tällöin osittaisintegrointi antaa

$$\int_0^1 u'(x)\psi'(x)\,dx = \Big/_0^1 u'(x)\psi(x) - \int_0^1 u''(x)\psi(x)\,dx = -\int_0^1 u''(x)\psi(x)\,dx$$

eli Eulerin yhtälön heikko muoto voidaan kirjoittaa muodossa

$$\int_0^1 (-u''(x) - h(x))\psi(x)\,dx = 0 \qquad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5.2.1}$$

Koska $x \mapsto -u''(x) - h(x)$ on oletuksemme mukaan jatkuva funktio, on helppo nähdä, että ehdosta (5.2.1) seuraa $-u''(x) - h(x) = 0$ kaikilla $x \in\ ]0,1[$. Näin ollen

$$u'(x) = \int_0^x u''(t)\,dt + c = c - \int_0^x h(t)\,dt,$$

mistä saamme

$$u(x) = \underbrace{u(0)}_{=0} + \int_0^x \left(c - \int_0^y h(t)\,dt \right) dy.$$

Vakio c saadaan ratkaistua ehdosta $u(1) = 0$ eli $\int_0^1 \left(c - \int_0^y h(t)\,dt \right) dy = 0$. Esimerkiksi jos $h(x) = 1$ kaikilla $x \in]0,1[$, niin saamme

$$u(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2.$$

Edellä tehdyn päättelyn jälkeen on syytä kysyä minimoiko löydetty funktio u todella funktionaalin I? Osoitimme, että jos $u \in C^2$ on minimoija, niin se on välttämättä muotoa

$$u(x) = \int_0^x (c - \int_0^y h(t)\,dt)\,dy.$$

Toisaalta funktionaalin aidon konveksisuuden perusteella tiedämme, että löytyy yksikäsitteinen $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$, joka minimoi funktionaalin I ja ainoana funktiona toteuttaa Eulerin yhtälön heikon muodon. Siten

$$u(x) = \int_0^x (c - \int_0^y h(t)\,dt)\,dy$$

on etsitty minimoija, jos pystymme näyttämään, että se kuuluu oikeaan Sobolev avaruuteen $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Seuraavaksi tarkoituksena on pyrkiä yleistämään edellisen esimerkin osittaisintegrointiin perustunut päättely yleiseen tilanteeseen. Aluksi tarvitaan kuitenkin seuraava yksinkertainen, mutta tärkeä aputulos:

Lemma 5.2.2. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja $v \in L^1(\Omega)$.*

(a) Jos

$$\int_\Omega v(x)\psi(x)\,dx = 0 \qquad \textit{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

niin $v = 0$ (ts. $v(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$).

(b) Jos joukko Ω on yhtenäinen ja

$$\int_\Omega v(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\,dx = 0 \qquad \textit{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ ja kaikilla } i = 1, \dots, n,$$

niin v on vakiofunktio.

Todistus. a) Merkitään $\Omega_j = \{x \in \Omega : \ dist(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \frac{1}{j}\}$, $j = 1, 2, \dots$. Kiinteälle j, olkoon $0 < \varepsilon < \frac{1}{j}$ ja v_ε funktion v silotus. Tällöin jos $x \in \Omega_j$, niin oletuksen mukaan

$$v_\varepsilon(x) = \int_\Omega v(x)\underbrace{\eta(x-y)}_{\in C_0^\infty(\Omega)}\,dy = 0.$$

Siten Lauseen 3.2.14 perusteella

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} ||v_\varepsilon - v||_{L^1(\Omega_j)} = \int_{\Omega_j} |v(x)|\,dx.$$

Näin ollen $v(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega_j$, joten $v(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$.

b) Lauseen 3.2.14 ja oletuksen nojalla

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} v(y)\frac{\partial \eta}{\partial x_i}(x-y)\,dy = 0 \quad \text{kaikilla } i = 1, \dots, n.$$

Siten $\nabla v_\varepsilon(x) = 0$ kaikilla $x \in \Omega_j$. Kiinnitetään seuraavaksi $x, y \in \Omega$. Koska Ω on avoin ja yhtenäinen, ja siten polkuyhtenäinen, löytyy jatkuva kuvaus $\gamma : [0,1] \to \Omega$ siten, että $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Merkitään

$$\Gamma = \{\gamma(t) : \ t \in [0,1]\} \subset \Omega.$$

Koska Γ on kompakti, on olemassa $j_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $\Gamma \subset \Omega_{j_0}$. Nyt

$$v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y) = \int_0^1 \nabla v_\varepsilon(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = 0,$$

joten v_ε on vakiofunktio, ts. $v_\varepsilon(x) = c(\varepsilon)$ kaikilla $x \in \Omega$.

Koska $v_\varepsilon \to v$ $L^1(\Omega_j)$:ssa, on olemassa osajono ε_k siten, että $v_{\varepsilon_k} \to v(x)$ m.k. $x \in \Omega_j$. Siten on olemassa raja-arvo $\lim_{k\to\infty} c(\varepsilon) = c$ ja $v(x) = c$ m.k. $x \in \Omega_j$, $j = 1, \dots, n$. Koska $\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \subset \dots$, on $v(x) = c$ m.k. $x \in \Omega$ eli v on vakiofunktio. □

Lause 5.2.3. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu, $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ ja $u \in C^2(\Omega)$ siten, että*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial s}(x, u(x), Du(x))\psi(x) + \nabla_\xi F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\psi(x)\, dx = 0$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ (ts. u toteuttaa Eulerin yhtälön heikon muodon). Tällöin

$$-\operatorname{div}(\nabla_\xi F(x, u(x), Du(x))) + \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), Du(x)) = 0 \quad \textit{kaikilla } x \in \Omega.$$

Todistus. Merkitään

$$w_i(x) = \frac{\partial F}{\partial \xi_i}(x, u(x), Du(x))$$

ja $w(x) = (w_1(x), \dots, w_n(x) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Osoittaisintegrointi antaa

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla_\xi F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\psi(x)\, dx &= \int_\Omega w(x) \cdot D\psi(x)\, dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega w_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left(- \int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x)\psi(x)\, dx \right) \\
&= - \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x) \right) \psi(x)\, dx = - \int_\Omega (\operatorname{div} w(x))\psi(x)\, dx \\
&= - \int_\Omega \operatorname{div}(\nabla_\xi F(x, u(x), Du(x)))\psi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \nabla_\xi F(x, u(x), Du(x)) \cdot D\psi(x) + \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), Du(x))\psi(x)\, dx \\
&= \int_\Omega \left(-\operatorname{div}(\nabla_\xi F(x, u(x), Du(x))) + \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), Du(x)) \right) \psi(x)\, dx
\end{aligned}$$

kaikilla $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, joten väite seuraa suoraan Lemmasta 5.2.2. □

Määritelmä 5.2.4. Osittaisdifferentiaaliyhtälö

$$-\operatorname{div}(\nabla_\xi F(x,u(x),Du(x))) + \frac{\partial F}{\partial s}(x,u(x),Du(x)) = 0 \tag{5.2.2}$$

on funktionaalia $I(u) = \int_\Omega F(x,u,Du)\,dx$ vastaava *Eulerin yhtälö* (vahvassa muodossa).

Esimerkkejä. a) Olkoon

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du|^2\,dx, \quad u \in W_g^{1,2}(\Omega),$$

missä $g \in W^{1,2}(\Omega)$ on annettu. Koska kuvaus $\xi \mapsto \frac{1}{2}|\xi|^2$ on konveksi, seuraa Lauseesta 5.1.5, että $u_0 \in W_g^{1,2}(\Omega)$ minimoi funktionaalin I jos ja vain jos u_0 toteuttaa Eulerin yhtälön heikossa muodossa.

Koska $F(\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2$ ja $\nabla_\xi F(\xi) = \xi$, niin Eulerin yhtälön heikko muoto on

$$\int_\Omega Du(x)\cdot D\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Jos $u \in C^2(\Omega)$, niin osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int_\Omega -\operatorname{div}(Du(x))\psi(x) = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

joten $-\operatorname{div}(Du(x)) = 0$ kaikilla $x \in \Omega$. Nyt $Du(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)$ ja siten

$$-\operatorname{div}(Du(x)) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}(x) =: -\Delta u(x),$$

missä Δ on ns. *Laplace-operaattori*.

b) Olkoon

$$I(u) = \int_{-1}^{1} x^4(u'(x))^2\,dx, \quad u \in W^{1,2}(]0,1[).$$

Nyt $F(x,\xi) = x^4\xi^2$, $\frac{\partial F}{\partial s} = 0$ ja $\frac{\partial F}{\partial \xi}(x,\xi) = 2x^4\xi$. Näin ollen Eulerin yhtälön heikko muoto on

$$\int_{-1}^{1} 2x^4u'(x)\psi'(x)\,dx = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

mistä vahvaksi muodoksi saadaan

$$-\frac{d}{dx}\left(2x^4u'(x)\right) = 0$$

eli

$$-8x^3u'(x) - 2x^4u''(x) = 0.$$

5.2.1 Sidotun minimointiongelman Eulerin yhtälö: esimerkki

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du(x)|^2\,dx.$$

Minimoidaan tätä fuktionaalia joukossa

$$S := \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|v\|_2 = 1\}.$$

Koska S on Lauseen 3.3.15 nojalla heikosti suljettu, on suhteellisen helppo osoittaa, että on olemassa $u_0 \in S$ siten, että $I(u_0) \le I(v)$ kaikilla $v \in S$. Mutta mikä on ongelmaa vastaava Eulerin yhtälö?

Olkoon $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ ja merkitään $w_t := u_0 + t\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Kun $|t|$ on riittävän pieni, pätee $\|w_t\|_2 \ge \|u_0\|_2 - |t|\|\psi\|_2 > 0$ ja

$$u_t := \frac{1}{\|w_t\|_2} w_t \in S.$$

Koska u_0 on minimoija, on $I(u_0) \le I(u_t)$, kun $t \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$. Funktiolla $g(t) = I(u_t)$ on siten minimi pisteessä $t = 0$ ja saamme

$$\begin{aligned}
0 = g'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{I(u_t) - I(u_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |Du_t|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\int_\Omega \frac{1}{\|u_t\|_2^2}|Du_0 + tD\psi|^2\,dx - \int_\Omega |Du_0|^2\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{\|u_t\|_2^2}\int_\Omega |Du_0|^2 + 2tDu_0\cdot D\psi + t^2|D\psi|^2\,dx - \frac{1}{\|u_0\|_2^2}\int_\Omega |Du_0|^2\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\|u_t\|_2^2} - \frac{1}{\|u_0\|_2^2}}{t}\int_\Omega |Du_0|^2\,dx + \frac{2}{\|u_t\|_2^2}\int_\Omega Du_0\cdot D\psi\,dx + \frac{t}{\|u_t\|_2^2}\int_\Omega |D\psi|^2\,dx\right)
\end{aligned}$$

Koska $\|u_0\|_2 - |t|\,\|\psi\|_2 \le \|u_t\|_2 \le \|u_0\|_2 + |t|\,\|\psi\|_2$, niin $\|u_t\|_2 \to \|u_0\|_2 = 1$ kun $t \to 0$. Jatketaan yo. yhtälöketjua:

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2\,dx\ \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\|u_0\|_2^2 - \|u_t\|_2^2}{t\|u_0\|_2^2\|u_t\|_2^2}\right) + \int_\Omega Du_0\cdot D\psi\,dx$$

missä

$$\begin{aligned}
\frac{\|u_0\|_2^2 - \|u_t\|_2^2}{t\|u_0\|_2^2\|u_t\|_2^2} &= \frac{\int_\Omega |u_0|^2\,dx - \int_\Omega |u_0 + t\psi|^2\,dx}{t\|u_t\|_2^2} = \frac{\int_\Omega |u_0|^2\,dx - \int_\Omega (|u_0|^2 + 2tu_0\psi + t^2\psi^2)\,dx}{t\|u_t\|_2^2}\\
&= \frac{-2\int_\Omega u_0\psi\,dx - t\int_\Omega \psi^2}{\underbrace{\|u_t\|_2^2}_{\to 1}} \overset{t\to 0}{\to} -2\int_\Omega u_0\psi\,dx.
\end{aligned}$$

Saadaan siis kaiken kaikkiaan yhtälö

$$\int_\Omega Du_0\cdot D\psi\,dx = \lambda\int_\Omega u_0\psi\,dx \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{5.2.3}$$

missä $\lambda := \int_\Omega |Du_0|^2\,dx > 0$. Tämä on Eulerin yhtälön heikko muoto, jossa siis tuntemattomia ovat sekä $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ että $\lambda \in \mathbb{R}$.

Huomautus 5.2.5. Samaan tulokseen päädyttäisiin myös päättelyllä

$$\begin{aligned} 0 = g'(0) &= \frac{d}{dt} I(u_t)\,|_{t=0} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|u_0 + t\psi\|_2^2}\int_\Omega |Du_0 + tD\psi|^2\,dx\right)|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\int_\Omega |Du_0 + tD\psi|^2\,dx}{\int_\Omega |u_0 + t\psi|^2}\right)|_{t=0} = \ldots, \end{aligned}$$

jossa viimeiseen muotoon sovellettaisiin osamäärän derivointisääntöä.

Edellisen esimerkin funktionaalin Eulerin yhtälön vahva muoto saadaan jälleen osittaisintegroinnilla, mikä antaa

$$\int_\Omega Du_0(x)\cdot D\psi(x) = -\int_\Omega \operatorname{div}(Du_0(x))\psi(x)\,dx = -\int_\Omega \Delta u_0(x)\psi(x)\,dx.$$

Saadaan siis

$$\int_\Omega (-\Delta u_0(x) - \lambda u_0(x))\,\psi(x)\,dx = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

eli päädymme lopulta yhtälööön

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x) & \text{kaikilla } x \in \Omega, \\ \quad u(x) = 0 & \text{kaikilla } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Huomautus 5.2.6. (i) Jos $u \in C^2(\Omega)$ toteuttaa yhtälön (5.2.4), niin myös funktio $Cu(x)$ toteuttaa sen kaikille vakioille $C \in \mathbb{R}$. Erityisesti $u = 0$ on aina ratkaisu.

(ii) Jos $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $u \neq 0$, toteuttaa yhtälön (5.2.3), niin sanotaan, että u on Laplace operaattorin Δ *ominaisfunktio* ja luku λ u:ta vastaava *ominaisarvo*. (vrt. matriisin A (eli lineaarikuvauksen) ominaisarvot: $Ax = \lambda x$.)

(iii) Edellä suoritettua päättelyä kannattaa verrata differentiaalilaskennan kurssilta tuttuun Lagrangen kertojien menetelmään: Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$, ja oletetaan, että $\nabla g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in S$. Jos $f(x_0) \leq f(x)$ kaikilla $x \in S$, niin $\nabla f(x_0) = \lambda g(x_0)$ jollekin $\lambda \in \mathbb{R}$.

Edellä tehdyn päättelyn vastaavat kuvaukset olivat

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx \qquad \text{ja} \qquad J(u) = \int_\Omega |u|^2\,dx - 1;$$

huomaa, että $S = \{u : J(u) = 0\} = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) : \|u\|_2 = 1\}$. Eulerin yhtälön heikon muodon (5.2.3):n voidaan tulkita tarkoittavan yhtälöä $I'(u_0) = \lambda J'(u_0)$.

5.3 Eulerin yhtälön ratkaiseminen

Mielivaltaista funktionaalia vastaava Eulerin yhtälön ratkaiseminen ei yleensä onnistu. Seuraavassa keskitytäänkin yksiulotteisiin erikoistapauksiin, joissa yhtälön muoto mahdollistaa tietyt lisätarkastelut ja antaa työkalut sen ratkaisemiseen.

Olkoon $\Omega =]a, b[$, erityisesti siis $n = 1$, ja

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u(x), u'(x))\,dx, \qquad \text{missä } f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n).$$

Eulerin yhtälön vahva muoto on tällöin

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right) + \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), u'(x)) = 0,$$

missä termi $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right)$ on auki kirjoitettuna

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right) =& \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial x}(x, u(x), u'(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial s}(x, u(x), u'(x))u'(x)\\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x, u(x), u'(x))u''(x).\end{aligned}$$

A. Funktio $F(x, s, \xi)$ ei riipu muuttajasta x.

Tällöin tietysti $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial x} \equiv 0$. Lisäksi jos $u \in C^2(\Omega)$ toteuttaa Eulerin yhtälön vahvassa muodossa, niin

$$E(x) := F(u, u') - u'\frac{\partial F}{\partial \xi}(u, u') = \text{ vakio.}$$

Lauseketta E sanotaan *Eulerin yhtälön ensimmäiseksi intergraaliksi*.

Todistus. Suora lasku antaa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}E(x) &= \frac{d}{dx}\left[F(u(x), u'(x)) - u'(x)\frac{\partial F}{\partial \xi}(u(x), u'(x))\right]\\ &= \frac{\partial F}{\partial s}(u, u')u' + \frac{\partial F}{\partial \xi}(u, u')u'' - u''\frac{\partial F}{\partial \xi}(u, u') - (u')^2\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial s}(u, u') - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(u, u')u'u''\\ &= u'\left(\frac{\partial F}{\partial s}(u, u') - u'\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial s}(u, u') - \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(u, u')u''\right)\\ &= u'\left(\frac{\partial F}{\partial s}(u, u') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(u, u')\right)\right) = 0,\end{aligned}$$

missä viimeisin yhtäsuuruus seuraa oletuksesta, että u on Eulerin yhtälön ratkaisu. □

Esimerkkejä. a) Pyörähdyskappaleen pinnan alan minimointi:

$$I(u) = 2\pi \int_0^1 u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\,dx,$$

missä $u \in W^{1,1}(]0,1[)$, $u(0) = \alpha > 0$, $u(1) = \beta > 0$ ja $u(x) \geq 0$ m.k. $x \in]0,1[$. Tässä tapauksessa siis $F(s,\xi) = s\sqrt{1+\xi^2}$, joten $\frac{\partial F}{\partial s} = \sqrt{1+\xi^2}$ ja $\frac{\partial F}{\partial \xi} = s\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$.

Eulerin yhtälön ensimmäinen integraali on siten

$$u\sqrt{1+(u')^2} - u'u\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = c,$$

mikä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$u(1+(u')^2) - u(u')^2 = c\sqrt{1+(u')^2}.$$

Tämän yhtälön vasen puoli sievenee nätisti, jolloin saamme

$$u(x) = c\sqrt{1+u'(x)^2};$$

huomaa, että tästä seuraa $c > 0$ ja $u(x) \geq c > 0$ kaikille $x \in]0,1[$. Näin ollen

$$\left(\frac{u(x)}{c}\right)^2 = 1 + u'(x)^2.$$

Sijoituksella $\frac{u(x)}{c} = \cosh v(x)$, jolloin $u'(x) = c\sinh v(x)v'(x)$, saamme edellisen yhtälön muotoon

$$\cosh^2 v(x) = 1 + c^2\sinh^2 v(x)(v'(x))^2.$$

Koska $\cosh^2 t - \sinh^2 = 1$, niin päädymme lausekkeeseen

$$\sinh^2 v(x)(c^2 v'(x)^2 - 1) = 0,$$

joka toteutuu jos $v(x) \equiv 0$ (eli $u \equiv c$) tai jos $v'(x)^2 = \frac{1}{c^2}$. Jälkimmäinen vaihtoehto antaa

$$v(x) = \pm\frac{x - x_0}{c} \quad \text{jollakin } x_0 \in \mathbb{R},$$

mistä edelleen saamme

$$u(x) = c\cosh v(x) = c\cosh\frac{x - x_0}{c}.$$

Geometrisesti ratkaisu on ns. ketjukäyrä, ja parametri c pyritään ratkaisemaan annetuista reunaehdoista:

$$\begin{cases} u(0) = \alpha \iff c\cosh\frac{x_0}{c} = \alpha \\ u(1) = \beta \iff c\cosh\frac{1-x_0}{c} = \beta. \end{cases}$$

Jälleen on syytä kysyä onko nyt löydetty myös alkuperäisen minimointiongelman ratkaisu? Osoittautuu, että tilanne ei ole aivan yksinkertainen, sillä

- Kun α ja β on annettu, voi muotoa $u(x) = c\cosh\frac{x-x_0}{c}$ olevia käyriä, jotka toteuttavat ko. reunaehdot, olla 0,1 tai 2 kappaletta.

- Voidaan osoittaa, että "minimoija"on aina olemassa ja se on joko ketjukäyrä tai kahdesta pyörähdyskiekosta muodostuva ns. Goldschmidtin ratkaisu. Goldschmidtin ratkaisu ei kuitenkaan kuulu avaruuteen $W^{1,1}$, ja sen roolin ymmärtäminen vaatisikin funktionaalin I laajentamista rajoitetusti heilahtelevien funktioiden luokkaan.
- Minimointiongelman ratkaisu ei aina ole yksikäsitteinen.

b) Brachistochrone-ongelma, jossa tutkittava funktionaali on

$$I(u) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + u'(x)^2}{-u(x)}}\, dx,$$

missä $u \in W^{1,1}(]0,1[)$, $u(0) = 0 > -\beta = u(1)$ ja $u(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]0,1[$. Tässä tapauksessa siis $F(s,\xi) = \sqrt{\frac{1+\xi^2}{-s}}$, joten $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\xi^2}(-s)^{-3/2}$ ja $\frac{\partial F}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{1}{-s}}\frac{1}{2}(1+\xi^2)^{-1/2}2\xi$. Näin ollen Eulerin yhtälön vahva muoto on

$$\frac{(1+(u')^2)u'' - (u')^2}{\sqrt{-u}(1+(u')^2)^{3/2}} - \frac{(u')^2}{2(-u)^{3/2}\sqrt{1+(u')^2}} + \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{2(-u)^{3/2}} = 0.$$

Eulerin yhtälön ensimmäinen integraali puolestaan saa muodon

$$\sqrt{\frac{1+u'(x)^2}{-u(x)}} - u'(x)\frac{u'(x)}{\sqrt{-u(x)}\sqrt{1+u'(x)^2}} = c,$$

joka sievenee helposti yhtälöksi

$$u(x)(1 + u\,'(x)^2) = -\frac{1}{c^2} =: k.$$

Tämän differentiaaliyhtälön ratkaisu on kätevintä esittää muodossa

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{k}{2}(t - \sin t), \\ y(t) = \frac{k}{2}(1 - \cos t). \end{cases}$$

Parametri k ratkaistaan jälleen reunaehdon avulla: $x(t) = 1 \implies y(t) = -\beta$. Geometrisesti ratkaisu on sykloidi eli käytä, joka syntyy ympyrän kehällä olevan pisteen ratana ympyrän pyöriessä suoraa viivaa pitkin.

B. Funktio $F(x,s,\xi)$ ei riipu muuttujasta s

Tällöin Eulerin yhtälön vahva muoto on

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u'(x))\right) = 0,$$

minkä perusteella kuvaus $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial \xi}(x, u'(x))$ on identtisesti vakio.

Esimerkki 5.3.1. Olkoon

$$I(u) = \int_0^1 h(x)\sqrt{1 + (xu'(x))^2}\,dx,$$

missä h on annettu jatkuva funktio. Tällöin siis $F(x, s, \xi) = h(x)\sqrt{1 + (x\xi)^2}$ ei riipu muuttujasta s ja siten

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = h(x)\frac{x^2u'(x)}{\sqrt{1 + (xu'(x))^2}} \equiv c.$$

Tästä saadaan

$$h(x)^2x^4u'(x)^2 = c^2x^2u'(x)^2,$$

mistä voidaan ratkaista u':

$$u'(x) = \pm\sqrt{\frac{c^2}{h(x)^2x^4 - c^2x^2}} = \pm\frac{c}{x}\frac{1}{\sqrt{h(x)^2x^2 - c^2}}.$$

Tämän jälkeen funktio u saadaan integroimalla,

$$u(x) = \int^x u'(y)\,dy + c.$$

Harjoitustehtäviä

1. Johda funktionaalin

$$I(u) = \int_0^1 u(x)\sqrt{1 + u'(x)^2}\,dx, \quad u \in W^{1,1}(]0, 1[)$$

Eulerin yhtälön heikko esitysmuoto.

2. Osoita, että funktionaalin

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|Du(x)|^2 - h(x)u(x)\,dx, \qquad u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

missä $h \in L^2(\Omega)$, minimoija u_0 on ainoa funktio joukossa $W_0^{1,2}(\Omega)$, joka toteuttaa ehdon

$$\int_\Omega Du(x) \cdot D\psi(x)\,dx = \int_\Omega h(x)\psi(x)\,dx \qquad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

(Vihje: Näytä ensin, että yo. ehto pätee myös jos $\psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.)

3. Olkoon

$$I(u) = \int_{-1}^1 u(x)^2(2x - u'(x))^2\,dx, \qquad u \in W^{1,2}(]-1, 1[),$$

ja reunaehtoina $u(-1) = 0$, $u(1) = 1$. Osoita, että ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu $u_0 \in C^1(]0, 1[) \setminus C^2(]0, 1[)$.
(Vihje: Ratkaisu löytyy “valistuneella arvauksella”.)

4. Määritä edellisen tehtävän funktionaalin Eulerin yhtälö heikossa ja vahvassa muodossa.

5. Määritä funktionaalin

$$I(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du(x)|^2} - u(x)\,dx, \qquad u \in W^{1,1}(\Omega)$$

Eulerin yhtälö heikossa ja vahvassa muodossa.

6. Määritä funktionaalin

$$I(u) = \int_0^1 (1 - u'(x)^2)^2\,dx, \qquad u \in W_0^{1,4}(]0,1[)$$

Eulerin yhtälö heikossa muodossa ja etsi sellainen funktio $u \in W_0^{1,4}(]0,1[)$, joka toteuttaa ko. Eulerin yhtälön, mutta ei kuitenkaan minimoi funktionaalia I.

7. Laplace-operaattorin ominaisarvo-ongelma tapauksessa yhdessä ulottuvuudessa: Etsi kaikki parit (u, λ), jotka toteuttavat differentiaaliyhtälön

$$-u''(x) = \lambda u(x)$$

välillä $]0,1[$ ja joille $u(0) = u(1) = 0$.

8. Mikä edellisen tehtävän ominaisfunktioista $u \neq 0$ antaa pienimmän arvon osamäärälle

$$\frac{\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx}{\int_0^1 |u(x)|^2\,dx}\,?$$

(Vihje: Voit laskea suoraan tai käyttää ominaisfunktion ja sitä vastaavan ominaisarvon välistä yhteyttä.)

9. Olkoon

$$I(u) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + u'(x)^2}}{u(x)}\,dx, \quad u \in W_0^{1,1}(]0,1[),\ u(x) > 0 \text{ kaikilla } x \in]0,1[.$$

Määritä I:n Eulerin yhtälö heikossa ja vahvassa muodossa.

10. Määritä edellisen tehtävän Eulerin yhtälön ensimmäinen integraali ja etsi funktiot, jotka toteuttavat ko. ehdon annetuille reunaehdoille $u(0) = u(1) = 0$.
(Vihje: etsityn funktion kuvaaja on ympyrän kaari.)

11. Olkoon $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Keksi sellainen variaatio-ongelma (siis funktionaali $I(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)\,dx$ ja sopivat reunaehdot), jonka yksikäsitteinen ratkaisu annettu funktio v on.

Luku 6

Ratkaisujen säännöllisyydestä

Olkoon u_0 funktionaalin

$$I(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)\,dx$$

annetussa joukossa K minimoiva funktio. Jos $u_0 \in C^2$, niin tiedämme, että u_0 toteuttaa funktionaalia I vastaavan Eulerin yhtälön sekä heikossa että vahvassa muodossa. Toisaalta kurssilla on tullut jo vastaan useita esimerkkejä funktionaaleista, joiden minimoijat eivät ole C^2-funktioita. Nämä havainnot johtavat luonnolliseen kysymykseen: mitä tulee olettaa funktiosta F, jotta voisimme päätellä funktionaalin I minimoijan olevan C^2-funktio?

Minimointiongelmien ratkaisujen säännöllisyyden tutkiminen on yksi variaatiolaskennan haastavimmista osa-alueista ja sillä saralla on yhä edelleen runsaasti avoimia ongelmia. Tällä kurssilla keskitymme edellisen luvun tapaan lähinnä yksiulotteiseen tapaukseen; useampiulotteisen tapauksen kattava käsittely vaatisi nimittäin aivan oman kurssinsa.

6.1 Yksiulotteinen tapaus

Lause 6.1.1. *Olkoon $\Omega =]a, b[$ rajoitettu väli ja $F \in C^2([a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ siten, että*

(I) on olemassa $\alpha, \beta > 0$ ja $1 \le p < \infty$ siten, että

$$\alpha|\xi|^p \le F(x, s, \xi) \le \beta(1 + |\xi|^p) \quad \textit{kaikilla } (x, s, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

(II) on olemassa funktio $M :]0, \infty[\to]0, \infty[$ siten, että

$$\left|\frac{\partial F}{\partial s}(x, s, \xi)\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, s, \xi)\right| \le M(R)(1 + |\xi|^p)$$

kaikille $(x, s, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, joille $\sqrt{x^2 + s^2} \le R$.

(III) $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ on tasaisesti aidosti konveksi kaikilla (x, s), ts. on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \xi}(x, s, \xi) \ge \varepsilon > 0 \textit{ kaikilla } (x, s, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Olkoon $g \in W^{1,p}(\Omega)$ annettu ja $u \in W^{1,p}_g(\Omega)$ funktionaalin $I(v) = \int_\Omega F(x, v(x), v'(x))\,dx$ minimoija joukossa $W^{1,p}_g(\Omega)$. Tällöin $u \in C^2(\Omega)$ ja u toteuttaa Eulerin yhtälön vahvan muodon

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right) + \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad \textit{kaikilla } x \in]a, b[.$$

Huomautus 6.1.2. (i) Voidaan osoittaa, että jos $F \in C^k$, $2 \le k \le \infty$ ja (I)-(III) ovat voimassa, niin ratkaisu on yhtä säännöllinen eli $u \in C^k(\Omega)$.

(ii) jos $p > 1$, niin ehdon (III) sijaan riittäisi olettaa, että $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x, s, \xi) > 0$ kaikilla $(x, s, \xi) \in [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esimerkkejä. a) Olkoon $I(u) = \int\limits_0^1 \left(u'(x)^2 - 1\right)^2 dx$, $u \in W^{1,4}_0(]0, 1[)$. Tällöin esimerkiksi funktio

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in]0, \frac{1}{2}[, \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1[, \end{cases}$$

on minimoija (sillä $u'(x)^2 = 1$ m.k. x), mutta se ei ole edes jatkuvasti derivoituva määrittelyvälillään. Huomaa, että $F(x, s, \xi) = F(\xi) = \xi^4 - 2\xi^2 + 1$, joten $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 12\xi^2 - 4 < 0$ kun $|\xi|$ on riittävän pieni.

b) Olkoon $I(u) = \int\limits_{-1}^1 u(x)^2 \,(2x - u'(x))^2 \,dx$, $u \in W^{1,2}(] - 1, 1[)$ siten, että $u(-1) = 0$, $u(1) = 1$. Ongelmalla on ratkaisu

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in] - 1, 0[, \\ x^2, & x \in [0, 1[\end{cases}$$

ja $u \in C^1(\Omega) \setminus C^2(\Omega)$. Huomaa, että $F(x, s, \xi) = s^2(2x - \xi)^2$, joten $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = 2s^2 \ge 0$. Näin ollen ehto (III) on optimaalinen.

Absoluuttisesti jatkuvista funktioista

Lauseen 6.1.1 todistamisessa käytetään hyväksi absoluuttisesti jatkuvien funktioiden perusominaisuuksia, jotka seuraavassa palautetaan mieliin:

Funktio $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *absoluuttisesti jatkuva* välillä $[a, b]$, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että aina kun $]a_i, b_i[\subset [a, b]$, $i = 1, \ldots, m$ ovat pareittain pistevieraita välejä siten, että $\sum\limits_{i=1}^{m} |b_i - a_i| < \delta$, niin

$$\sum_{i=1}^{m} |h(b_i) - h(a_i)| < \varepsilon.$$

On helppo nähdä, että jokainen absoluuttisesti jatkuva funktio on jatkuva. Lisäksi jos h on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a,b]$, niin sen tavallinen derivaatta $h'(x)$ on olemassa m.k. $x \in]a,b[$, $h' \in L^1(]a,b[)$ ja

$$h(x) = h(a) + \int_a^x h'(t)\,dt \quad \text{kaikilla } x \in [a,b].$$

Kääntäen, jos $w \in L^1(]a,b[)$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$, niin funktio

$$h(x) := \alpha + \int_a^x w(t)\,dt, \quad x \in [a,b]$$

on absoluuttisesti jatkuva välillä $[a,b]$, $h(a) = \alpha$ ja $h'(x) = w(x)$ m.k. x.

Absoluuttisesti jatkuvilla funktioilla on myös läheinen yhteys yksiulotteisiin Sobolev-avaruuksiin:

- jos $u \in W^{1,p}(]a,b[)$, $1 \le p < \infty$, niin on olemassa $\tilde{u} :]a,b[\to \mathbb{R}$ siten, että
  a) $u(x) = \tilde{u}(x)$ m.k. x,
  b) $\tilde{u}$ on absoluuttisesti jatkuva jokaisella välillä $[c,d] \subset]a,b[$, ja
  c) u:n Sobolev derivaatta $Du(x)$ on sama kuin $\tilde{u}$:n pisteittäinen derivaatta $\tilde{u}'(x)$ m.k. x.
- Kääntäen, jos $u :]a,b[\to \mathbb{R}$ on absoluuttisesti jatkuva jokaisella välillä $[c,d] \subset]a,b[$ ja $u, u' \in L^p(]a,b[)$, niin $u \in W^{1,p}(]a,b[)$.

Lauseen 5.1 todistus. Koska $\Omega =]a,b[$ on rajoitettu ja u absoluuttisesti jatkuva, niin on helppo nähdä, että $u \in L^\infty(]a,b[)$. Siten on olemassa $R > 0$ siten, että $\sqrt{x^2 + u(x)^2} \le R$ kaikilla $x \in]a,b[$.

Oletuksen (II) nojalla

$$\int_a^b \left|\frac{\partial F}{\partial s}(x,v,v')\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial \xi}(x,v,v')\right| dx \le \int_a^b M(1 + |v'|^p)\,dx < +\infty$$

jos $v \in W^{1,p}(\Omega)$, joten Lauseen 5.1.3 nojalla u toteuttaa Eulerin yhtälön heikon muodon, ts.

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \xi}(x,u(x),u'(x))\psi'(x) + \frac{\partial F}{\partial s}(x,u(x),u'(x))\psi(x)\,dx = 0 \qquad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Osittaisintegrointi antaa

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial s}(x,u(x),u'(x))\psi(x)\,dx = -\int_a^b \left(\int_a^x \frac{\partial F}{\partial s}(t,u(t),u'(t))\,dt\right)\psi'(x)\,dx$$

joten

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x)) - \int_a^x \frac{\partial F}{\partial s}(t, u(t), u'(t))\, dt \right] \psi'(x)\, dx = 0 \quad \text{kaikilla } \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Lemman 5.2.2 nojalla on olemassa vakio $c \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x \frac{\partial F}{\partial s}(t, u(t), u'(t))\, dt \quad \text{m.k. } x \in]a, b[.$$

Koska $\left|\frac{\partial F}{\partial s}(t, u(t), u'(t))\right| \in L^1$, niin kuvaus

$$x \mapsto \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))$$

on absoluuttisesti jatkuva ja sen derivaatta

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x)) \right) = \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), u'(x)) \qquad \text{m.k. } x \in]a, b[.$$

Todistamme seuraavaksi, että $u \in C^1(]a, b[)$. Tätä varten merkitään

$$\theta :]a, b[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \; \theta(x, s, \xi) := (x, s, \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, s, \xi)).$$

Selvästi $\theta \in C^1$ ja

$$\det D\theta(x, s, \xi) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial s} & \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x, s, \xi) > 0.$$

Koska kuvaus $\xi \mapsto F(x, s, \xi)$ on aidosti konveksi, on $\xi \mapsto \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, s, \xi)$ aidosti kasvava. Näin ollen θ on injektio, ja siten käänteiskuvauslauseen nojalla diffeomorfismi kuvajoukolleen, ts. on olemassa jatkuvasti differentioituva käänteiskuvaus

$$\theta^{-1} : \theta( ]a, b[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to]a, b[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Koska $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x, s, \xi) \geq \varepsilon > 0$, on $\lim_{\xi \to \pm\infty} \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, s, \xi) = \pm\infty$. Näin ollen

$$\theta( ]a, b[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) =]a, b[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Olkoon nyt

$$h(x) := c + \int_a^x \frac{\partial F}{\partial s}(t, u(t), u'(t))\, dt.$$

Tällöin

$$\theta(x, u(x), u'(x)) = \left(x, u(x), \frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x)) \right) = (x, u(x), h(x)) \qquad \text{m.k. } x \in]a, b[,$$

joten

$$u'(x) = \theta_3^{-1}(x, u(x), h(x)) \quad \text{m.k. } x$$

ja

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt = u(a) + \int_a^x \theta_3^{-1}(t, u(t), h(t))\,dt.$$

Koska $\frac{\partial F}{\partial s}(x, u, u') \in L^1$, niin h on absoluuttisesti jatkuva. Erityisesti siis kuvaus $x \mapsto \theta_3^{-1}(x, u(x), h(x))$ on jatkuva ja näin ollen joten $u \in C^1(]a, b[)$.

Lopuksi osoitamme vielä, että $u \in C^2(]a, b[)$. Koska tiedetään jo, että $u \in C^1(]a, b[)$, on $x \mapsto \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), u'(x))$ jatkuva, ja siten funktio

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x)) = c + \int_a^x \frac{\partial F}{\partial s}(t, u(t), u'(t))\,dt$$

on jatkuvasti derivoituva. Olkoon nyt

$$G(y, \eta) = \frac{\partial F}{\partial \xi}(y, u(y), \eta) - h(y),$$

jolloin $G \in C^1(]a, b[\times\mathbb{R})$. Koska $\frac{\partial G}{\partial \eta}(x, \eta) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x, u(x), \eta) \neq 0$ ja $G(x, u'(x)) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin implisiittifunktiolauseen nojalla $u' \in C^1(]a, b[)$, ja

$$u''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \xi}(x, u(x), u'(x)) + \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \xi}(x, u(x), u'(x))u'(x) - \frac{\partial F}{\partial s}(x, u(x), u'(x))}{\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}(x, u(x), u'(x))},$$

mistä seuraa suoraan, että u toteuttaa Eulerin yhtälön sen vahvassa muodossa. □

6.2 Yleinen tapaus $n \geq 1$

Useampiulotteisessa tapauksessa minimointiongelman ratkaisun säännöllisyysominaisuuksien todistamisessa käytetään yleensä eri metodeja kuin edellä käsitellyssä yksiulotteisessa tapauksessa. Perusoletukset ovat kuitenkin lähes samat, ja niistä tärkein on funktion $F(x, s, \xi)$ aito konveksisuus muuttujan ξ suhteen.

Lause 6.2.1. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu ja $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ siten, että*

(I) on olemassa $\alpha, \beta > 0$ ja $1 < p < \infty$ siten, että

$$\alpha|\xi|^p \leq F(x, s, \xi) \leq \beta(1 + |\xi|^2)^{p/2}$$

(II) on olemassa vakiot $c_0, c_1 > 0$ siten, että

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x, s, \xi)\right| \leq c_0 \quad \textit{kaikilla } (x, s, \xi) \textit{ ja kaikilla } i, j = 1, \ldots, n$$

ja

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(x, s, \xi)\eta_i \eta_j = \left(D^2_{\xi\xi} F(x, s, \xi)\eta \right) \cdot \eta \geq c_1 (1 + |\xi|^2)^{p/2} |\eta|^2$$

(III) on olemassa rajoitettu, jatkuva, kasvava ja konveksi funktio $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *siten, että* $\omega(0) = 0$ *ja*

$$|F(x, s, \xi) - F(y, r, \xi)| \leq (1 + |\xi|^2)^{p/2} \omega(|x - y|^2 + |s - r|^2).$$

Tällöin jos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *minimoi funktionaalin*

$$I(u) = \int_{\Omega} F(x, u, Du)\, dx$$

joukossa $W^{1,p}_u(\Omega)$*, niin* $u \in C^2(\Omega)$*.*

Lauseen 6.2.1 todistus löytyy esimerkiksi viitteistä [9] ja [12].

Kirjallisuutta

[1] BUTTAZZO, G.; GIAQUINTA, M.; HILDEBRANDT, S., *One-dimensional variational problems. An introduction*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[2] COURANT, R.; HILBERT, D., *Methods of mathematical physics. Vol. I.*, Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

[3] DACOROGNA, B., *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[4] DACOROGNA, B., *Introduction to the Calculus of Variations*, Imperial College Press, 2004

[5] EVANS, L. C., *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998

[6] EVANS, L. C.; GANGBO, W., *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Amer. Math. Soc. 137 (1999), no. 653.

[7] EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F., *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[8] FRIEDMAN, A., *Foundations of modern analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[9] GIAQUINTA, M., *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[10] GIAQUINTA, M.; HILDEBRANDT, S., *Calculus of variations. I. The Lagrangian formalism*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[11] GIUSTI, E., *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[12] GIUSTI, E., *Direct methods in the calculus of variations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[13] HEWITT, E.; STROMBERG, K., *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975

[14] Kawohl, B., *Some nonconvex shape optimization problems*, Optimal shape design (Tróia, 1998), 7–46, Lecture Notes in Math., 1740, Springer, Berlin, 2000.

[15] Ziemer, W. P., *Weakly differentiable functions*, Springer-Verlag, New York, 1989