Fourier-analyysin peruskurssi 2014
24. tammikuuta 2015

Ohessa on laskuharjoitusten ratkaisuja. Luvussa 1 on jokaisesta tehtävästä tehtävänanto ja ratkaisu sekä mahdollisesti ”lisäys”-kohta, jossa on sanottu jotain ylimääräistä aiheeseen liittyvää. Luvussa 2 on joitakin lisäyksiä. Matlabilla voi tehdä visualisointeja. Laskuharjoitusten pitäjä on kiinnostunut kuulemaan vaihtoehtoisista ratkaisutavoista ja neuvoo mielellään vaikkapa Matlabin käytössä silloin kun ehtii.

1 Laskuharjoitusten ratkaisuja

Sisältö

1.1 Harjoitus 1

H1T1. Olkoon $\lambda > 0$, ja olkoon $f(x)$ jaksollinen funktio, jonka perusjakso on a. Osoita, että funktio $g(x) = f'(\lambda x)$ on jaksollinen ja määrää sen perusjakso.

Ratkaisu. Nyt siis

$$f(x+a) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

ja $a > 0$ on pienin positiivinen luku, jolla on tämä ominaisuus. Oletetaan, että f on derivoituva kaikkialla. Nyt derivoimalla yhtälöä (1) puolittain saadaan

$$f'(x+a) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siis funktiolle g pätee

$$g(x) = f'(\lambda x) = f'(\lambda x + a) = f'(\lambda(x + a/\lambda)) = g(x + a/\lambda), \quad x \in \mathbb{R},$$

eli g on a/λ-jaksollinen. Nyt $a/\lambda > 0$. Osoitetaan, että a/λ on funktion g perusjakso eli pienin positiivinen jakso. Jos luvulle $b > 0$ pätee

$$g(x+b) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

eli

$$f'(\lambda x + \lambda b) - f'(\lambda x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

niin saadaan

$$0 = \int_0^t f'(\lambda x + \lambda b) - f'(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}\left[f(\lambda t + \lambda b) - f(\lambda t)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

eli merkitsemällä $\lambda t = x$ saadaan

$$f(x + \lambda b) = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

joten koska $a > 0$ on funktion f perusjakso ja $\lambda b > 0$, niin täytyy olla $\lambda b \geq a$ eli $b \geq a/\lambda$. Nähdään, että mielivaltainen funktion g positiivinen jakso b on vähintään a/λ. Siis a/λ on funktion g perusjakso.

H1T2. Olkoon $g(x)$ parillinen funktio. Osoita, että

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = 2\int_0^{\alpha} g(x)dx.$$

Ratkaisu. Pätee siis

$$g(x) = g(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nyt

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = \int_{-\alpha}^{0} g(x)dx + \int_0^{\alpha} g(x)dx$$

eli riittää osoittaa

$$\int_{-\alpha}^{0} g(x)dx = \int_0^{\alpha} g(x)dx.$$

Tekemällä muuttujanvaihto $x = -s$ ja käyttämällä oletusta saadaan

$$\int_{-\alpha}^{0} g(x)dx = \int_{\alpha}^{0} g(-s)(-ds) = -\int_{\alpha}^{0} g(s)ds = \int_{0}^{\alpha} g(s)ds,$$

eli väite pätee.

H1T3. Olkoon $g(x)$ parillinen funktio. Osoita, että $g'(x)$ ja

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

ovat molemmat parittomia funktioita.

Ratkaisu. Pätee siis

$$g(x) = g(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Derivoimalla tätä puolittain, saadaan

$$g'(x) = g'(-x)(-x)' = -g'(-x), \quad x \in \mathbb{R},$$

eli g' on pariton funktio. Toisaalta tekemällä muuttujanvaihto $t = -s$ saadaan oletuksen nojalla

$$G(-x) = \int_0^{-x} g(t)dt = \int_0^x g(-s)(-ds) = -\int_0^x g(s)ds = -G(x)$$

eli G on pariton funktio.

Lisäys. Induktiolla nähdään, että $g^{(n)}$ ja

$$g^{(-n)}(x) = \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} g(t_n)dt_n \cdots dt_2 dt_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} g(t)dt$$

ovat parittomia, kun n on pariton ja parillisia, kun n on parillinen. Tässä $g^{(-n)}$ on funktion g astetta n oleva integraalifunktio, jonka laskemiseen käytetään Cauchyn kaavaa toistetulle integroinnille.

H1T4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio. Osoita, että

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

on parillinen, ja

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

on pariton funktio. Esitä tätä tietoa käyttäen funktiot $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ ja $q(x) = 1/(1-x)$ parillisen ja parittoman funktion summana.

Ratkaisu. Sieventämällä nähdään, että

$$F(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x))}{2} = F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ja

$$G(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{-f(x) + f(-x)}{2} = -G(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

Siis F on parillinen ja G on pariton. Huomataan myös, että

$$F(x)+G(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x).$$

Siis kirjoittamalla $f=F+G$ on funktio f saatu esitettyä parillisen ja parittoman funktion summana.

Nyt funktiolle $p(x)=x^3+2x^2+x$ pätee

$$F_p(x)=\frac{x^3+2x^2+x+(-x)^3+2(-x)^2+(-x)}{2}=\frac{4x^2}{2}=2x^2.$$

Funktio $G_p(x)$ voidaan laskea tehtäväpaperin kaavasta tai laskemalla

$$G_p(x)=p(x)-F_p(x)=x^3+2x^2+x-2x^2=x^3+x.$$

Siis

$$p(x)=F_p(x)+G_p(x)=2x^2+(x^3+x),$$

missä F_p on parillinen ja G_p on pariton.

Funktiolle q voidaan laskea

$$F_q(x)=\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{2}=\frac{\frac{1+x}{1-x^2}+\frac{1-x}{1-x^2}}{2}=\frac{1}{1-x^2}$$

ja

$$G_q(x)=\frac{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}{2}=\frac{\frac{1+x}{1-x^2}-\frac{1-x}{1-x^2}}{2}=\frac{x}{1-x^2}$$

eli

$$g(x)=F_q(x)+G_q(x)=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2},$$

missä F_p on parillinen ja G_p on pariton.

Lisäys. Nähdään, että f voidaan esittää parillisen ja parittoman funktion summana vain yhdellä tavalla. Nimittäin, jos g on sekä parillinen että pariton, niin

$$g(x)=g(-x)=-g(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

joten

$$g(x)=0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Siis jos funktio on sekä parillinen että pariton, niin se on identtisesti nolla. Lisäksi on selvää, että parillisten funktioiden lineaarikombinaatio on parillinen ja parittomien funktioiden lineaarikombinaatio on pariton. Oletetaan, että $f=F+G=H+I$, missä F ja H ovat parillisia ja G ja I ovat parittomia. Näin ollen $g=F-H=I-G$ on sekä parillinen että pariton ja siten identtisesti nolla. Siis $F=H$ ja $G=I$.

H1T5. Olkoon $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Osoita, että

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx=\delta_{mn},$$

missä δ_{mn} on Kroneckerin deltafunktio.

Ratkaisu. Koska kosini on parillinen, kaavalla

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

saadaan

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos([m-n]x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos([m+n]x)\,dx\end{aligned} \tag{2}$$

Toisaalta

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(kx)\,dx = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nimittäin

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(0\cdot x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = 1$$

ja

$$k\int_{0}^{\pi} \cos(kx)\,dx = [\sin(kx)]_{x=0}^{\pi} = \sin(k\pi) - \sin(0) = \sin(k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mikä antaa tulon nollasäännöllä

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(kx)\,dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Siis

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos([m-n]x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos([m+n]x)\,dx \\ &= \delta_{0,m-n} + 0 = \delta_{m,n}.\end{aligned} \tag{3}$$

H1T6. Oletetaan, että $f(x)$ on jaksollinen funktio jaksonaan 2π, joka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \tag{4}$$

missä a_n ja b_n ovat reaalisia vakioita. Määrää vakiot b_n kertomalla (4) puolittain funktiolla $\sin(mx)$ ja integroimalla termeittäin.

Ratkaisu. Siis

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

mikä antaa

$$f(x)\sin(mx) = \frac{1}{2}a_0\sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\sin(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)\sin(mx).$$

Nyt vaihtamalla integroinnin ja summauksen järjestystä saadaan sinin parittomuuden ja Lemman 4.1. nojalla

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx \\
&= \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\sin(mx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx)\sin(mx)\,dx \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot \pi d_{nm} = \pi b_m.
\end{aligned} \tag{5}$$

Siis

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\,dx, \quad m\in\mathbb{N}.$$

H1T7. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = x, \qquad \text{kun } x\in(-\pi,\pi].$$

Piirrä funktion f kuvaaja ja muodosta funktion f Fourier-sarja. Määrää lisäksi ne arvot, joita kohti Fourier-sarja suppenee funktion f epäjatkuvuuskohdissa.

Ratkaisu. Fourier-kertoimet on määritelty asettamalla

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}_0,$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

ja funktion f Fourier-sarja on

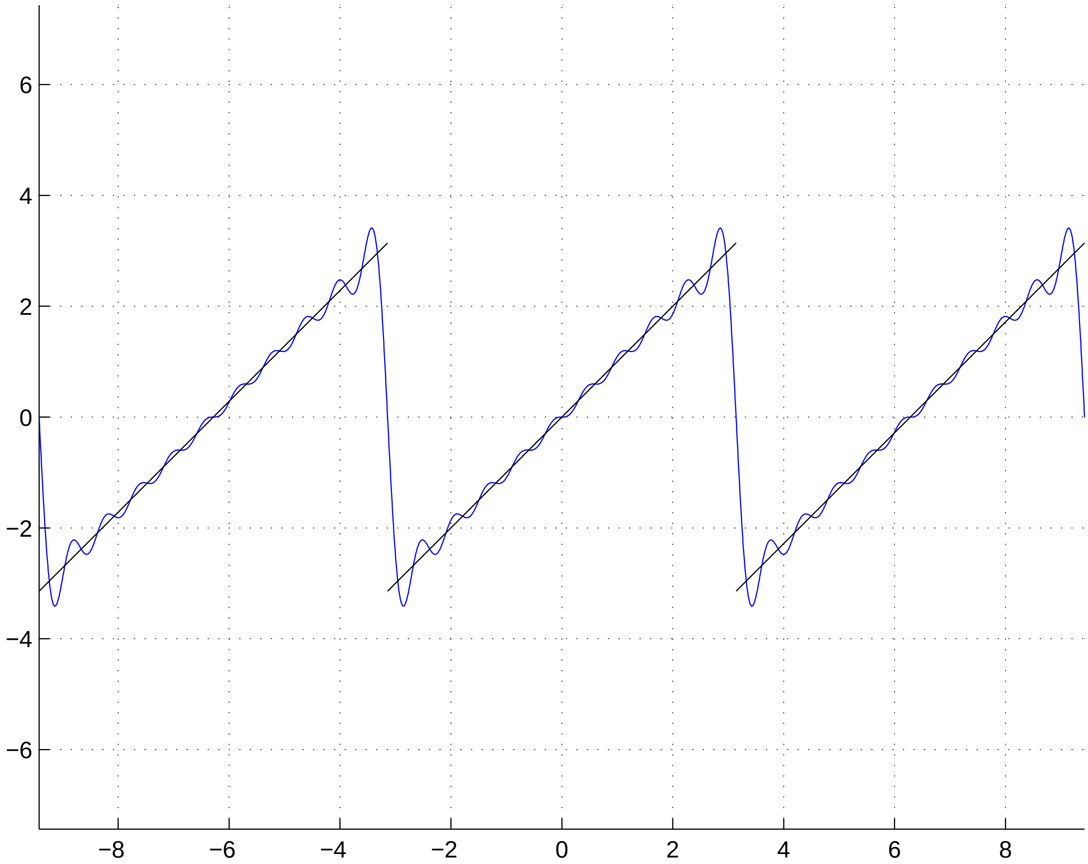
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Nyt koska $x\cos(nx)$ on pariton funktio kaikilla $n\in\mathbb{R}$, niin

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = 0, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Toisaalta koska $x\sin(nx)$ on parillinen funktio kaikilla $n\in\mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n} - 0\right] - 0 \\
&= 2\frac{(-1)(-1)^n}{n} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned} \tag{6}$$



Kuva 1: Funktion $f(x) = x$ Fourier-sarjan 10. osasumma.

Siis

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Nyt $f(x)$ toteuttaa Dirichlet'n ehdot: f on määritelty välillä $(-\pi, \pi)$, f on 2π-jaksollinen ja f sekä f' ovat paloittain jatkuvia välillä $(-\pi, \pi)$. Näin ollen

$$\frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funktio f on jatkuva muualla, paitsi pisteissä $n\pi$, missä n on kokonaisluku. Näissä pisteissä jaksollisuuden nojalla

$$\frac{1}{2}\left(f(n\pi_+) + f(n\pi_-)\right) = \frac{1}{2}\left(f(-\pi_+) + f(\pi_-)\right) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0$$

eli Fourier-sarjan summa on 0.

Funktion f Fourier-sarja on Kuvassa 1, joka on piirretty Matlabilla. Vastaavia kuvia voi piirtää muun muassa funktioilla, jotka löytyvät osoitteesta
`http://integraali.com/fourier2014/`.

Fourier-sarjan osasummia voi piirtää näppärästi myös WolframAlpha-sivustolla.
Esimerkki, jossa WolframAlphan komentoriville kirjoitettiin

```
2*sum n=1 to 10 (-1)^(n+1)*sin(nx)/n
```

1.2 Harjoitus 2

H2T1. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = x\sin(px), \qquad \text{kun } x \in (-\pi, \pi],$$

missä p on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että funktion f Fourier-kertoimille pätee $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

$$a_p = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p}, \qquad \text{ja} \qquad a_n = (-1)^{p+n+1}\frac{2p}{p^2 - n^2}, \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{p\}\,.$$

Ratkaisu. Funktion $f(x) = x\sin(7x)$ jaksollisen laajennuksen kuvaaja on Kuvassa 2. Fourier-kertoimet on määritelty asettamalla

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

ja funktion f Fourier-sarja on

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)).$$

Nyt, koska f on parillinen, niin $f(x)\sin(nx)$ on pariton ja siten $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Edelleen $f(x)\cos(nx)$ on parillinen, joten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(px)\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\sin((p-n)x) + \sin((p+n)x))\,dx, \end{aligned} \tag{7}$$

missä käytettiin kaavaa $2\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$. Nyt

$$\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx = 0, \quad k = 0,$$

ja arvoilla $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ saadaan

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx &= \left[\frac{-x\cos(kx)}{k}\right]_{x=0}^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(kx)}{k}dx \\ &= \frac{-\pi\cos(k\pi)}{k} + \left[\frac{\sin(kx)}{k^2}\right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + 0. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2px)dx = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p}$$

ja arvoilla $n \in \mathbb{N}\setminus\{p\}$ saadaan

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin((p-n)x) + x\sin((p+n)x)dx = \frac{(-1)^{p-n+1}}{p-n} + \frac{(-1)^{p+n+1}}{p+n}.$$

Nyt huomataan, että

$$p - n = (p+n) - 2n,$$

joten koska $(-1)^{-2n} = 1$, niin voidaan laskea

$$a_n = \frac{(-1)^{p+n-2n+1}}{p-n} + \frac{(-1)^{p+n+1}}{p+n} = (-1)^{p+n+1}\left[\frac{p+n}{p^2-n^2} + \frac{p-n}{p^2-n^2}\right] = (-1)^{p+n+1}\frac{2p}{p^2-n^2}.$$

Siis

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n\cos(nx),$$

missä

$$a_p = \frac{(-1)^{2p+1}}{2p} \quad \text{ja} \quad a_n = (-1)^{p+n+1}\frac{2p}{p^2-n^2}, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{p\}.$$

H2T2. Laske

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2-1} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=3}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2-4}$$

käyttäen hyväksi tehtävän 1 Fourier-sarjaa pisteessä $x = 0$ tai $x = \pi$, kun $p = 1$ tai $p = 2$.

Ratkaisu. Arvolla $p = 1$ saadaan

$$a_0 = (-1)^2\frac{2\cdot 1}{1^2-0^2} = 2, \quad a_1 = (-1)^3\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2},$$

ja

$$a_n = (-1)^{n+2}\frac{2}{1-n^2} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}, \quad n \geq 2.$$

Nyt funktio f toteuttaa Dirichlet'n ehdot eli f on 2π-jaksollinen ja f sekä f' ovat paloittain jatkuvia välillä $(-\pi,\pi]$. Lisäksi f on kaikkialla jatkuva. Näin ollen

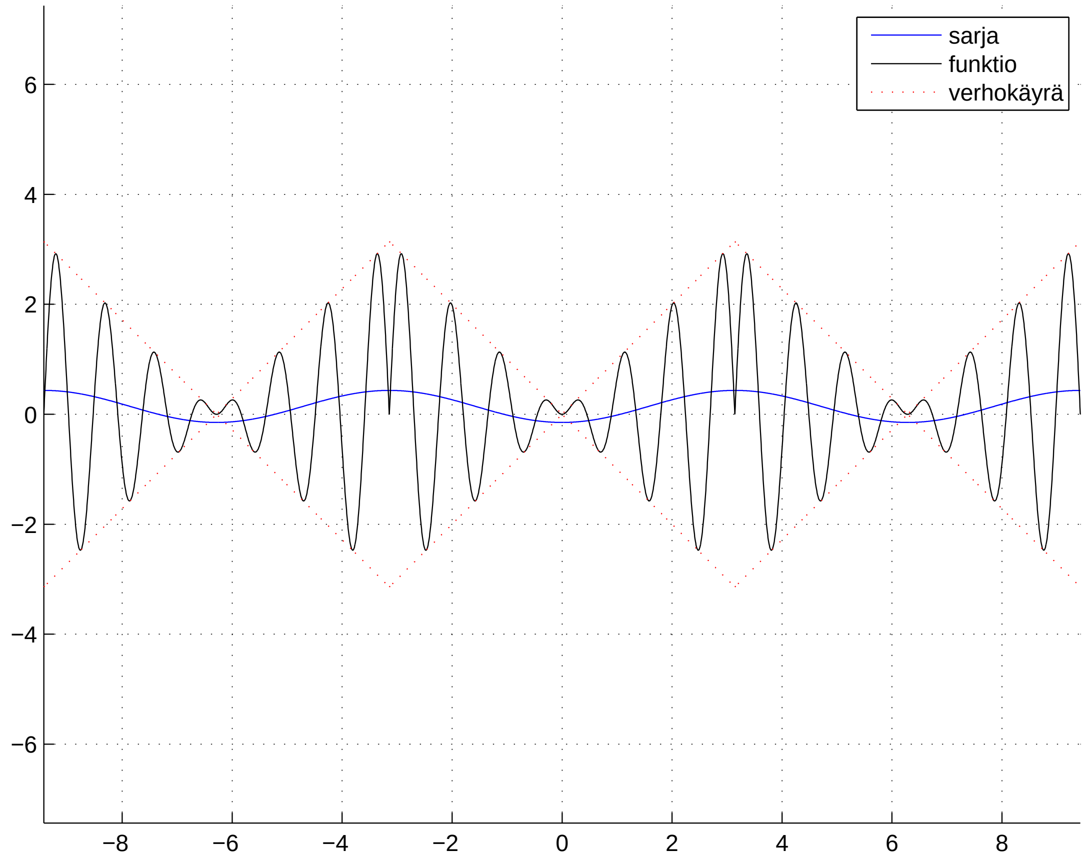
$$f(x) = x\sin x = \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right) = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = 0$ saadaan

$$f(0) = 0 = 1 - \frac{1}{2} + 2\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad \text{eli} \quad \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}.$$

Toisaalta valinta $x = \pi$ tuottaisi

$$0 = 1 + \frac{1}{2} + 2\sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}(-1)^n \quad \text{eli} \quad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$



Kuva 2: Funktion $f(x) = x\sin(7x)$ jaksollisen laajennuksen kuvaaja

Arvolla $p = 2$ saadaan

$$a_2 = \frac{(-1)^{2\cdot 2+1}}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}, \quad a_0 = (-1)^{2+0+1}\frac{2\cdot 2}{2^2 - 0^2} = -1$$

ja

$$a_1 = (-1)^{2+1+1}\frac{2\cdot 2}{2^2 - 1^2} = \frac{4}{3}$$

sekä

$$a_n = (-1)^{2+n+1}\frac{4}{4-n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2-4}, \quad n \geq 3.$$

Koska $f(x) = x\sin(2x)$ on jatkuva ja 2π-jaksollinen, sekä f' on paloittain jatkuva, niin

$$x\sin(2x) = \frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right) = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) + 4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-4}\cos(nx)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Valitsemalla $x = \pi$ saadaan

$$-\frac{1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + 4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4} = \pi\sin 2\pi = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4} = \frac{25}{48}.$$

Toisaalta valinta $x = 0$ antaisi

$$-\frac{1}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} + 4\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-4} = 0\sin 0 = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-4} = \frac{7}{12}.$$

H2T3. Muodosta funktion $f(x) = \sin x, \quad x \in [0,\pi]$, kosiniterminen Fourier-sarja etsimällä ensin sopiva funktion $f(x)$ parillinen laajennus. Sarjaksi tulee

$$f(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx).$$

Ratkaisu. Haetaan kosinitermistä Fourier-sarjaa, joten koska kosini on parillinen, niin tehdään funktiolle parillinen laajennus. Asetetaan siis parillisuuden saamiseksi

$$f(x) = f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = |\sin x|, \quad x \in (-\pi, 0).$$

Nähdään, että $f(x) = |\sin x|$ kaikilla $x \in (-\pi,\pi]$ ja nyt f voidaan laajentaa jaksolliseksi jatkuvaksi funktioksi.

Koska f on parillinen, $f(x)\sin(nx)$ on pariton ja $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Fourier-sarjaan ei siis tule sinitermejä. Toisaalta, koska $f(x)\cos(nx) = \sin x\cos(nx)$ on parillinen

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((1-n)x) + \sin((n+1)x)dx$$

kaavan

$$2\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y), \quad x, y \in R,$$

nojalla. Nyt

$$\int_0^{\pi}\sin(kx) = 0, \quad k = 0,$$

ja arvoilla $k \neq 0$ saadaan

$$\int_0^\pi \sin(kx) = \left(\frac{-\cos(kx)}{k}\right)_{x=0}^\pi = \frac{1-(-1)^k}{k} = \begin{cases} 0, & k = 2m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{2}{k}, & k = 2m-1, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Siis jos n on pariton, niin $1-n$ ja $n+1$ ovat parillisia ja $a_n = 0$. Olkoon $n = 2m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$. Nyt $1-n = 1-2m$ ja $n+1 = 2m+1$, joten

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin((1-n)x) + \sin((n+1)x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1-2m} + \frac{2}{2m+1}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4m+2}{4m^2-1} + \frac{4m-2}{4m^2-1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4m^2-1}. \end{aligned}$$

Erityisesti $a_0 = \frac{4}{\pi}$. Koska f toteuttaa Dirichlet'n ehdot ja on kaikkialla jatkuva, niin saadaan

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

H2T4. Osoita tehtävän 3 avulla, että

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu. Sijoittamalla tehtävän 3 sarjaan $x = 0$ saadaan huomaamalla, että $f(0) = 0$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1} = 0 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Toisaalta koska $\cos(2n\frac{\pi}{2}) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ ja $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, niin sijoittamalla $x = \frac{\pi}{2}$ saadaan

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = 1 \quad \text{eli} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Voidaan toki sijoittaa mikä tahansa muukin muuttujan x arvo, jolloin saadaan jonkun sarjan summa. Tietyillä muuttujan x arvoilla $\cos(2nx)$ ottaa yksinkertaisen muodon ja sarja näyttää yksinkertaiselta.

Huomaa, että jos funktio f ei olisikaan jatkuva pisteessä x, niin sarjan summaksi tulisi

$$\frac{1}{2}\left(f(x_-) + f(x_+)\right) \neq f(x).$$

Tässä on mahdollinen virheen paikka!

H2T5. Osoita, että funktiojoukko

$$\{1, \cos(2x), \cos(4x), \cos(6x), \ldots\}$$

on ortogonaalinen välillä $[0, \pi]$ ja muodosta sitä vastaava ortonormaali joukko.

Ratkaisu. Nyt ollaan välillä $[0, \pi]$ ja on siis sisätulo

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$

Olkoon $f_k(x) = \cos(2kx)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Nyt kosinin parillisuuden nojalla

$$\langle f_k, f_j\rangle = \int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2jx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2kx)\cos(2jx)dx = \frac{\pi}{2}\delta_{k,j}$$

kaikilla $k, j \in \mathbb{N}_0$ paitsi arvolla $k = j = 0$, sillä

$$\|f_0\|^2 = \langle f_0, f_0\rangle = \int_0^\pi \cos(0)\cos(0)dx = \pi\text{eli} \quad \|f_0\| = \sqrt{\pi}.$$

Näin ollen $\{1, \cos(2x), \cos(4x), \cos(6x), \ldots\}$ on ortogonaalinen. Lisäksi

$$\|f_k\|^2 = \langle f_k, f_k\rangle = \frac{\pi}{2} \quad \text{eli} \quad \|f_k\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Siis vastaava ortonormaali joukko on

$$\left\{\frac{f_k}{\|f_k\|}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2x), \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(4x), \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(6x), \ldots\right\}.$$

H2T6. Laske funktion $f(x) = \cos x$ yleistetyt Fourier-kertoimet tehtävän 5 ortonormaalin joukon suhteen.

Ratkaisu. Nyt väli ja sisätulo ovat samat kuin tehtävässä 5 ja $f(x) = \cos x$. Funktiot $e_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ sekä $e_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2kx)$, $k \in \mathbb{N}$, ovat ortonormaaleja, joten jos haetaan Fourier-kertoimia c_k, joille pätisi

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k,$$

niin saadaan yleistettyjen Fourier-kertoimien kaava

$$\langle f, e_n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \langle e_k, e_n\rangle = c_n, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Nyt kosinin parillisuuden nojalla

$$c_n = \langle f, e_n\rangle = \int_0^\pi d_n \cos x\cos(2nx)dx = d_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\cos(2nx)dx = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

missä $d_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ja $d_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen kaikki yleistetyt Fourier-kertoimet ovat nollia.

Nyt funktiota f yritettiin esittää funktioiden e_k summana, mutta nähtiin, että tällaista esitystä ei voi tehdä. Nähtiin, että vakiot c_n ovat nollia, eli funktio f sattuu jopa olemaan ortogonaalinen jokaisen funktion e_k suhteen.

Analoginen tilanne olisi kokeilla esittää $(1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ vektorien $(0,1,0),(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ avulla. Esitystä

$$(1,0,0) = a(0,1,0) + b(0,0,1),$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$, ei löydy. Vektori $(1,0,0)$ sattuu jopa olemaan kohtisuorassa vektoreita $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$ vastaan. Esitys ei onnistu, koska $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ ei ole avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Vastaavasti esitys $f = \sum c_k e_k$ ei onnistu, koska $\{e_k\}$ ei ole kanta tämänhetkisen tilanteen funktioavaruudelle, joka sisältää funktion f.

H2T7. Määritä vakiot $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ siten, että polynomit

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \alpha_0 \\ g_2(x) &= \beta_1 x + \beta_0 \\ g_3(x) &= \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 \end{aligned}$$

muodostavat ortonormaalin joukon välillä $[-1,1]$.

Ratkaisu. Nyt ollaan välillä $[-1,1]$, joten sisätulona on

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx, \quad f, g \in \mathcal{C}_p(-1,1),$$

ja normi on $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$, kaikilla $f \in \mathcal{C}_p(-1,1)$.

Tapa 1. Lasketaan luvut $\langle g_k, g_j\rangle\,, \quad k, j \in \{1,2,3\}$, ja vaaditaan, että $\langle g_k, g_j\rangle = \delta_{kj}$. Saadaan kuuden yhtälön yhtälöryhmä ja voidaan ratkaista kuusi vakiota $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ yksikäsitteisesti.

Tapa 2. Otetaan funktiojoukko $\{1, x, x^2\}$ ja käytetään Gram-Schmidtin ortonormalisointimenetelmää. Gram-Schmidtin menetelmässä lineaarisesti riippumattomalle funktiojoukolle $\{f_n\}$ tehdään seuraavaa.

Koska funktiot ovat lineaarisesti riippumattomia, mikään funktio ei ole identtisesti nolla. Asetetaan

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|},$$

jolloin $\{e_1\}$ on ortonormaali.

Oletetaan, että on saatu määriteltyä ortonormaali funktiojoukko $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Nyt asetetaan

$$w_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle f_{n+1}, e_k\rangle\, e_k,$$

jolloin

$$\langle w_{n+1}, e_m\rangle = \langle f_{n+1}, e_m\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle f_{n+1}, e_k\rangle \langle e_k, e_m\rangle = \langle f_{n+1}, e_m\rangle - \langle f_{n+1}, e_m\rangle = 0,$$

eli löydetään uusi ortogonaalinen funktio w_{n+1}. Lineaarisen riippumattomuuden nojalla $w_{n+1} \not\equiv 0$, joten voidaan asettaa

$$e_{n+1} = \frac{w_n}{\|w_n\|},$$

jolloin $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ on ortonormaali joukko.

Jos joukon $\{f_n\}$ lineaarista riippumattomuutta ei vaadita, niin ortonormalisoinnin joka vaiheessa syntyvän joukon $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ lineaarinen riippumattomuus varmistettaisiin poistamalla turhat funktiot f_j.

Tehdään nyt Gram-Schmidtin ortogonalisointi funktioille

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 1 \\ f_2(x) &= x \\ f_3(x) &= x^2. \end{aligned}$$

Koska

$$\|f_1\|^2 = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2,$$

niin $\|f_1\| = \sqrt{2}$, ja

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nyt

$$\langle f_2, e_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2}}\,dx = 0,$$

joten

$$w_2 = f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1 = f_2.$$

Koska

$$\|w_2\|^2 = \|f_2\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

niin $\|w_2\| = \sqrt{2/3}$, ja

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

Nyt

$$\langle f_3, e_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = 2\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ja

$$\langle f_3, e_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} x dx = 0,$$

joten

$$w_3 = f_3 - \langle f_3, e_1 \rangle e_1 - \langle f_3, e_2 \rangle e_2 = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Koska

$$\|w_2\|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2\,dx = 2\int_0^1 x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\,dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45},$$

niin $\|w_3\| = \sqrt{8/45}$, ja

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \sqrt{45/8}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{45}{8}}x^2 - \sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Valitaan

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \beta_0 = 0 = \gamma_1, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \gamma_0 = -\sqrt{\frac{5}{8}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{45}{8}}.$$

1.3 Harjoitus 3

H3T1. Funktion $f(x) = \sin x$ kosiniterminen Fourier-sarja välillä $[0, \pi]$ on

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)+1}{1-n^2}\cos(nx).$$

Soveltamalla tätä tietoa yhdessä Parsevalin kaavan kanssa osoita, että

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Ratkaisu. Parsevalin kaava löytyy luennoista, mutta laskuharjoitusten pitäjä johtaa sen itselleen tässä. Jos

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,$$

missä $\{e_n\}$ on ortonormaali kanta, niin sisätulon ominaisuuksilla saadaan

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_n \overline{c_k}\,\langle e_n, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\overline{c_n} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Nyt sisätulona on

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

ja ortonormaali kanta on

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \cup \{\cos(nx)\} \cup \{\sin(nx)\}$$

siis $c_0^2 = \frac{a_0^2}{2}$ ja asettamalla vaikkapa $c_{2n-1}^2 = a_n^2$ ja $c_{2n}^2 = b_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, saadaan luentojen kaava

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}(a_n^2 + b_n^2).$$

Koska f on pisteiden $n\pi$ ulkopuolella kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolla on jaksona 2π, niin funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f Lauseen 4.7. nojalla ja Lauseen 8.3. nojalla tämä kaava pätee.

Nyt $a_0/2 = 2/\pi$ eli $a_0 = 4/\pi$ ja $a_0^2/2 = 8/\pi^2$. Toisaalta $b_n = a_{2n-1} = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja

$$a_{2n} = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n\pi)+1}{1-(2n)^2} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

joten

$$a_{2n}^2 = \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

Toisaalta

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos(2x))dx = 1.$$

Saadaan

$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$$

eli

$$\frac{\pi^2 - 8}{16} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots .$$

H3T2. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{kun } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Etsi muotoa

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$$

oleva trigonometrinen polynomi siten, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 dx$$

on mahdollisimman pieni.

Ratkaisu. Luentojen nojalla kyseessä on funktion f Fourier-sarjan N:s osasumma. Funktion f Fourier-sarjaa voidaan siis pyytää esitettäväksi tällaisellakin tehtävänannolla. Koska f on pariton, niin

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ja

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} \left[-\cos(nx) \right]_{x=0}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1}), \end{aligned} \tag{8}$$

joten

$$b_{2n} = 0 \quad \text{ja} \quad b_{2n-1} = \frac{4}{\pi(2n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Siis

$$f(x) \frac{4}{\pi} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x$$

ja etsitty polynomi on

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(1 + (-1)^{n+1})}{n\pi} \sin(nx).$$

H3T3. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että $f(x) = e^{2x}$, kun $-\pi < x \le \pi$. Muodosta funktion f kompleksiterminen Fourier-sarja.

Ratkaisu. Halutaan kirjoittaa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Valitaan $L = \pi$, jolloin

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

missä

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyt

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(2-in)x}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(2-in)x}}{2-in}\right]_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{e^{2\pi}\left(e^{-i\pi}\right)^n - e^{-2\pi}\left(e^{i\pi}\right)^n}{2\pi(2-in)} \\ &= \frac{(-1)^n(e^{2\pi}-e^{-2\pi})}{2\pi(2-in)} = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n}{2-in}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{9}$$

H3T4. Osoita, että

$$2\sum_{n=1}^{m}\cos\left[(2n-1)\,\theta\right] = \frac{\sin(2m\theta)}{\sin\theta},$$

kun $\theta \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

Ratkaisu. **Tapa 1.** Noudatetaan tehtäväpaperin vihjettä ja lasketaan samantapaisesti kuin Tavassa 2.

Tapa 2. Eulerin kaavan mukaan

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Siis

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{m}\cos\left[(2n-1)\,x\right] + i\sum_{n=1}^{m}\sin\left[(2n-1)\,x\right] \\ &= \sum_{n=1}^{m} e^{i(2n-1)x} = e^{-ix}\sum_{n=1}^{m}\left(e^{i2x}\right)^n \\ &= e^{-ix}\frac{e^{i2x}(1-e^{i2xm})}{1-e^{i2x}}\cdot\frac{1-e^{-i2x}}{1-e^{-i2x}} \\ &= \frac{e^{ix}(1-e^{-i2x})(1-e^{i2xm})}{(1-e^{i2x})(1-e^{-i2x})}. \end{aligned} \tag{10}$$

Nyt

$$e^{ix}(1-e^{-i2x}) = e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x$$

ja

$$(1-e^{i2x})(1-e^{-i2x}) = 2-(e^{i2x+e^{-i2x}}) = 2(1-\cos(2x)) = 4\sin^2(x),$$

joten

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{m}\cos\left[(2n-1)\,x\right] + i\sum_{n=1}^{m}\sin\left[(2n-1)\,x\right] \\
&= \frac{2i\sin x}{4\sin^2 x}(1-\cos 2xm - i\sin 2xm) \\
&= \frac{\sin(2xm)}{2\sin x} + i\frac{1-\cos(2xm)}{2\sin x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Vasemman ja oikean puolen reaaliosat ovat yhtäsuuret, joten saadaan

$$\sum_{n=1}^{m}\cos\left[(2n-1)\,x\right] = \frac{\sin(2xm)}{2\sin x} \tag{12}$$

ja imaginaariosista saadaan

$$\sum_{n=1}^{m}\sin\left[(2n-1)\,x\right] = \frac{1-\cos(2xm)}{2\sin x} = \frac{\sin^2 mx}{\sin x} \tag{13}$$

kun $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Etuna Tapaan 1. oli nyt se, että saatiin kaava sekä kosinin että sinin summille, joissa argumenttia x kerrotaan parittomilla luvuilla.

H3T5. Osoita, että Dirichlet-ytimille pätee yhtälö

$$2\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2,$$

kun $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$.

Ratkaisu. Luennoissa määriteltiin

$$D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Siis

$$D_k(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{k}\cos(nx), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Eulerin kaavan nojalla

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m}\cos(nx) + i\sum_{n=0}^{m}\sin(nx) = \sum_{n=0}^{m}(e^{ix})^n \\
&= \frac{1-(e^{ix})^{m+1}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1/2)x}-e^{-ix/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}} \\
&= \frac{\cos(m+1/2)x - \cos(x/2) + i\left[\sin(m+1/2)x\right] + \sin(x/2)}{2i\sin(x/2)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin(m+1/2)x}{2\sin(x/2)} - \frac{i}{2}\frac{\cos(m+1/2)x - \cos(x/2)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Vasemman ja oikean puolen reaaliosat ovat yhtäsuuret, joten saadaan

$$2\sum_{n=1}^{m}\cos(nx) = -1 + \frac{\sin(m+1/2)x}{\sin(x/2)} \tag{15}$$

ja imaginaariosista saadaan

$$2\sum_{n=0}^{m}\sin(nx) = \frac{\cos(x/2) - \cos(m+1/2)x}{\sin(x/2)}, \tag{16}$$

kun $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Yhtälö (15) on luennoissa mainittu Lagrangen trigonometrinen yhtälö. Siis

$$D_k(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k}\cos(nx) = \frac{\sin(m+1/2)x}{2\sin(x/2)}$$

eli

$$D_k(2t) = \frac{\sin(2k+1)t}{2\sin(t)}$$

ja siten

$$2\sum_{k=0}^{N-1} D_k(2t) = \frac{1}{\sin t}\sum_{k=0}^{N-1}\sin(2k+1)t = \frac{1}{\sin t}\sum_{k=1}^{N}\sin(2k-1)t = \frac{\sin^2(Nt)}{\sin^2(t)},$$

missä käytettiin tehtävän H3T3 kaavaa (13). Sijoitetaan $t = x/2$, jolloin saadaan

$$2\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2,$$

kuten haluttiin.

H3T6. Olkoot $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että $f, g, h \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että

$$f * (g+h) = f * g + f * h.$$

Ratkaisu. Konvoluution ja summafunktion määritelmien sekä integraalin ominaisuuksien nojalla kaikilla $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(f * (g+h))(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g+h)(x-y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g(x-y) + h(x-y))dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)h(x-y)dy \\
&= (f * g)(x) + (f * h)(x).
\end{aligned} \tag{17}$$

Siis $f * (g+h) = f * g + f * h$.

1.4 Harjoitus 4

H4T1.

Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että konvoluution $f * g$ kompleksikertoimisille Fourier-kertoimille c_n pätee

$$c_n = a_n b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

missä kertoimet a_n ovat funktion f, ja b_n funktion g, kompleksikertoimiset Fourier-kertoimet.

Vihje: Voit vaihtaa kertoimien c_n lausekkeessa integroimisjärjestystä Fubinin lauseen avulla.

Ratkaisu. Funktioiden f ja g konvoluutio on määritelty kaavalla

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-inx} dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) e^{-inx} dy dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) e^{-inx} dx dy, \end{aligned} \tag{18}$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Fubinin lauseesta. Nyt voidaan tehdä muuttujanvaihto $x - y = t$ ja huomata, että funktioiden f, g ja e^{-inx} 2π-jaksollisuuden nojalla integroimisvälit eivät muutu, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} c_n &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(t) e^{-in(t+y)} dt dy \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dx \right) = a_n b_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{19}$$

H4T2.

Olkoon $f(x) = x$ ja $g(x) = \sin x$. Laske konvoluutio $(f * g)(x)$.

Ratkaisu. Käytetään konvoluution määritelmää ja sinin summakaavaa sekä huomataan, että $y \cos y$ on pariton ja $y \sin y$ on parillinen funktio, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \sin(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y \left[\sin(x) \cos(-y) + \cos(x) \sin(-y) \right] dy \\ &= \frac{-\cos(x)}{\pi} \int_{0}^{\pi} y \sin(y) dy. \end{aligned} \tag{20}$$

Nyt
$$\int_0^\pi y\sin(y)dy = [-y\cos(y)]_{y=0}^\pi - \int_0^\pi -\cos(y)dy = -\pi\cos(\pi) = \pi,$$
joten nähdään, että $(f * g)(x) = -\cos(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

H4T3.

Olkoon $s_n = (-1)^n(2n+1)$, missä $n \in \mathbb{N}_0$. Osoita, että
$$t_N = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^N s_j$$
ei suppene kohti raja-arvoa, mutta
$$\frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^N t_j$$
suppenee. Toisin sanoen, Cesàron menettelytavan soveltaminen kerran ei tuota suppenevaa jonoa, mutta toinen sovelluskerta kyllä.

Ratkaisu. Määritellään Cesàron operaattori. Jos $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ on jono, niin asetetaan
$$\mathrm{Ces}\,(a)_N = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^N a_j, \quad N \in \mathbb{N}_0.$$
Tavanomaiseen tapaan merkataan funktioiden iteraatteja potensseilla: jos $f : X \to X$ on funktio, niin asetetaan $f^0 = \mathrm{Id}$ ja $f^n = f(f^{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Siis esimerkiksi $f^3(x) = f(f(f(x)))$. Siis jono, joka saadaan, kun jonoon s sovelletaan Cesàron menettelytapaa kerran, on jono $\mathrm{Ces}\,(s)$. Toisaalta jono, joka saadaan, kun jonoon s sovelletaan Cesàron menettelytapaa kahdesti, on jono $\mathrm{Ces}^{\,2}(s)$.

Huomataan, että funktiolla Ces on käänteisfunktio. Jos
$$b = \mathrm{Ces}\,(a)$$
niin
$$b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n a_j \quad \text{eli} \quad \sum_{j=0}^n a_j = (n+1)b_n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$
Siis $a_0 = b_0$ ja
$$a_n = \sum_{j=0}^n a_j - \sum_{j=0}^{n-1} a_j = (n+1)b_n - nb_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Siis
$$\mathrm{Ces}^{\,-1}(b)_n = (n+1)b_n - nb_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$
missä $b_{-1} := 0$. Nyt tehtävänannon jonolle saadaan , että
$$\mathrm{Ces}\,(s)_n = (-1)^n$$
eli $\mathrm{Ces}\,(s)_n$ ei suppene, mutta
$$\mathrm{Ces}^{\,2}(s)_n = \frac{1+(-1)^n}{2}\frac{1}{n+1} \to 0,$$

Taulukko 1: Tehtävän H4T3 jonon (s_n) Cesáro-kuvia. Viidennellä rivillä on esimerkkilaskuja.

n	$1/(n+1)$	s_n	$(n+1)\,\text{Ces}\,(s)_n$	$\text{Ces}\,(s)_n$	$(n+1)\,\text{Ces}\,^2(s)_n$	$\text{Ces}\,^2(s)_n$
0	1	**1**	1	1	1	1
1	1/2	**-3**	-2	-1	0	0
2	1/3	**5**	3	1	1	1/3
3	1/4	**-7**	-4	-1	0	0
4	1/5	**9**	**5**=**1-3+5-7+9**	1=**5**·(1/5)	1=1-1+1-1+1	1/5=1·(1/5)
5	1/6	-11	-6	-1	0	0
6	1/7	13	7	1	1	1/7
7	1/8	-15	-8	-1	0	0
8	1/9	17	9	1	1	1/9
9	1/10	-19	-10	-1	0	0
10	1/11	21	11	1	1	1/11
11	1/12	-23	-12	-1	0	0
12	1/13	25	13	1	1	1/13
13	1/14	-27	-14	-1	0	0
14	1/15	29	15	1	1	1/15
15	1/16	-31	-16	-1	0	0

kun $n \to \infty$.

Sivuston `http://integraali.com/fourier2014/cesaro/` Matlab-funktiolla 'cesaro.m' voi käyttää Cesàron menetelmää erilaisiin lukujonoihin. Taulukon 1 LaTeX-koodi saatiin Matlabista funktiolla 'latextaulukkor.m'.

H4T4.

Anna esimerkki jonosta, jossa Cesàron menettelytavan soveltaminen kaksi kertaa ei tuota suppenevaa jonoa, mutta kolmas sovelluskerta tuottaa.

Ratkaisu. Tehtävässä 3 jonolle Cesàron menettelytapaa piti käyttää kahdesti, että jono saatiin suppenemaan. Käyttämällä käänteistä Cesàron menettelytapaa tehtävän 3 jonoon saadaan siis haluttu jono. Siis olkoon $s = (s_n)$ kuten tehtävässä 3 ja valitaan $a = \text{Ces}\,^{-1}(s)$. Jonon a lukuja on laskettu Matlabilla Taulukkoon 2.

H4T5.

Osoita, että jos $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, niin

$$\frac{1}{\tan(x/2)} = 2\sum_{j=1}^{\infty} \sin(jx) \quad \text{Cesàron mielessä.}$$

Taulukko 2: Tehtävän H4T3 jonon (s_n) Cesáro-alkukuva ja sen Cesáro-alkukuva. Viidennellä rivillä on esimerkkilaskuja. Tässä siis esimerkiksi $a_n = \text{Ces}^{-1}(s)_n = (n+1)s_n - ns_{n-1}$, missä $s_{-1} := 0$.

n	$1/(n+1)$	s_n	$(n+1)s_n$	$a_n = \text{Ces}^{-1}(s)_n$	$(n+1)a_n$	$\text{Ces}^{-2}(s)_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	1/2	-3	-6	-7	-14	-15
2	1/3	5	15	21	63	77
3	1/4	-7	-28=4·(-7)	-43	-172	-235
4	1/5	9	45=5·9	73=45-(-28)	365	537
5	1/6	-11	-66	-111	-666	-1031
6	1/7	13	91	157	1099	1765
7	1/8	-15	-120	-211	-1688	-2787
8	1/9	17	153	273	2457	4145
9	1/10	-19	-190	-343	-3430	-5887

Ratkaisu. Yhtälön (16) nojalla

$$2\sum_{j=0}^{m} \sin(jx) = \frac{\cos(x/2) - \cos((m+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)} = \frac{1}{\tan(x/2)} - \frac{\cos((m+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)},$$

joten

$$S_m(x) = 2\sum_{j=0}^{m} \sin(jx) - \frac{1}{\tan(x/2)} = -\frac{\cos((m+\frac{1}{2})x)}{\sin(x/2)}.$$

Yhtälön (12) nojalla saadaan arvoilla $2t = x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(x) &= \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k(2t) \\
&= \frac{-1}{\sin t}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} \cos(2k+1)t \\
&= \frac{-1}{\sin t}\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N+1} \cos(2k-1)t \\
&= \frac{-1}{\sin t}\frac{1}{N+1}\frac{\sin(2x(N+1))}{2\sin t} \to 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

kun $N \to \infty$. Siis Cesàron mielessä

$$\lim_{n\to\infty} 2\sum_{j=0}^{n} \sin(jx) - \frac{1}{\tan(x/2)} = 0.$$

H4T6.

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva ja jaksollinen funktio, jaksonaan 2π. Jos funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$, eli raja-arvo

$$a = \lim_{N\to\infty} S_N(x_0)$$

on olemassa, niin näytä, että tällöin välttämättä $a = f(x_0)$.

Ratkaisu. Oletuksista seuraa, että $f \in L^\infty[-\pi, \pi]$. Näin ollen Fourier-sarja Cesàro-suppenee pisteessä x_0 funktion arvoon:

$$\sigma_N(x_0) \to f(x_0), \quad N \to \infty.$$

Oletuksen nojalla Fourier-sarja suppenee myös tavallisessa mielessä pisteessä x_0:

$$S_N(x_0) \to a, \quad N \to \infty.$$

Kun tavallinen raja-arvo on olemassa, niin Cesàro-raja-arvo yhtyy tähän, eli

$$\sigma_N(x_0) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} S_j \to a, \quad N \to \infty.$$

Näin ollen raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $a = f(x_0)$.

1.5 Harjoitus 5

H5T1. Jatkuvan, mutta ei missään derivoituvan funktion olemassaolo on ääriesimerkki siitä, että funktion toistuva derivointi voi johtaa hyvin poikkeukselliseen (ja huonoon) funktiokäyttäytymiseen. Olkoon $\varepsilon > 0$, $K > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ mielivaltaisesti valittuja vakioita. Määrää vakiot A, M ja θ siten, että funktiolle

$$f(x) = A\sin(Mx + \theta)$$

pätee $|f^{(k)}(x)| \leq \varepsilon$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $0 \leq k < n$, mutta $|f^{(n)}(0)| \geq K$.

Ratkaisu. Sinin summakaavan nojalla

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \pi/2\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

mistä saadaan ketjusäännöllä

$$\frac{d}{dx}\cos(x) = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \pi/2\right) = \cos\left(x + \pi/2\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Siis jos derivoidaan siniä tai kosiniä, niin argumentti kasvaa luvulla $\pi/2$. Induktiolla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dx^k}\sin(x) &= \sin(x + k\pi/2), \\ \frac{d^k}{dx^k}\cos(x) &= \cos(x + k\pi/2), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{22}$$

Nyt siis

$$f^{(k)}(x) = AM^k \sin(Mx + \theta + k\pi/2), \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0,$$

eli

$$f^{(n)}(0) = AM^n \sin(\theta + n\pi/2)$$

ja asettamalla $\theta = -(n-1)\pi/2$ saadaan

$$f^{(n)}(0) = AM^n \sin(\pi/2) = AM^n.$$

Oletetaan, että $A, M \geq 0$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq AM^k, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0 \\ |f^{(n)}(0)| &= AM^n. \end{aligned} \tag{23}$$

Oletetaan aluksi, että $K \leq \varepsilon$. Nyt voidaan valita $M = 1$ ja $A = K$, jolloin

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &\leq AM^k = K \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0 \\ |f^{(n)}(0)| &= AM^n = K. \end{aligned} \tag{24}$$

Oletetaan nyt, että $K > \varepsilon$. Pitäisi saada

$$
\begin{aligned}
AM^k &\le \varepsilon, \quad 0 \le k \le n-1 \\
K &\le AM^n.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Jos $M > 1$, niin $k \mapsto M^k$ on kasvava ja riittää saada vaikkapa

$$
\begin{aligned}
AM^{n-1} &= \varepsilon, \\
AM^n &= K,
\end{aligned} \tag{26}
$$

joka toteutuu, kun $M = K/\varepsilon > 1$ ja $A = \varepsilon^n/K^{n-1}$. Valitaan siis

$$
\theta = -(n-1)\frac{\pi}{2}, \quad M = 1, \quad A = K, \quad \text{kun } K \le \varepsilon,
$$

ja

$$
\theta = -(n-1)\frac{\pi}{2}, \quad M = \frac{K}{\varepsilon}, \quad A = \frac{\varepsilon^n}{K^{n-1}}, \quad \text{kun } K > \varepsilon.
$$

H5T2. Kokonaislukujonon $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sanotaan olevan lakunaarinen, jos

$$
0 \le a_1 < a_2 < \cdots
$$

ja jos on olemassa $q > 1$ ja $N \ge 1$ siten, että $a_{n+1} \ge qa_n$ kaikille $n \ge N$. (Tämä on eri asia kuin luentorungossa esitetty lakunaarinen Fourier-sarja, vaikkakin asiayhteys on olemassa.) Mitkä seuraavista jonoista ovat lakunaarisia? Perustele vastauksesi.

a) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2^k\}_{k\in\mathbb{N}}$

b) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(k!)^2\}_{k\in\mathbb{N}}$

c) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{k(k+1)(k+2)\}_{k\in\mathbb{N}}$

Ratkaisu. a) Nyt

$$
\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2 =: q > 1, \quad k \ge 1 =: N,
$$

eli lukujono on lakunaarinen.

b) Nyt

$$
\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{(k+1)!}{k!}\right)^2 = (k+1)^2 \ge 2^2 = 4 : q, \quad k \ge 1 =: N,
$$

eli lukujono on lakunaarinen.

c) Nyt

$$
\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k+3}{k} = 1 + \frac{3}{k} \to 1, \quad k \to \infty.
$$

Näin ollen lakunaarisuusehto ei voi päteä. Ehdon särkyminen voidaan laskea vaikka seuraavalla tavalla. Olkoon $q > 1$ mielivaltainen. Valitaan $K \in \mathbb{N}$ siten, että $K > 3/(q-1)$ eli $q - 1 > 3/K$. Nyt

$$
\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 + \frac{3}{k} \le 1 + \frac{3}{K} < 1 + q - 1 = q, \quad k \ge K,
$$

eli lakunaarisuusehto ei voi päteä arvolla q.

H5T3. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$ ja olkoon $b \in [0,1)$. Osoita, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in [0,b)\}}{N} = b.$$

Vihje:

$$\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in [0,b)\} = \#\{1 \le n \le N : \eta_n \in (0,b)\} + \#\{1 \le n \le N : \eta_n = 0\}.$$

Ratkaisu. Tasan jakautuneisuuden määritelmän mukaan ehdosta $(a,b) \subset [0,1)$ seuraa

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in (a,b)\}}{N} = b - a.$$

Erityisesti

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in (0,b)\}}{N} = b.$$

Siis "satunnaisesti lukujonosta valittu alkio on välillä $(0,b)$ todennäköisyydellä b" tai "lukujonon alkioista $100b$ % on välillä $(0,b)$".

Osoitetaan nyt, että "satunnaisesti lukujonosta valittu alkio on 0 todennäköisyydellä 0". Sitten voidaan vihjettä noudattaen päätellä, että "satunnaisesti lukujonosta valittu alkio on välillä $[0,b)$ todennäköisyydellä b" eli, että nollan lisääminen suotuisien tapahtumien joukkoon ei lisää todennäköisyyttä.

Aluksi nähdään, että

$$\begin{aligned} 1 = \frac{N}{N} &= \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in [0,1)\}}{N} \\ &= \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in \{0\}\}}{N} + \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in (0,1)\}}{N}. \end{aligned} \tag{27}$$

Siis

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in \{0\}\}}{N} = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in (0,1)\}}{N} = 1 - (1-0) = 0.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in [0,b)\}}{N} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in \{0\}\}}{N} + \frac{\#\{1 \le n \le N : \eta_n \in (0,b)\}}{N} \\ &= 0 + (b - 0) = b. \end{aligned} \tag{28}$$

H5T4. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$ ja olkoon $0 \le a < b \le 1$. Osoita käyttämällä apuna tehtävää H5T3, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b)}(\eta_n) = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx.$$

Ratkaisu. Huomataan, että

$$\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0, b)\} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0,b)}(\eta_n).$$

Siis tehtävän H5T3 nojalla

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0,b)}(\eta_n) = b = \int_0^1 \chi_{[0,b)}(x)dx.$$

Nyt $\chi_{[a,b)} = \chi_{[0,b)} - \chi_{[0,a)}$ ja voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b)}(\eta_n) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0,b)}(\eta_n) - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[0,a)}(\eta_n) \\
&= \int_0^1 \chi_{[0,b)}(x)dx - \int_0^1 \chi_{[0,a)}(x)dx \\
&= \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx.
\end{aligned} \tag{29}$$

H5T5. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$ tasan jakautunut välille $[0, 1)$ ja olkoon $0 \leq a_k < b_k \leq 1$ kaikilla $k = 1, \ldots, K$. Olkoon

$$g(x) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \chi_{[a_k,b_k)}(x), \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Osoita käyttämällä apuna tehtävää H5T4, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\eta_n) = \int_0^1 g(x)dx.$$

Ratkaisu. Tehtävän H5T4 avulla voidaan laskea

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\eta_n) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \chi_{[a_k,b_k)}(\eta_n) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a_k,b_k)}(\eta_n) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \int_0^1 \chi_{[a_k,b_k)}(x)dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \chi_{[a_k,b_k)}(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.
\end{aligned} \tag{30}$$

1.6 Harjoitus 6

H6T1. Osoita, että yhtälöllä

$$y'' + 0,02y' + 25y = \frac{4}{\pi n^2}\cos(nt)$$

on yksityisratkaisu

$$y_n = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt),$$

missä

$$A_n = \frac{4(25-n^2)}{\pi n^2\left[(25-n^2)^2 + (0,02)^2\right]}$$

ja

$$B_n = \frac{0.08}{\pi n\left[(25-n^2)^2 + (0,02)^2\right]}.$$

Ratkaisu. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ kiinnitetty. Lähdetään etsimään yksityisratkaisua yritteellä. Koska oikealla puolella on termi $\cos(nt)$, niin yritteeksi tulee valita jotain samannäköistä ja sopivan mielivaltaista. Kosinin lisäksi mukaan on hyvä ottaa sini. Tehdään siis yrite

$$y = A\cos(nt) + B\sin(nt).$$

Saadaan

$$\begin{aligned} y' &= -An\sin(nt) + Bn\cos(nt) \\ y'' &= -An^2\cos(nt) - Bn^2\sin(nt) = -n^2y. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} &y'' + 0,02y' + 25y \\ &= (25-n^2)y + 0,02y' \\ &= \Big[A(25-n^2) + 0,02Bn\Big]\cos(nt) + \Big[B(25-n^2) - 0,02An\Big]\sin(nt) \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\cos(nt) \end{aligned}$$

Saadaan

$$\begin{aligned} A(25-n^2) + 0,02Bn &= \frac{4}{\pi n^2} \\ B(25-n^2) - 0,02An &= 0. \end{aligned}$$

Voidaan ratkaista alemmasta yhtälöstä

$$B = \frac{0,02An}{(25-n^2)}$$

ja kun tämä sijoitetaan ylempään yhtälöön, saadaan

$$A(25-n^2) + 0,02\frac{0,02An}{(25-n^2)}n = A\left[\frac{(25-n^2)^2 + (0,02n)^2}{(25-n^2)}\right] = \frac{4}{\pi n^2}.$$

Siis

$$A = \frac{4(25-n^2)}{\pi n^2\left[(25-n^2)^2+(0,02)^2\right]}$$

ja

$$B = \frac{0,02An}{(25-n^2)} = \frac{0,02n}{(25-n^2)}\frac{4(25-n^2)}{\pi n^2\left[(25-n^2)^2+(0,02)^2\right]} = \frac{0.08}{\pi n\left[(25-n^2)^2+(0,02)^2\right]}.$$

Saatiin halutut vastaukset. Vakioiden A ja B arvot riippuvat luvusta n, joten merkitään $A = A_n$ ja $B = B_n$.

H6T2. Etsi yksityisratkaisu yhtälölle

$$y'' + cy' + y = K\sin t,$$

missä $c > 0$ ja $K \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

Ratkaisu. Jos $K = 0$, niin selvästi $y \equiv 0$ on yhtälön ratkaisu. Jos $K \neq 0$, niin etsitään ratkaisua yritteellä. Oikealla puolella on $\sin t$, joten valitaan yritteeksi sinin ja kosinin lineaarikombinaatio

$$y = A\cos t + B\sin t.$$

Saadaan

$$\begin{aligned} y' &= -A\sin t + B\cos t \\ y'' &= -A\cos t - B\sin t = -y. \end{aligned}$$

Siis

$$y'' + cy' + y = cy' = -Ac\sin t + Bc\cos t = K\sin t.$$

Siis valitaan $B = 0$ ja $A = -K/c$. Tämä valinta toimii myös tilanteessa $K = 0$. Etsitty ratkaisu on siis

$$y(t) = -\frac{K}{c}\cos t.$$

Lisäys. Huomataan, että jos $c < 0$, niin ratkaisutapa toimii myös. Jos olisi $c = 0$, niin ratkaisua ei saataisi tällä menettelyllä vaan oltaisiin umpikujassa $0 = K\sin t$. Katsotaan mielenkiinnon vuoksi tämä tilanne läpi. Olkoon $c = 0$. Nyt $y = A\sin t + B\cos t$ on ratkaisu homogeeniyhtälölle

$$y'' + y = 0.$$

Ratkaistaan epähomogeeninen yhtälö

$$y'' + y = K\sin t$$

vakion varioinnilla. Annetaan vakioiden A ja B ollakin funktioita $A(t), B(t)$. Saadaan

$$\begin{aligned} y(t) &= A(t)\sin t + B(t)\cos t \\ y'(t) &= A'(t)\sin t + A(t)\cos t + B'(t)\cos t - B(t)\sin t \\ y''(t) &= A''(t)\sin t + 2A'(t)\cos t - A(t)\sin t + B''(t)\cos t - 2B'(t)\sin t - B(t)\cos t. \end{aligned}$$

Saadaan

$$y'' + y = A''(t)\sin t + 2A'(t)\cos t + B''(t)\cos t - 2B'(t)\sin t = K\sin t.$$

eli vaikkapa $A'' - 2B' = K$ ja $2A' + B'' = 0$. Siis vaikkapa $A \equiv 0$ ja $B = -Kt/2$ käy. Haluttu ratkaisu olisi

$$y(t) = -\frac{Kt}{2}\sin t.$$

H6T3. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden vakiokertoimista päästään usein eroon sopivalla muuttujanvaihdolla. Etsi sopiva vakio A siten, että sijoitus $t = A\tau$ lämpöyhtälöön

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sieventää sen muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Muunna vastaavalla tavalla aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

muotoon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Ratkaisu. Ketjusäännön ja alkuperäisen yhtälön nojalla

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial A\tau}{\partial \tau} = \alpha A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Lämpöyhtälön muuttujanvaihdossa tulee siis valita $A = 1/\alpha$.

Merkitään nyt derivointia alaindeksillä. Siis esimerkiksi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t.$$

Aaltoyhtälölle saadaan ketjusäännön, tulon derivoimissäännön ja alkuperäisen yhtälön nojalla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = u_{\tau\tau} = (u_\tau)_\tau = (u_t t_\tau)_\tau = u_{tt}(t_\tau)^2 + u_t t_{\tau\tau} = c^2 u_{xx}(t_\tau)^2 + u_t t_{\tau\tau}.$$

Nyt $t = A\tau$ eli $t_\tau = A$ ja $t_{\tau\tau} = 0$. Saadaan

$$u_{\tau\tau} = c^2 A^2 u_{xx}.$$

Aaltoyhtälön muuttujanvaihdossa tulee siis valita $A = 1/c$ tai $A = -1/c$.

H6T4. Etsi muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ oleva ratkaisu lämpöyhtälölle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

kun $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja

$$u(x,0) = 1 + 3\cos(2x) + 2\cos(4x), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ratkaisu. Yhtälö on nyt annettu alueessa $0 < x < \pi, \quad t > 0$ eli "suorakulmiossa" $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$. Koska alue on suorakulmio, on mielekästä yrittää separoida muuttujat eli tehdä yrite $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Yritteen antama ratkaisu on johdettu luentorungossa ja siten

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-2k^2 t} \sin(kx),$$

missä

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(t) \sin(kt) dt.$$

Nyt

$$u_0(x) = 1 + 3\cos(2x) + 2\cos(4x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

ja tulisi siis laskea kertoimet A_k. Lasketaan kertoimet osissa ja käytetään yläindeksejä. Ensimmäinen termi antaa

$$A_k^1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt = \left[\frac{-\cos(kt)}{k} \right]_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Siis indeksin k parillisilla arvoilla $A_k^1 = 0$ ja

$$A_{2m-1}^1 = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2m-1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Tämän laskun nojalla

$$\begin{aligned}
A_k^2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin((k-2)t) + \sin((k+2)t) dt \\
&= \frac{2}{(k-2)\pi}(1 - (-1)^{k-2})(1 - \delta_{k,2}) + \frac{2}{(k+2)\pi}(1 - (-1)^{k+2}) \\
&= (1 - (-1)^k) \left(\frac{2}{(k-2)\pi}(1 - \delta_{k,2}) + \frac{2}{(k+2)\pi} \right)
\end{aligned}$$

Siis indeksin k parillisilla arvoilla $A_k^2 = 0$ ja muulloin

$$A_k^2 = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{k-2} + \frac{1}{k+2} \right) = \frac{8}{\pi} \frac{k}{k^2 - 4}$$

eli

$$A_{2m-1}^3 = \frac{8}{\pi} \frac{2m-1}{(2m-1)^2 - 4}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Analogialla nähdään, että

$$A_k^3 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(4t) \cdot \sin(kt) dt = 0,$$

kun k on parillinen ja että

$$A^3_{2m-1} = \frac{8}{\pi}\frac{2m-1}{(2m-1)^2-16}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Siis $A_{2m} = 0$, $m \in \mathbb{N}$, ja

$$A_{2m-1} = A^1_{2m-1} + 3A^2_{2m-1} + 2A^3_{2m-1} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2m-1} + \frac{6(2m-1)}{(2m-1)^2-4} + \frac{4(2m-1)}{(2m-1)^2-16}\right).$$

H6T5. Etsi muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ oleva ratkaisu aaltoyhtälölle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

kun $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja

$$u(x,0) = x(\pi - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Ratkaisu. Luentorungossa johdettiin ratkaisulle kaava

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\left[A_k\cos(kct) + B_k\sin(kct)\right],$$

missä

$$A_k = \int_0^\pi u_0(t)\sin(kt)dt$$

ja

$$B_k = \frac{1}{kc}\int_0^\pi u_1(t)\sin(kt)dt.$$

Nyt $u_1(x) = u_t(x,0) = 0$, joten $B_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Vastaavasti $u_0(x) = u(x,0) = x(\pi - x)$, joten

$$A_k = \int_0^\pi t(\pi - t)\sin(kt)dt.$$

Taulukkointegroimalla (osittaisintegroimalla) saadaan

D	I	F	R
$\pi t - t^2$	$\sin(kt)$		
$\pi - 2t$	$\frac{-\cos(kt)}{k}$	$t(\pi - t)\frac{-\cos(kt)}{k}$	
-2	$\frac{-\sin(kt)}{k^2}$	$(\pi - 2t)\frac{\sin(kt)}{k^2}$	
0	$\frac{\cos(kt)}{k^3}$	$-2\frac{\cos(kt)}{k^3}$	0

Eli

$$\int t(\pi - t)\sin(kt)dt = t(\pi - t)\frac{-\cos(kt)}{k} + (\pi - 2t)\frac{\sin(kt)}{k^2} - 2\frac{\cos(kt)}{k^3}$$

Siis

$$\begin{aligned} A_k &= \left[t(\pi - t)\frac{-\cos(kt)}{k} + (\pi - 2t)\frac{\sin(kt)}{k^2} - 2\frac{\cos(kt)}{k^3}\right]_{t=0}^{\pi} \\ &= \left[-2\frac{\cos(kt)}{k^3}\right]_{t=0}^{\pi} = \frac{2}{k^3}(1 - (-1)^k), \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{31}$$

Siis
$$A_{2m} = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$
ja
$$A_{2m-1} = \frac{4}{(2m-1)^3}, \quad m \in \mathbb{N}.$$
Sijoittamalla kertoimet A_k sarjaan, saadaan
$$u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin((2k-1)x)\cos((2k-1)ct.$$

H6T6. Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että
$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx) + w\sin(wx)}{1+w^2} dw = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, \\ \pi e^{-x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

Ratkaisu. Valitaan
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \pi e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$
Koska f ja f' ovat paloittain jatkuvia, niin Lauseen 17.4 nojalla
$$\widetilde{F}(x) = \int_0^\infty A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$
missä
$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$$
ja
$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)dt.$$
Tulee siis laskea kerroinfunktiot A ja B. Nyt
$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = \int_0^\infty e^{-t}\cos(wt)dt.$$

Taulukkointegroimalla (osittaisintegroimalla) saadaan

D	I	F	R
$\cos(wt)$	e^{-t}		
$-w\sin(wt)$	$-e^{-t}$	$-\cos(wt)e^{-t}$	
$-w^2\cos(wt)$	e^{-t}	$w\sin(wt)e^{-t}$	$-w^2\cos(wt)e^{-t}$

eli
$$\int \cos(wt)e^{-t}dt = -\cos(wt)e^{-t} + w\sin(wt)e^{-t} + \int -w^2\cos(wt)e^{-t}dt$$
eli
$$\int \cos(wt)e^{-t}dt = \frac{w\sin(wt)e^{-t} - \cos(wt)e^{-t}}{1+w^2}.$$

Siis

$$A(w) = \left[\frac{w\sin(wt)e^{-t} - \cos(wt)e^{-t}}{1+w^2} \right]_{t=0}^{\infty} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{1+w^2} = \frac{1}{1+w^2}.$$

Vastaavasti

$$B(w) = \int_0^\infty e^{-t}\sin(wt)dt,$$

joten taulukko

D	I	F	R
$\sin(wt)$	e^{-t}		
$w\cos(wt)$	$-e^{-t}$	$-\sin(wt)e^{-t}$	
$-w^2\sin(wt)$	e^{-t}	$-w\cos(wt)e^{-t}$	$-w^2\sin(wt)e^{-t}$

antaa

$$\int \sin(wt)e^{-t}dt = -\sin(wt)e^{-t} - w\cos(wt)e^{-t} + \int -w^2\sin(wt)e^{-t}dt$$

eli

$$\int \sin(wt)e^{-t}dt = \frac{-w\cos(wt)e^{-t} - \sin(wt)e^{-t}}{1+w^2}.$$

Siis

$$B(w) = \left[\frac{-w\cos(wt)e^{-t} - \sin(wt)e^{-t}}{1+w^2} \right]_{t=0}^{\infty} = 0 + 0 + \frac{w}{1+w^2} + 0 = \frac{w}{1+w^2}.$$

Siis

$$\widetilde{F}(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(wx) + w\sin(wx)}{1+w^2}dw = \frac{f(x-)+f(x+)}{2} = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0, \\ \pi e^{-x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$

1.7 Harjoitus 7

H7T1. Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(\pi w)}{w}\sin(wx)dw = \begin{cases} \pi/2, & \text{kun } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{kun } x > \pi. \end{cases}$$

Ratkaisu. Integraalissa on $\sin(wx)$ mutta ei tekijää $\cos(wx)$. Kyseessä on siis Fourier'n sini-integraali. Tulee saada $A(w) = 0$ eli tulee esimerkiksi käyttää jotain paritonta funktiota. Valitaan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{2}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Nyt $A(w) = 0$ ja

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin(wt)dt = \int_0^\pi \cos(wt)dt = \left[\frac{-\cos(wt)}{w}\right]_{t=0}^\pi = \frac{1-\cos(wt)}{w}.$$

Siis

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(wt)}{w}\sin(wx)dw = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

H7T2. Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi w}{2}\right)\cos(wx)}{1-w^2}dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\cos x, & \text{kun } |x| < \pi/2 \\ 0, & \text{kun } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Ratkaisu. Kyseessä on kosini-integraali, eli tulee saada $B(w) = 0$. Tämän vuoksi tulee tehdä kosini-integraaliesitys parilliselle funktiolle. Yhtälön oikean puolen funktio f on tarkoitukseen sopiva. Saadaan

$$\begin{aligned} A(w) &= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(wt)dt = \int_0^{\pi/2}\cos(t)\cos(wt)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos((w-1)t)+\cos((w+1)t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((w-1)t)}{w-1}+\frac{\sin((w+1)t)}{w+1}\right]_{t=0}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{w\pi}{2}-\frac{\pi}{2})}{w-1}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{w\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}{w+1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{w\pi}{2})}{1-w}+\frac{1}{2}\frac{\cos(\frac{w\pi}{2})}{1+w} = \frac{\cos(\frac{w\pi}{2})}{1-w^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

H7T3. Muodosta funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 < x < a \\ 0, & \text{kun } x \geq a \end{cases}$$

kosini-integraaliesitys.

Ratkaisu. Jatketaan f parilliseksi, jolloin

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)dt = 0$$

ja

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{a} t\cos(wt)dt.$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(wt)}{w} - \frac{\cos(wt)}{w^2}\right]_{t=0}^{a} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1 + w\sin(wa) - \cos(wa)}{w^2}\right].$$

Siis

$$\widetilde{F}(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1 + w\sin(wa) - \cos(wa)}{w^2}\cos(wx)dw = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}, \quad x > 0.$$

H7T4. Muodosta funktion

$$f(x) = e^{-x} + e^{-2x}, \qquad x > 0,$$

kosini-integraaliesitys.

Ratkaisu. Esimerkin 17.6 tai seuraavan tehtävän nojalla

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{k}{w^2 + k^2}\cos(wx)dw.$$

Siis

$$\begin{aligned} e^{-x} + e^{-2x} &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{w^2 + 1^2}\cos(wx)dw + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{2}{w^2 + 2^2}\cos(wx)dw \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{1}{w^2 + 1} + \frac{2}{w^2 + 2^2}\right)\cos(wx)dw \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{3w^2 + 6}{(w^2 + 1)(w^2 + 4)}\cos(wx)dw \end{aligned} \tag{33}$$

H7T5. Etsi

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{1}{1 + x^2}\right).$$

Vihje: Sovella Laplacen integraalia.

Ratkaisu. Laskuharjoitusten pitäjä laskeskelee tähän itselleen Esimerkin 17.6. ja käyttää sen tulosta. Lasketaan siis funktion $f(x) = e^{-kx}$ Fourierin sini- ja kosini-integraalit. Kosini-integraalille

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-kt}\cos(wt)dt. \tag{34}$$

Osittaisintegroimalla kahdesti ja ratkaisemalla syntynyt algebrallinen yhtälö saadaan

$$\int e^{-kt}\cos(wt) = e^{-kt}\frac{w\sin(wt) - k\cos(wt)}{w^2+k^2}.$$

Näin ollen

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\left[e^{-kt}\frac{w\sin(wt) - k\cos(wt)}{w^2+k^2}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{k}{w^2+k^2}.$$

Sini-integraalille saadaan vastaavasti

$$\int e^{-kt}\sin(wt) = -e^{-kt}\frac{w\cos(wt) + k\sin(wt)}{w^2+k^2}$$

ja

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\left[-e^{-kt}\frac{w\cos(wt) + k\sin(wt)}{w^2+k^2}\right]_{t=0}^{\infty} = \frac{2}{\pi}\frac{w}{w^2+k^2} = \mathcal{F}_s(f).$$

Saadaan siis Laplacen integraalit

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{k}{w^2+k^2}\cos(wx)dw$$

ja

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{w}{w^2+k^2}\sin(wx)dw$$

Nyt voidaan lukea näistä kaavoista, että

$$\mathcal{F}_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{w^2+k^2}$$

ja

$$\mathcal{F}_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{w^2+k^2}.$$

Siis arvolla $k = 1$ saadaan

$$\mathcal{F}_c\left(e^{-x}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$

Fourier-kosinimuunnos on oma käänteismuunnoksensa eli kyseessä on involuutio. Siis, koska $\mathcal{F}_c^{-1} = \mathcal{F}_c$, niin saadaan

$$\mathcal{F}_c\left(\frac{1}{1+w^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}_c\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}_c\left(\mathcal{F}_c\left(e^{-x}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-x}.$$

H7T6. Etsi funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{kun } x > 0 \\ 0, & \text{kun } x \leq 0 \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

Ratkaisu. Suoralla laskulla saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t}e^{-iwt}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(1+iw)t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+iw}. \end{aligned} \tag{35}$$

1.8 Harjoitus 8

H8T1. Etsi funktion

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & \text{kun } -1<x<1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

Ratkaisu. Suoralla laskulla nähdään, että

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^t e^{-iwt}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{(1-iw)t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)}\left[e^{(1-iw)t}\right]_{t=-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sinh((1-iw))}{(1-iw)}.\end{aligned} \tag{36}$$

H8T2. Olkoon $\mathcal{F}(f(t))$ funktion $f(t)$ Fourier-muunnos ja $a\in\mathbb{R}$ vakio. Osoita, että

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-iwa}\mathcal{F}(f(t)).$$

Ratkaisu. Määritelmän mukaan

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-iwt}dt.$$

Tehdään tähän muuttujanvaihto $t-a=s$, $t=s+a$, $dt=ds$, rajat säilyvät. Saadaan

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iw(s+a)}ds = e^{-iwa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iws}ds = e^{-iwa}\mathcal{F}(f(t)).$$

H8T3. Etsi Lauseen 19.9 avulla

$$\mathcal{F}\left(xe^{-x^2}\right).$$

Ratkaisu. Laskuharjoitusten pitäjä laskeskelee tähän itselleen Esimerkin 19.7. ja käyttää sen tulosta.

Lasketaan funktion $f(x)=e^{-ax^2}$ Fourier-muunnos. Aluksi todetaan, että

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-iwt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+iwt)}dt.$$

Eksponentti voidaan täydentää neliöön

$$at^2+iwt = (\sqrt{a}t)^2 + 2\sqrt{a}t\frac{iw}{2\sqrt{a}} + \left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}t+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{w^2}{4a}.$$

Sitten integraalissa voidaan tehdä integroimisrajat säilyttävä muuttujanvaihto $\sqrt{a}t=s$, $\sqrt{a}dt=ds$. Saadaan

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(s+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2\right)ds.$$

Vielä yhdellä muuttujanvaihdolla saadaan

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds.$$

Funktio $g : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to (-\infty,\infty)^2$, $g(r,\theta) = (x\cos\theta, r\sin\theta)$ on bijektio ja sen Jakobin determinantti on

$$\begin{vmatrix} (r\cos\theta)_r & (r\cos\theta)_\theta \\ (r\sin\theta)_r & (r\sin\theta)_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta r\sin^2\theta = r,$$

joten

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} 2re^{-r^2} drd\theta = \pi.$$

Siten $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$ ja edelleen

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right).$$

Nyt derivaatan Fourier-muunnoksen kaavalla ja Fourier-muunnoksen lineaarisuuden nojalla saadaan

$$\mathcal{F}(xe^{-x^2}) = \mathcal{F}\left(\frac{(e^{-x^2})'}{-2}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left((e^{-x^2})'\right) = -\frac{iw}{2}\mathcal{F}\left(e^{-x^2}\right) = -\frac{iw}{2\sqrt{2a}} \exp\left(-\frac{w^2}{4a}\right).$$

H8T4. Olkoon $g \in L^1(-\infty,\infty)$. Käytä Fourier-muunnosta differentiaaliyhtälön

$$u'' - u + 2g(x) = 0$$

ratkaisun $u(x) = g * e^{-|x|}$ löytämiseksi. Mitä oletuksia ratkaisun tulee toteuttaa, jotta menetelmää voi soveltaa?

Ratkaisu. Voidaan laskea

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{F}(0) &= \mathcal{F}(u'' - u + 2g) = \mathcal{F}(u'') - \mathcal{F}(u) + 2\mathcal{F}(g) \\ &= -w^2\mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u) + 2\mathcal{F}(g) = -(1+w^2)\mathcal{F}(u) + 2\mathcal{F}(g), \end{aligned} \tag{37}$$

joten

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(g)\frac{2}{1+w^2} = \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(e^{-|x|}).$$

Konvoluutiolauseen nojalla

$$u(x) = g(x) * e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tarvittavia oletuksia:

1. Täytyy olettaa, että $\mathcal{F}(g)$ on olemassa.

2. Lausetta 19.9. varten, että saadaan $\mathcal{F}(u'') = -w^2\mathcal{F}(u)$, täytyy olla

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u'(x)| + |u''(x)| dx < \infty,$$

ja

$$|u(x)| + |u'(x)| \to 0, \quad x \to \pm\infty.$$

3. Jotta konvoluutiolausetta voidaan käyttää, täytyy olettaa, että $g, u \in L^1(-\infty, \infty)$ ja että g ja u ovat rajoitettuja.

H8T5. Osoita, että

$$f * g = g * f,$$

missä f ja g sellaisia funktiota, että konvoluutiot $f * g$ ja $g * f$ ovat hyvin määriteltyjä.

Ratkaisu. **Tapa 1.** Konvoluution määritelmän mukaan

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tehdään muuttujanvaihto $x - t = s$, $t = x - s$, $-dt = ds$, $t = -\infty \longleftrightarrow s = \infty$, $t = \infty \longleftrightarrow s = -\infty$. Saadaan

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(x-s)g(s)(-ds) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s)ds = (g * f)(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Tapa 2. Konvoluutiolauseen nojalla Fourier-muunnokselle pätee, että ”konvoluution muunnos on muunnosten tulo”. Siis, koska tulo on vaihdannainen, niin konvoluutio on vaihdannainen ainakin sellaisille funktioille, joilla on olemassa Fourier-muunnos.

H8T6. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellaisia funktiota, että $(f * g) \cdot h$ ja $f * (g \cdot h)$ ovat hyvin määriteltyjä. Tarkastele päteekö yhtälö

$$(f * g) \cdot h = f * (g \cdot h),$$

toisin sanoen, onko konvoluutio assosiatiivinen tulon kanssa?

Ratkaisu. Ei ole. Etsitään vastaesimerkki. Valitaan

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

ja $h(x) = 1 - g(x)$. Nyt $g(x)h(x) \equiv 0$, joten $f * (g \cdot h) \equiv 0$. Tulisi osoittaa, että $((f * g) \cdot h)(x) \neq 0$ jollakin $x \in \mathbb{R}$. Voidaan laskea

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x-t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x-t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

eli

$$((f * g) \cdot h)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x-t)dt, \quad x \leq 0.$$

Nyt vain valitaan sopiva funktio f, esimerkiksi $f(x) = e^{-x^2}$. Nyt esimerkiksi

$$((f * g) \cdot h)(-2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^\infty e^{-(2-t)^2} dt > 0,$$

eli konvoluutio ei ole assosiatiivinen tulon kanssa.

1.9 Harjoitus 9

H9T1. Etsi muotoa

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix}$$

oleva trigonometrinen polynomi siten, että

$$\begin{cases} p(0) & = f_0 \\ p(2\pi/3) & = f_1 \\ p(4\pi/3) & = f_2, \end{cases}$$

missä $f_0, f_1, f_2 \in \mathbb{R}$.

Ratkaisu. Selvästi diskreetti Fourier-muunnos liittyy kysymykseen. Käytetään diskreetille Fourier-muunnokselle lyhennettä DFT ja nopealle Fourier-muunnokselle lyhennettä FFT. Tehdään DFT ja poimitaan vastaus muunnoksesta, jos mahdollista. Olkoon $(x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ 3-jaksollinen jono siten, että

$$\begin{cases} x(0) & = f_0 \\ x(1) & = f_1 \\ x(2) & = f_2. \end{cases}$$

Luennoissa määriteltiin n-jaksollisen jonon diskreetti Fourier-kerroin kaavalla

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)e^{-2\pi ijk/n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)w_n^{-jk},$$

missä $w_n = e^{2\pi i/n}$. Näiden kertoimien jonoa kutsutaan sitten diskreetiksi Fourier-muunnokseksi. Nyt $n = 3$ ja siis $w_3 = e^{2\pi i/3}$ ja

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{3} x(j)e^{-2\pi ijk/3}.$$

Laskeskellaan nämä sijoittamalla eri k:n ja j:n arvoja. Arvolla $k = 0$ saadaan

$$\hat{x}(0) = \frac{1}{3}\left(x(0)e^0 + x(1)e^0 + x(2)e^0\right) = \frac{f_0 + f_1 + f_2}{3}.$$

Sitten arvolla $k = 1$ tuloille $2jk$ saadaan $2 \cdot (0, 1, 2) \cdot 1 = (0, 2, 4)$ ja saadaan

$$\hat{x}(1) = \frac{1}{3}\left(x(0)e^0 + x(1)e^{-2\pi i/3} + x(2)e^{-4\pi i/3}\right) = \frac{f_0 + f_1 e^{-2\pi i/3} + f_2 e^{-4\pi i/3}}{3}.$$

Koska eksponenttifunktio on $2\pi i$-jaksollinen, niin funktio $e^{(\pi i/3)x}$ on 6-jaksollinen. Arvolla $k = 2$ tuloille $2jk$ saadaan $2 \cdot (0, 1, 2) \cdot 2 = (0, 4, 8) = (0, 4, 2) \mod 6$ ja siten

$$\hat{x}(2) = \frac{1}{3}\left(x(0)e^0 + x(1)e^{-4\pi i/3} + x(2)e^{-2\pi i/3}\right) = \frac{f_0 + f_1 e^{-4\pi i/3} + f_2 e^{-2\pi i/3}}{3}.$$

Nyt luentojen Lauseen 20.5. nojalla

$$x(j) = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k)e^{2\pi ijk/n} = \sum_{k=0}^{3} \hat{x}(k)e^{ik(2j\pi/3)} = \hat{x}(0)e^0 + \hat{x}(k)e^{iy} = \hat{x}(k)e^{i2y},$$

missä $y(j) = 2j\pi/3$, kaikilla $j = 0, 1, 2$. Siis $x(j) = p(y(j))$ saadaan, kun valitaan $c_0 = \hat{x}(0), c_1 = \hat{x}(1)$ ja $c_2 = \hat{x}(2)$.

H9T2. Olkoon $(x(j) : j \in \mathbb{Z})$ n-jaksollinen jono. Osoita, että

$$\hat{x}(k+n) = \hat{x}(k)$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.

Ratkaisu. Koska jono $(x(j))_{j\in\mathbb{Z}}$ on n-jaksollinen, niin myös siirretty jono $(x(j+n))_{j\in\mathbb{Z}}$ on n-jaksollinen. Diskreetit Fourier-kertoimet on määritelty kaavalla

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)e^{-2\pi ijk/n}.$$

Sijoitetaan luvun k paikalle $k+n$. Saadaan

$$\hat{x}(k+n) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)e^{-2\pi ij(k+n)/n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)e^{-2\pi ijk/n}e^{-2\pi i} = \hat{x}(k),$$

sillä $e^{-2\pi i} = 1$.

H9T3. Olkoon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ n-jaksollinen jono. Osoita, että

$$x(j) = \sum_{k=q}^{n+q-1} \hat{x}(k)e^{2\pi ijk/n}$$

kaikilla $q \in \mathbb{Z}$.

Ratkaisu. Lauseen 20.5. nojalla

$$x(j) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}(k)e^{2\pi ijk/n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Koska $(x(j) : j \in \mathbb{Z})$ on n-jaksollinen, niin Huomautuksen 20.4. nojalla $\Big(y(j) = \hat{x}(j)e^{2\pi ijk/n} : j \in \mathbb{Z}\Big)$ on myös. Siis jono y koostuu n-vektoreista, joita on ladottu peräkkäin. Jos poimitaan jonosta y satunnaisesta kohtaa n peräkkäistä termiä, niin saadaan aina sama n-vektori - luvut ovat korkeintaan eri järjestyksessä. Siis olipa $q \in \mathbb{Z}$ mikä tahansa, niin summissa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}(k)e^{2\pi ijk/n} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=q}^{n+q-1} \hat{x}(k)e^{2\pi ijk/n}$$

on samat luvut mahdollisesti eri järjestyksessä. Siis summat ovat samat.

Tehtävän voi tehdä myös muuttujanvaihdolla. Toinen summista joudutaan tällöin jossain tapauksessa jakamaan kahteen osaan. Analoginen tulos jaksollisille funktioille kuuluu seuraavasti: jos a-jaksollinen funktio f on integroituva välillä $[0, a]$, niin

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+a} f(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

H9T4. Olkoon $(x(j) : j \in \mathbb{Z})$ 4-periodinen jono siten, että

$$\begin{cases} x(0) &= 0 \\ x(1) &= 1 \\ x(2) &= 0 \\ x(3) &= -1. \end{cases}$$

Etsi jonon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ diskreetti Fourier-muunnos.

Ratkaisu. **Tapa 1.** Tulee laskea summat

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)e^{-2\pi ijk/n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{3} x(j)w_n^{-jk},$$

missä $w_n = e^{2\pi i/n}$, arvoilla $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Nyt $n = 4$ ja siten $w_n = e^{\pi i/2} = i$. Laskennan selkeyttämiseksi voidaan tehdä taulukko.

i^{jk}	$j = 0$	1	2	3
$k = 0$	1	1	1	1
1	1	$-i$	-1	i
2	1	-1	1	-1
3	1	i	-1	$-i$
$x(j)$	0	1	0	$-1.$

Nyt saadaan

$$\hat{x}(0) = \frac{0+1+0+(-1)}{4} = 0$$

ja

$$\hat{x}(1) = \frac{0-i+0-i}{4} = -\frac{i}{2}$$

sekä

$$\hat{x}(2) = \frac{0-1+0-(-1)}{4} = 0$$

ynnä

$$\hat{x}(3) = \frac{0+i+0-(-i)}{4} = \frac{i}{2}.$$

Siis

$$\hat{x} = \left(\ldots, 0, -\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2}, 0, -\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2}, \ldots\right).$$

Tapa 2. Lasketaan DFT matriiseilla. Luentojen mukaan, kun asetetaan $c_k = \hat{x}(k)$ ja $f_k = x(k)$ ja merkitään lyhyesti muun muassa $x = (x(1), x(2), x(3), x(4))^T$, niin

$$F\hat{x} = x,$$

missä $F_{jk} = w_n^{(j-1)(k-1)}$ ja

$$\hat{x} = \frac{1}{n}Gx,$$

missä $G = \overline{F}_{jk} = \overline{w_n}^{(j-1)(k-1)}$. Nyt siis

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

ja

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

Saadaan

$$\hat{x} = \frac{1}{4}Gx = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0+1+0-1}{4} \\ \frac{0-i+0-i}{4} \\ \frac{0-1+0-1}{4} \\ \frac{0+i+0+i}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{i}{2} \\ 0 \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

Siis

$$\hat{x} = \left(\ldots, 0, -\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2}, 0, -\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2}, \ldots\right).$$

Tapa 3. Lasketaan Matlabilla. Tarkistetaan, miten DFT toimii Matlabissa kirjoittamalla help fft.

```
>> help fft
 fft Discrete Fourier transform.
    fft(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  For
    matrices, the fft operation is applied to each column. For N-D
    arrays, the fft operation operates on the first non-singleton
    dimension.

    fft(X,N) is the N-point fft, padded with zeros if X has less
    than N points and truncated if it has more.

    fft(X,[],DIM) or fft(X,N,DIM) applies the fft operation across the
    dimension DIM.

    For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
    with elements
                     N
       X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                    n=1
    The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                     N
       x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                    k=1

    See also fft2, fftn, fftshift, fftw, ifft, ifft2, ifftn.

    Overloaded methods:
       uint8/fft
```

```
      uint16/fft
      gf/fft
      codistributed/fft
      gpuArray/fft
      qfft/fft
      iddata/fft

   Reference page in Help browser
      doc fft
```

Huomataan, että Matlabin kaavoissa $1/N$ on eri paikassa kuin luennoissa. Otettaessa DFT, täytyy kertoa tekijällä $1/N$ ja otettaessa käänteinen DFT, täytyy kertoa tekijällä N, että saadaan luentojen kanssa yhtenevät määritelmät. Lasketaan siis seuraavasti.

```
>> x=[0 1 0 -1]';
>> y=fft(x)/4

y =

        0
        0 - 0.5000i
        0
        0 + 0.5000i
```

Siis saatiin sama vastaus kuin aiemmin.

H9T5. Olkoon $\{\hat{x}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 4-periodinen jono siten, että

$$\begin{cases} \hat{x}(0) & = 0 \\ \hat{x}(1) & = -\frac{1}{2}i \\ \hat{x}(2) & = 0 \\ \hat{x}(3) & = \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

Etsi jonon $\{\hat{x}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ diskreetti Fourier-käänteismuunnos.

Ratkaisu. **Tapa 1.** Huomataan, että $\hat{x}$ on nyt sama kuin tehtävässä H9T4. Siis Lauseen 20.5. nojalla x on sama myös. Siis

$$x = (\dots, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots).$$

Tapa 2. Lasketaan luvut $x(j)$, $j = 0, 1, 2, 3$, käyttämällä Lauseen 20.5. tarjoamaa kaavaa

$$x(j) = \sum_{k=0}^{n} \hat{x}(k) e^{2\pi ijk/4}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

Tapa 3. Lasketaan Matlabilla. Merkitään $y = \hat{x}$. Matlab antaa

```
y=[0,-i/2,0,i/2]';
>> x=ifft(y)*4

x =
```

```
 0
-1
 0
 1
```

Siis saatiin sama vastaus kuin aiemminkin.

H9T6. Olkoon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ 4-periodinen jono siten, että

$$\begin{cases} x(0) &= 1 \\ x(1) &= 1 \\ x(2) &= 1 \\ x(3) &= -1. \end{cases}$$

Etsi jonon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ diskreetti Fourier-muunnos käyttämällä Lausetta 20.10.

Ratkaisu. **Tapa 1.** Lasketaan käsin. Luentojen mukaan, jos $n = 2M$, niin

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x(j)w_n^{-jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x_e(j)w_M^{-jk} + w_n^{-k}\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x_o(j)w_M^{-jk}\right),$$

missä $w_m = e^{2\pi i/m}$, $x_e(j) = x(2j)$ ja $x_o(j) = x(2j+1)$. Siis

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x_e}(k) + w_n^{-k}\widehat{x_o}(k)\right).$$

Siis tehdään diskreetit Fourier-muunnokset jonoille x_e ja x_o ja muodostetaan jonon x DFT sitten näistä. Nyt $M = 2$ ja siten $w_M = e^{2\pi i/2} = e^{\pi i} = -1$. Nyt

$$\begin{cases} x(0) &= 1 = x_e(0) \\ x(1) &= 1 = x_o(0) \\ x(2) &= 1 = x_e(1) \\ x(3) &= -1 = x_o(1). \end{cases}$$

Siis

$$\widehat{x_e}(0) = \frac{x_e(0) + x_e(1)}{2} = 1 = \widehat{x_e}(2)$$

ja

$$\widehat{x_e}(1) = \frac{x_e(1) - x_e(1)}{2} = 0 = \widehat{x_e}(3)$$

sekä

$$\widehat{x_o}(0) = \frac{x_o(0) + x_o(1)}{2} = 0 = \widehat{x_o}(2)$$

ynnä

$$\widehat{x_o}(1) = \frac{x_o(1) - x_o(1)}{2} = 1 = \widehat{x_e}(3).$$

Nyt $w_4^{-k} = (e^{-2\pi i/4})^k = (-i)^k$ ja saadaan edelleen laskettua, että

$$\hat{x}(0) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x_e}(0) + (-i)^0\widehat{x_o}(0)\right) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

ja

$$\hat{x}(1) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x_e}(1) + (-i)^1\widehat{x_o}(1)\right) = \frac{0-i}{2} = -\frac{i}{2}$$

sekä

$$\hat{x}(2) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x_e}(2) + (-i)^2\widehat{x_o}(2)\right) = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

ynnä

$$\hat{x}(3) = \frac{1}{2}\left(\widehat{x_e}(3) + (-i)^3\widehat{x_o}(3)\right) = \frac{0+i}{2} = \frac{i}{2}.$$

Siis

$$\widehat{x} = \left(\ldots, \frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \ldots\right)$$

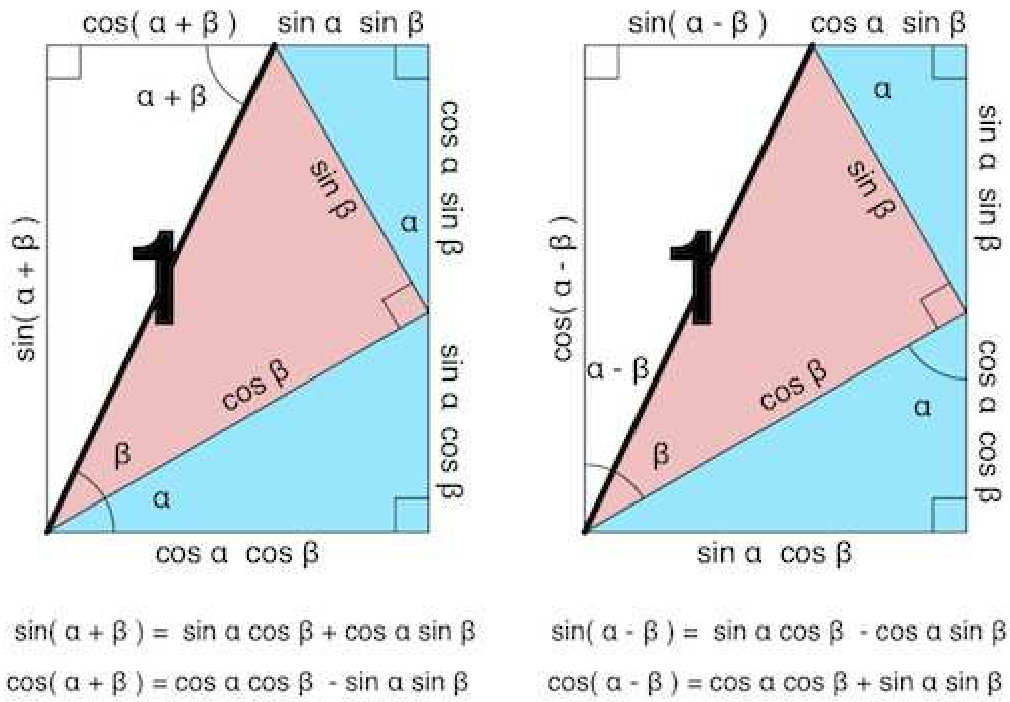
Tapa 2. Lasketaan Matlabilla. Merkitään $y = \hat{x}$. Matlab antaa

```
>> x=[1 1 1 -1]';
>> y=fft(x)/4

y =

   0.5000
        0 - 0.5000i
   0.5000
        0 + 0.5000i
```

Saatiin sama tulos kuin aiemmin.



Kuva 3: Sinin summakaava.

2 Lisäyksiä

2.1 Trigonometrisia kaavoja

Tehtävässä H1T5 tarvittiin kaavaa

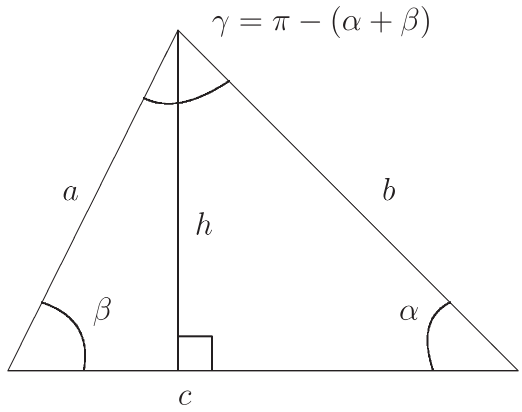
$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Kerrataan kaavan

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) - \sin(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

alkeisgeometrinen todistus ja johdetaan siitä tehtävän H1T5 kaava. Kaavan oikeellisuus nähdään Kuvasta 3, joka löytyi Googlen kuvahaulla osoitteesta `http://i.stack.imgur.com/dhFCv.jpg`.

Ohessa oleva todistus on peräisin lehdestä Dimensio 6/2013, sivu 62.



Oheisessa kuvassa
$$h = b \sin \alpha = a \sin \beta$$
eli
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}.$$
Symmetrian nojalla
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$
Tätä kutsutaan sinilauseeksi. Nyt kosinin määritelmän ja sinilauseen nojalla
$$c = a \cos \beta + b \cos \alpha = \left(c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right) \cos \beta + \left(c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \right) \cos \alpha.$$
Kertomalla puolittain luvulla $(\sin \gamma)/c$ saadaan
$$\sin \gamma = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$
Koska kolmion kulmien summa on π, niin $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Toisaalta yksikköympyrästä nähdään, että $\sin(\pi - x) = \sin x$ kaikilla x. Näin ollen $\sin \gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$. Siis saatiin
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$$
Sijoittamalla luvun β paikalle luku $-\beta$ saadaan
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$$
Summaamalla kaksi viimeistä kaavaa yhteen, saadaan
$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$
eli kaava (38) pätee. Nyt kaava (38) eli
$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$
antaa derivoimalla puolittain muuttujan x suhteen
$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
Jos taas derivoidaan muuttujan y suhteen ja kerrotaan luvulla -1, saadaan
$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Siis kaavat

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos y &= \sin(x-y)+\sin(x+y);\\ 2\cos x\cos y &= \cos(x-y)+\cos(x+y);\\ 2\sin x\sin y &= \cos(x-y)-\cos(x+y); \end{aligned} \tag{39}$$

pätevät kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Jos yksi kaava tiedetään, muut saadaan siitä esimerkiksi derivoimalla. Voidaan itseasiassa osoittaa, että funktiot sin ja cos voidaan jatkaa derivoituviksi koko kompleksitasossa ja että ylläolevat kaavat pätevät kaikilla $x, y \in \mathbb{C}$.

2.2 Perusjakson olemassaolosta

Antti Puurosen esittämällä todistustavalla saadaan seuraava tulos.

Lause 2.1. *Jaksollisella ei-vakiolla funktiolla, joka on jatkuva vähintään yhdessä pisteessä, on perusjakso.*

Todistus. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen perusjaksoton funktio ja jatkuva pisteessä $a \in \mathbb{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä a, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(a) \in (f(x)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ kaikilla $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Koska funktiolla f ei ole perusjaksoa, löydetään $c \in (0, \delta)$ siten, että c on funktion f jakso. Näin ollen

$$f(\mathbb{R}) \subseteq f([a, a+c)) \subseteq f((a-\delta, a+\delta)) \subseteq (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon).$$

Luku $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen. Siis

$$f(\mathbb{R}) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon) = \{f(a)\}$$

eli f on vakio. $\square$

2.3 Konformikuvauksia eli "tehdään hassuja kuvia"

Tehtävässä H2T7 ortonormitettiin monomit $\{1, x, x^2\}$ sisätulon

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

suhteen käyttämällä yhtälöryhmää tai Gram-Schmidtin ortonormitusmenetelmää. Vastaavalla tavalla Gram-Schmidtin ortonormitusmenetelmällä monomeista voidaan ortonormittaa myös muiden sisätulojen suhteen. Toisaalta kun lasketaan funktion yleistetyt Fourier-kertoimet jonkun ortonormaalin kannan suhteen voidaan funktio joskus esittää sarjana kannan alkioista. Tämä on hyvin yleinen toiminta-ajatus.

Kirjassa Duren, Schuster - Bergman spaces, kerrotaan seuraavaa.

Olkoon Ω kompleksitason $\mathbb{C}$ osajoukko niin, että Ω on rajoitettu yhdesti yhtenäinen (reiätön) alue (yhtenäinen avoin joukko). Tällöin on olemassa *Bergmanin ydinfunktio* $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ siten, että jos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on analyyttinen (derivoituva) funktio ja pintaintegraali

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 dA(z) \tag{40}$$

on äärellinen, niin voidaan kirjoittaa

$$f(z) = \int_{\Omega} f(\zeta)K(z, \zeta)dA(\zeta), \quad z \in \Omega.$$

Siis funktion f arvo jossain tietyssä pisteessä z saadaan laskemalla sisätulo

$$\langle f, k_z \rangle ,$$

missä $k_z(\zeta) = \overline{K(z, \zeta)}$ ja sisätulo on määritelty asettamalla

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(z)\overline{g(z)}dA(z).$$

Funktiolla K on paljon hyviä ominaisuuksia. Paljastuu, että jos $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on ortonormaali kanta ehdon (40) toteuttavien analyyttisten funktioiden funktioiden avaruudelle $A^2(\Omega)$, niin

$$K(z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}, \quad z, \zeta \in \Omega.$$

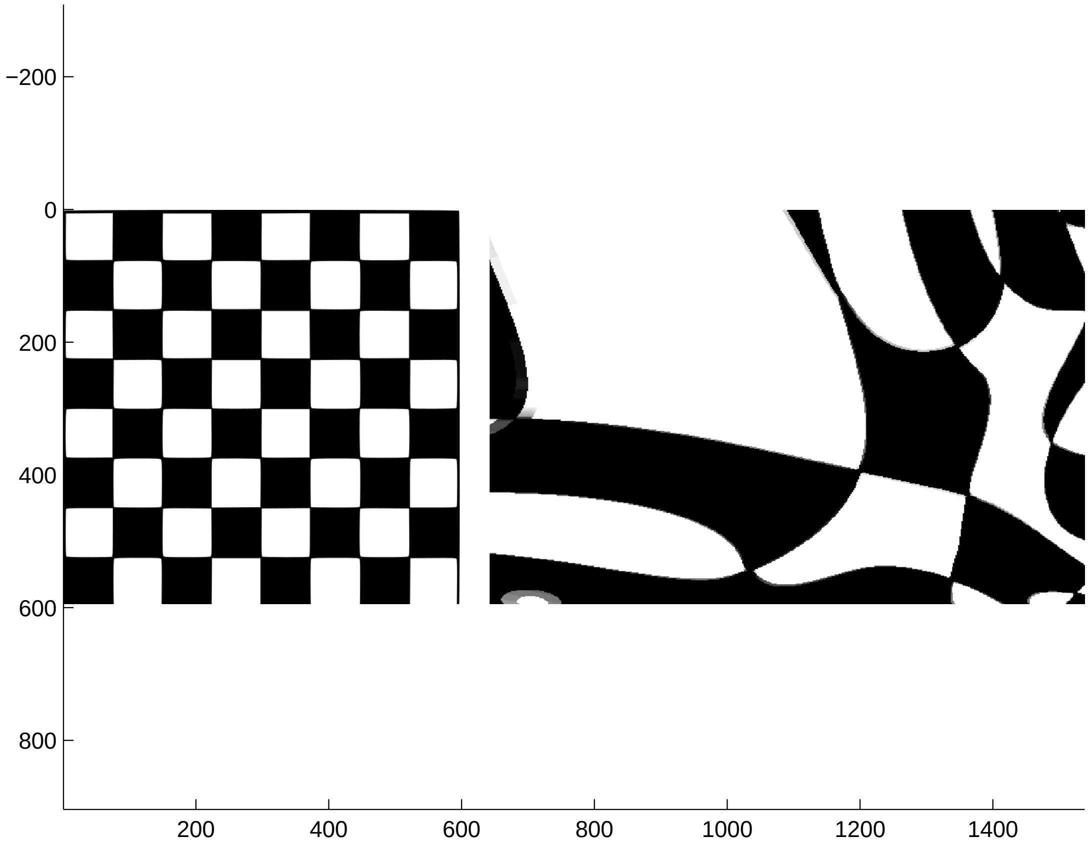
Siis funktio K tiedetään heti, jos löydetään joku ortonormaali kanta $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Toisaalta, jos φ on ns. *normalisoitu Riemannin kuvausfunktio* alueelle Ω pisteessä ζ eli $\varphi : \Omega \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ on analyyttinen bijektio ja $\varphi(\zeta) = 0$ ja $\varphi'(\zeta) > 0$, niin

$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta, \zeta)}} K(z, \zeta), \quad z \in \Omega.$$

Näin ollen funktion K avulla saadaan φ' ja sitten tätä integroimalla saadaan φ.

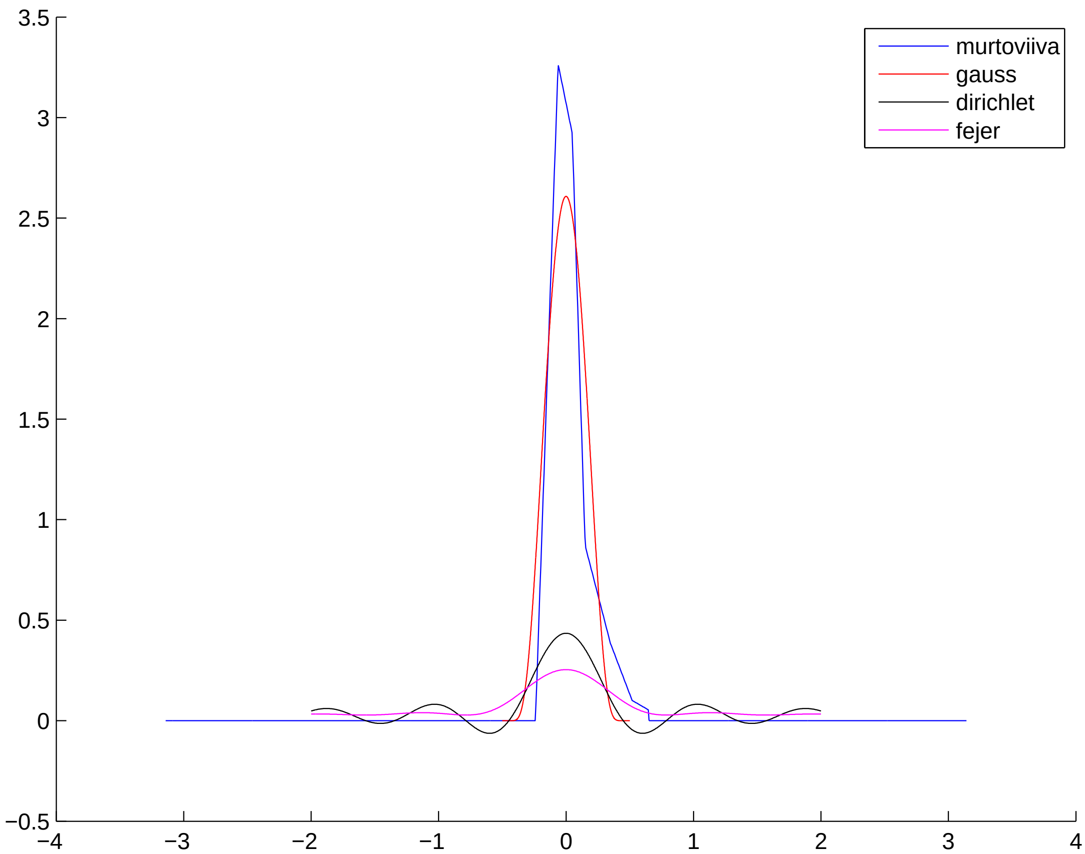
Siis ortonormittamalla monomit sisätulon suhteen, laskemalla vähän ja integroimalla kerran saadaan funktio φ. Funktio φ on kiinnostava sen vuoksi, että se on bijektiivinen



Kuva 4: Shakkilauta ja osa venytetystä shakkilaudasta.

kuvaus alueelta Ω yksikkökiekolle $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ja analyyttisenä funktiona φ säilyttää kulmien suuruudet. Tavallaan φ ”vääntelee ja venyttelee siistillä tavalla” alueesta Ω alueen $\mathbb{D}$.

Aiheeseen liittyviä kuvia on nähtävillä osoitteessa `http://integraali.com/fourier2014/conformal/`. Demojen pitäjä piirsi ”venytetyt” kuvat Matlabilla käyttäen kansion ”functions” Matlab-funktioita. Kuitenkin projekti jäi jostain syystä aikoinaan kesken. Kuva 4 on vajavainen makupala.



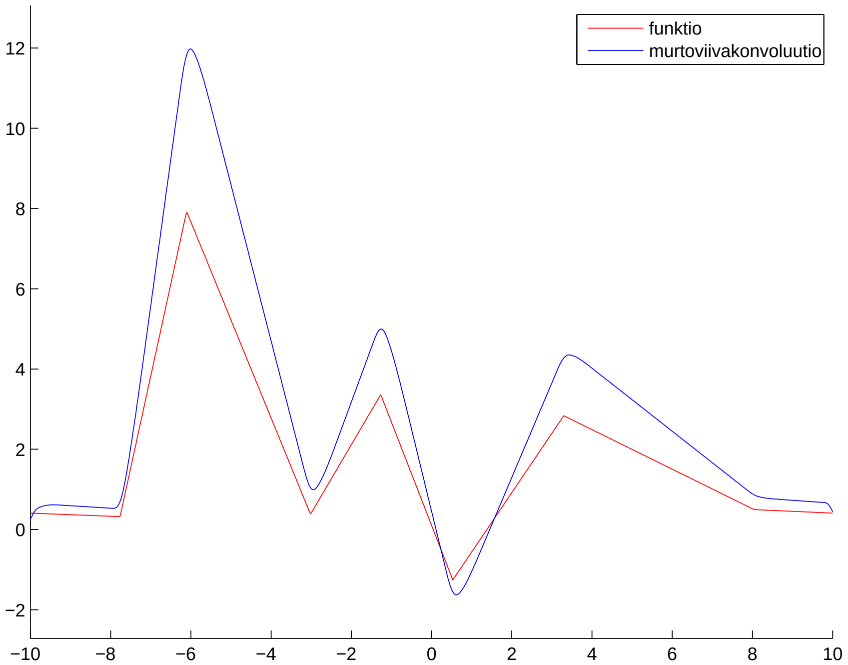
Kuva 5: Muutama ydin.

2.4 Konvoluutioita

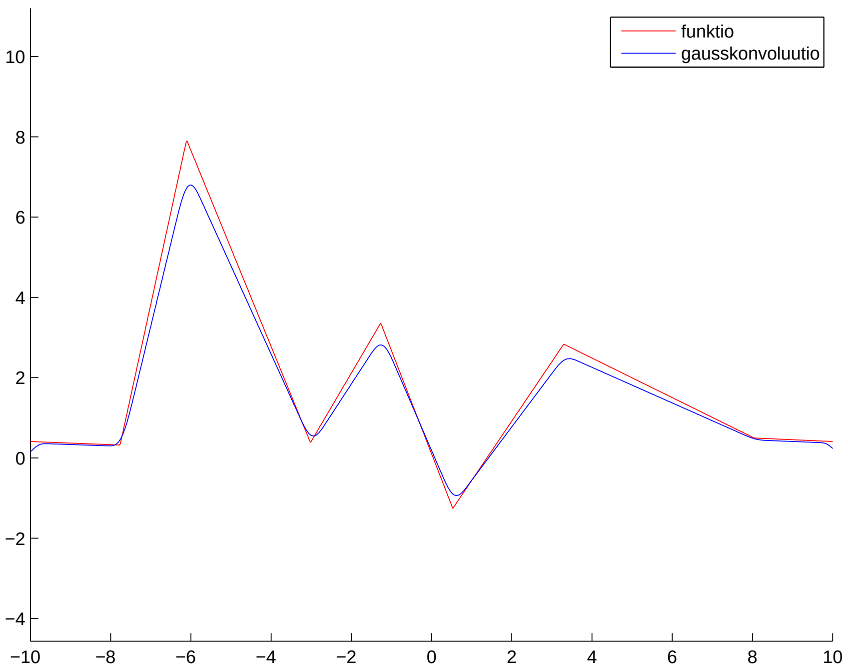
Sivulla `http://integraali.com/fourier2014/konvoluutioita/` on laskuharjoitusten pitäjän tekemiä konvoluutioihin liittyviä Matlab-funktioita.

- Funktio 'murtof.m' piirtää murtoviivafunktion ammuttavasta pistejoukosta.
- Funktio 'konvydin.m' piirtää konvoluutioytimen ammuttavasta pistejoukosta.
- Funktio 'ytimet.m' antaa Gaussin, Dirichlet'n ja Fejerin ytimiä.
- Funktio 'konvo.m' laskee kahden tiettyä tyyppiä olevan funktion konvoluution.

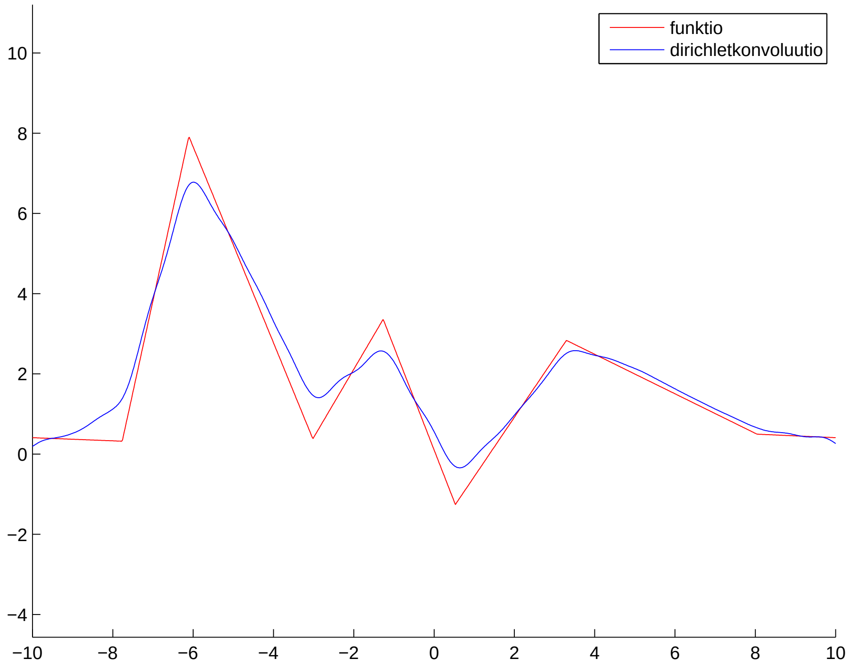
Kuvat 5-9 esittävät muutaman ytimen sekä erään murtoviivafunktion konvoluutioita näiden ytimien kanssa.



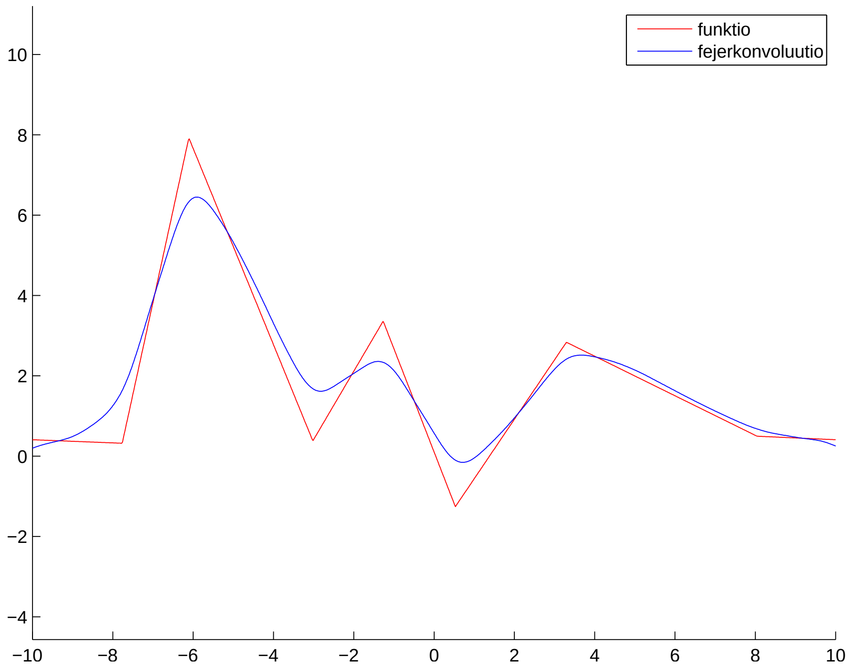
Kuva 6: Konvoluutio murtoviivan kanssa.



Kuva 7: Konvoluutio tyyppiä $y(x) = \exp(-1/(1-x^2))$ olevan Gaussin käyrän kanssa.



Kuva 8: Konvoluutio Dirichlet-ytimen D_7 kanssa.



Kuva 9: Konvoluutio Fejer-ytimen F_7 kanssa.

2.5 Cesàro-operaattorista

Laskuharjoitusten pitäjä on parasta aikaa funktionaalianalyysin kurssilla ja päätti sen vuoksi piristää mieltään lukemalla internetistä lisää Cesàron menetelmästä. Jos $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$ on jono kompleksilukuja, niin asetetaan

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$$

arvoilla $p \in (0, \infty)$. Jos $\|a\|_p < \infty$, niin merkitään $a \in \ell^p$ eli ℓ^p on "itseisesti potenssilla p summautuvien jonojen avaruus". Koska kurssilla, esimerkiksi tehtävässä H4T3, nähtiin, että $\operatorname{Ces}(a)$ on käyttäytyy jossain mielessä jonona paremmin kuin a, niin voi aavistaa, että $\|\operatorname{Ces}(a)\|_p$ olisi joskus jossain mielessä rajoitettu luvulla $\|a\|_p$.

Sivulla
`https://datuan5pdes.files.wordpress.com/2014/08/hardys-inequality.pdf`
osoitetaankin, että jos $p \in (1, \infty)$, niin kompleksiselle lukujonolle b_k

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k\right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p .$$

Kolmioepäyhtälön avulla ja soveltamalla tulosta tapauksessa $b_k = |a_k|$, saadaan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right|^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p .$$

Siis

$$\|\operatorname{Ces}(a)\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right|^p\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} = \frac{p}{p-1}\|a\|_p .$$

Siis

$$\sup_{\|a\|_p \neq 0} \frac{\|\operatorname{Ces}(a)\|_p}{\|a\|_p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Sanotaan, että $\operatorname{Ces} : \ell^p \to \ell^p$ on rajoitettu operaattorimielessä: "kuvan normi on korkeintaan vakio kertaa argumentin normi". Nähdään vielä, että jos a ja b ovat jonoja ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ovat vakioita, niin $\operatorname{Ces}(\alpha a + \beta b) = \alpha \operatorname{Ces}(a) + \beta \operatorname{Ces}(b)$. Siis Ces on lineaarinen.

On nähty, että vaikka sarja hajaantuu, sillä voi olla mielekäs summa, kun summataan lukuja jollain uudella tavalla. Summausmenetelmistä puhutaan esimerkiksi Wikipediassa: `http://en.wikipedia.org/wiki/Divergent_series`.

Joku voi pitää hajaantuvien sarjojen käyttöä outona - Wikipediasta löytyy hauska kasku:

> Borel, then an unknown young man, discovered that his summation method gave the 'right' answer for many classical divergent series. He decided to make a pilgrimage to Stockholm to see Mittag-Leffler, who was the recognized lord of complex analysis. Mittag-Leffler listened politely to what Borel had to say and then, placing his hand upon the complete works by Weierstrass, his teacher, he said in Latin, 'The Master forbids it'.
>
> – Mark Kac, quoted by Reed & Simon (1978, p. 38)

2.6 Episyklejä

Jonon x, joka on n-jaksollinen, diskreetti Fourier-muunnos

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} x(j) e^{-2\pi ijk/n}$$

antaa kertoimet $\widehat{x}$ siten, että

$$x(k) = \sum_{j=0}^{n} \hat{x}(j) e^{2\pi ijk/n}.$$

Siis trigonometriselle polynomille

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \hat{x}(j) e^{ijx}$$

pätee $p(2\pi k/n) = x(k)$.

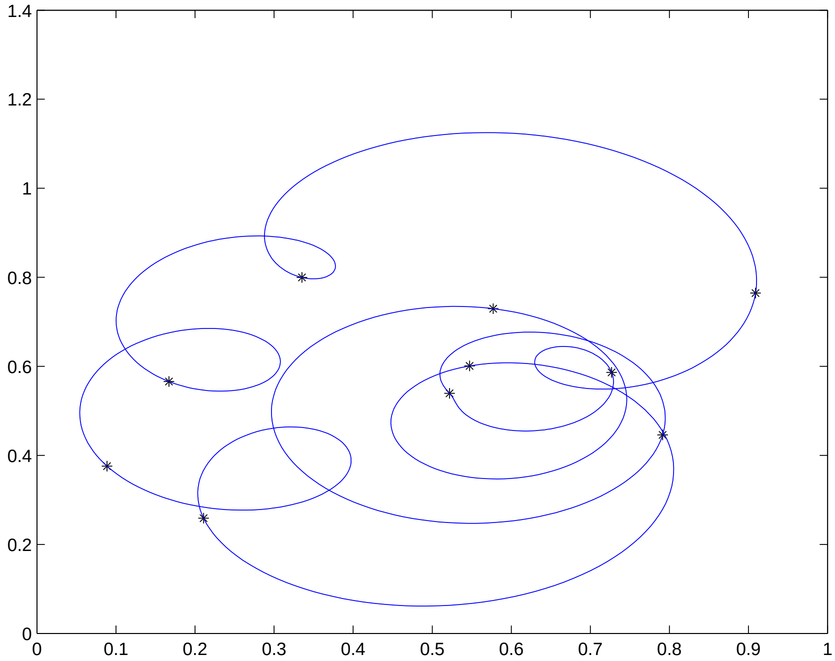
Trigonometrinen polynomi on selvästi jatkuva 2π-jaksollinen funktio ja kun kuvakäyrä $p([0, 2\pi))$ piirretään kokonaisuudessaan, saadaan sileä käyrä, joka kulkee pisteiden $x(k)$ kautta. Matlab-koodi

```
figure
axis([0,1,0,1])
N=10; %number of points
s=linspace(0,N,1000);
g=ginput(N);%shooting the points with a mouse
G=g(:,1)+1i*g(:,2);
plot(G,'k*')
hold on
for n=1:N
E(n,:)= exp(j*2*pi*s*(n-1)/N);
end
h=fft(G); %FFT does the trick
kay=(h'*E)'/N;
plot(kay,'b') %here you can define the color - b stands for blue
```

antaa "ampua"hiirellä 10 pistettä ja sitten piirtää käyrän $p(t)$, $t \in [0, 2\pi)$ näiden pisteiden kautta. Kuvassa 10 on yksi tällainen käyrä. Käyrä näyttää pelkistetyn kukkapiirroksen kukan ääriviivalta ja yksi kuvaava nimi käyrälle voisi olla vaikkapa ”lastentarhakukka” tai ”Marimekko-Matlab-kukka”. Itse asiassa saadut käyrät ovat episyklien yleistyksiä.

Kuvassa 12 näkyvät GeoGebralla piirretty Aurinkokunnan aurinkokeskinen ja maakeskinen malli. Kuvassa on Aurinko, Maa, Mars ja Jupiter, näiden radat, sekä paikkavektorit, kun origo on Maassa.

Vasemmanpuoleisessa aurinkokeskisessä mallissa Aurinko ja planeetat kiertävät ellipsiratoja, jotka ovat lähes ympyröitä. Koska Auringon massa on suuri, Aurinko pysyy lähes paikallaan.



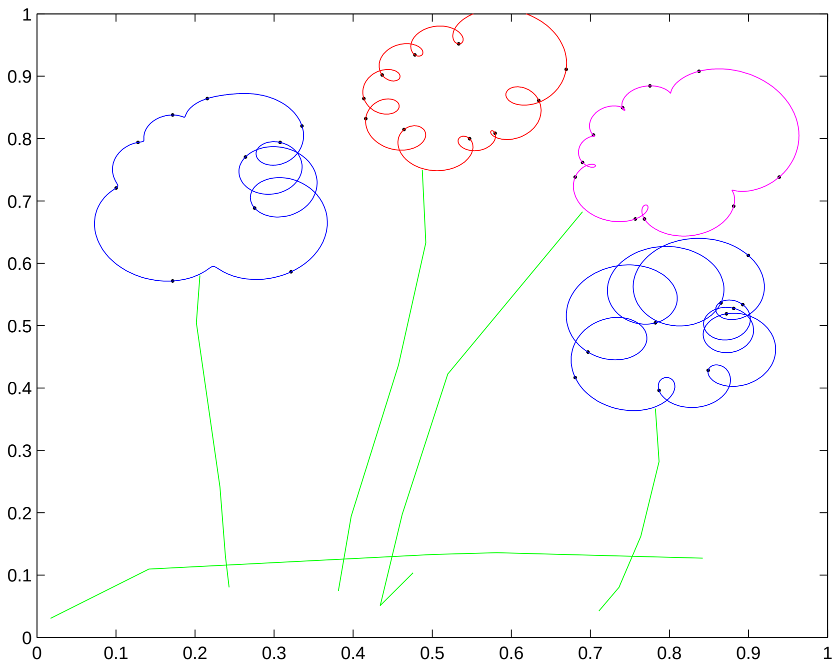
Kuva 10: Kymmenen hiirellä ”ammutun” pisteen kautta kulkeva sileä käyrä.

Oikeanpuoleisessa maakeskisessä mallissa Maa pysyy paikallaan, kun taas Aurinko, Mars ja Jupiter kiertävät sitä. Radat ovat episyklejä tai kurssiin liittyen janan janan $[0, 2\pi)$ osajoukkojen kuvia, jotka on kuvattu kompleksisilla trigonometrisilla polynomeilla.

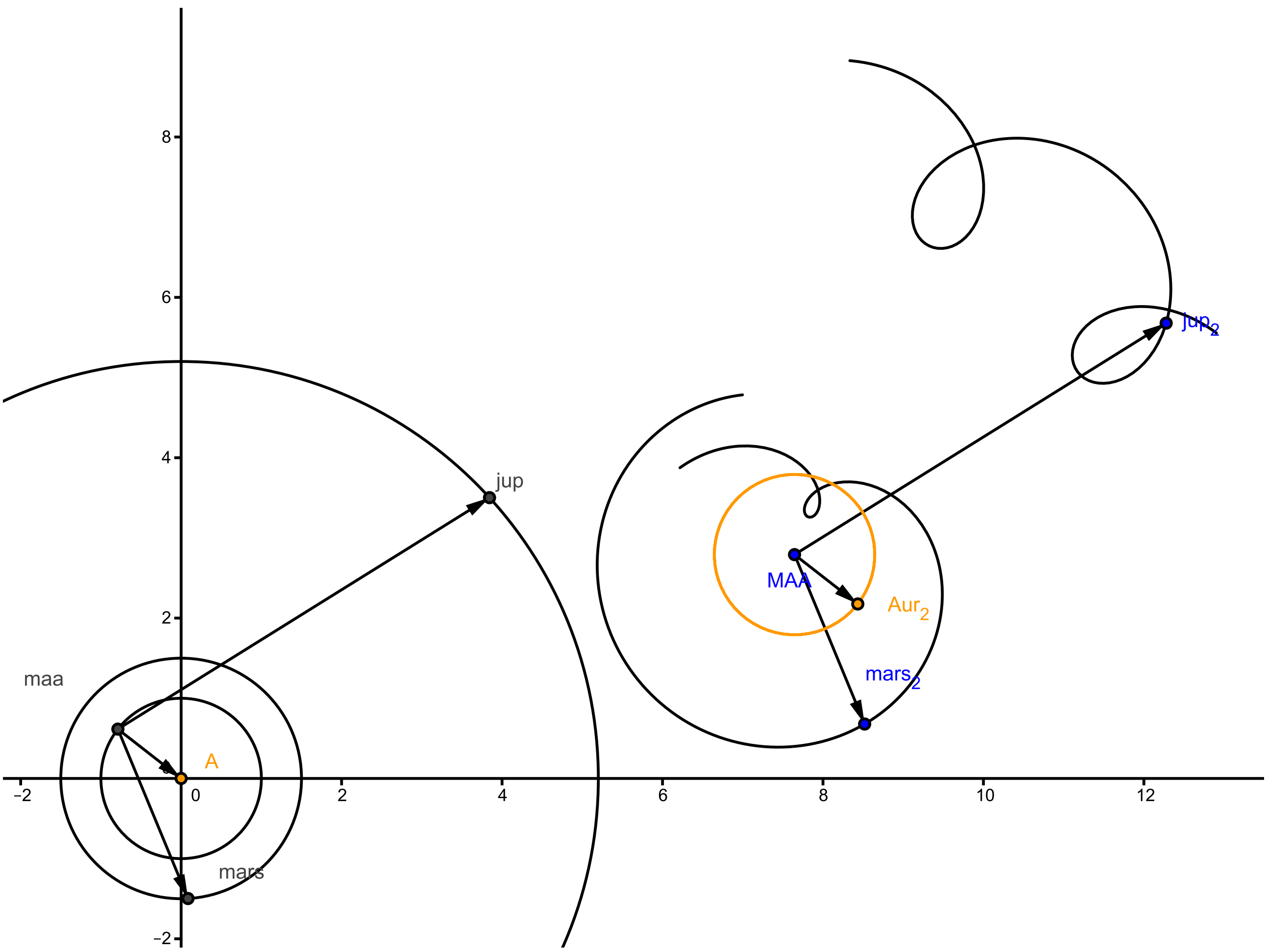
Maakeskisen mallin kannattajilla oli suuria vaikeuksia kertoa, miksi planeetat näyttivät välillä muuttavan liikkeensä suuntaa. Suunnanmuutos on vain näennäinen ja johtuu siitä, että planeetat eivät todellisuudessa kierrä maata.

Wikipediassa sanotaan: ”In the fully developed Aristotelian system, the spherical Earth is at the center of the universe, and all other heavenly bodies are attached to 47–55 transparent concentric spheres which rotate around the Earth. (The number is so high because several spheres are needed for each planet.) ”

Occamin partaveitsen mukaan yksinkertaisin selitys on paras. Wikipedian mukaan: ”Occamin partaveitsi (usein myös Ockhamin partaveitsi, säästäväisyyden periaate) on periaate, jonka mukaan ilmiöitä selittävien tekijöiden määrän tulee olla mahdollisimman vähäinen. Selityksistä tulee siis karsia kaikki ylimääräiset tekijät eli teorioiden tulee olla mahdollisimman yksinkertaisia. Occamin partaveitsen mukaan kilpailevista, yhtä selitysvoimaisista teorioista tulisi valita kaikkein yksinkertaisin.”



Kuva 11: Matlabilla piirrettyjä lastentarhakukkia.



Kuva 12: GeoGebralla piirretty Aurinkokunnan aurinkokeskinen ja maakeskinen malli.