Fourier-analyysin peruskurssi
1. harjoitus 2014

1. Olkoon $\lambda > 0$, ja olkoon $f(x)$ jaksollinen funktio, jonka perusjakso on a. Osoita, että funktio $g(x) = f'(\lambda x)$ on jaksollinen ja määrää sen perusjakso.

2. Olkoon $g(x)$ parillinen funktio. Osoita, että

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} g(x)dx.$$

3. Olkoon $g(x)$ parillinen funktio. Osoita, että $g'(x)$ ja

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt$$

ovat molemmat parittomia funktioita.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio. Osoita, että

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

on parillinen, ja

$$G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

on pariton funktio. Esitä tätä tietoa käyttäen funktiot $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$ ja $q(x) = 1/(1 - x)$ parillisen ja parittoman funktion summana.

5. Olkoon $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osoita, että

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \delta_{mn},$$

missä δ_{mn} on Kroneckerin deltafunktio.

6. Oletetaan, että $f(x)$ on jaksollinen funktio jaksonaan 2π, joka voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \tag{1}$$

missä a_n ja b_n ovat reaalisia vakioita. Määrää vakiot b_n kertomalla (1) puolittain funktiolla $\sin(mx)$ ja integroimalla termeittäin.

7. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = x, \qquad \text{kun } x \in (-\pi, \pi].$$

Piirrä f kuvaaja ja muodosta funktion f Fourier-sarja. Määrää lisäksi ne arvot, joita kohti Fourier-sarja suppenee funktion f epäjatkuvuuskohdissa.