

Fourier-analyysin peruskurssi

2. harjoitus 2014

1. Olkoon f on jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = x \sin(px), \quad \text{kun } x \in (-\pi, \pi],$$

missä p on positiivinen kokonaisluku. Muodosta funktion f Fourier-sarja.

2. Laske

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}$$

käyttäen hyväksi tehtävän 1 Fourier-sarjaa pisteessä $x = 0$ tai $x = \pi$, kun $p = 1$ tai $p = 2$.

3. Muodosta funktion $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$, kosiniterminen Fourier-sarja etsimällä ensin sopiva funktion $f(x)$ parillinen laajennus.
4. Osoita tehtävän 3 avulla, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

5. Osoita, että funktiojoukko

$$\{1, \cos(2x), \cos(4x), \cos(6x), \dots\}$$

on ortogonaalinen välillä $[0, \pi]$ ja muodosta sitä vastaava ortonormaali joukko.

5. Laske funktion $f(x) = \cos x$ yleistetyt Fourier-kertoimet tehtävän 5 ortonormaalin joukon suhteen.
6. Määritä vakiot $\alpha_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ siten, että polynomit

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \alpha_0 \\ g_2(x) &= \beta_1 x + \beta_0 \\ g_3(x) &= \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 \end{aligned}$$

muodostavat ortonormaalin joukon välillä $[-1, 1]$.