Fourier-analyysin peruskurssi
3. harjoitus 2014

1. Funktion $f(x) = \sin x$ kosiniterminen Fourier-sarja välillä $[0, \pi]$ on

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi) + 1}{1 - n^2} \cos(nx).$$

Soveltamalla tätä tietoa yhdessä Parsevalin kaavan kanssa osoita, että

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

2. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{kun } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Etsi muotoa

$$F(x) = A + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$$

oleva trigonometrinen polynomi siten, että

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F(x))^2 \, dx$$

on mahdollisimman pieni.

3. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että $f(x) = e^{2x}$, kun $-\pi < x \le \pi$. Muodosta funktion f kompleksiterminen Fourier-sarja.

4. Osoita, että

$$2 \sum_{n=1}^{m} \cos[(2n-1)\theta] = \frac{\sin(2m\theta)}{\sin \theta},$$

kun $\theta \ne 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

Vihje: Kirjoita yhtälön vasen puoli ensin muodossa

$$e^{-i\theta} \sum_{n=1}^{m} (e^{i2\theta})^n + e^{i\theta} \sum_{n=1}^{m} (e^{-i2\theta})^n$$

ja käytä sitten yhtälöä

$$\sum_{n=1}^{m} z^n = \frac{z(1 - z^m)}{1 - z}, \qquad z \ne 1.$$

5. Osoita, että Dirichlet ytimille pätee yhtälö

$$2 \sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

kun $x \ne 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$.

6. Olkoot $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että $f, g, h \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että

$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$