Fourier-analyysin peruskurssi
4. harjoitus 2014

1. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että konvoluution $f * g$ kompleksitermisille Fourier-kertoimille c_n pätee

$$c_n = a_n b_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

missä kertoimet a_n ovat funktion f, ja b_n funktion g, kompleksitermiset Fourier-kertoimet.

Vihje: Voit vaihtaa kertoimien c_n lausekkeessa integroimisjärjestystä Fubinin lauseen avulla.

2. Olkoon $f(x) = x$ ja $g(x) = \sin x$. Laske konvoluutio $(f * g)(x)$.

3. Olkoon $s_n = (-1)^n(2n+1)$, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$ Osoita, että

$$t_N = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} s_j$$

ei suppene kohti raja-arvoa, mutta

$$\frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} t_j$$

suppenee. Toisin sanoen, Cesàron menettelytavan soveltaminen kerran ei tuota suppenevaa jonoa, mutta toinen sovelluskerta kyllä.

4. Anna esimerkki jonosta, jossa Cesàron menettelytavan soveltaminen kaksi kertaa ei tuota suppenevaa jonoa, mutta kolmas sovelluskerta tuottaa.

5. Osoita, että jos $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, niin

$$\frac{1}{\tan(x/2)} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sin(jx) \qquad \text{Cesàron mielessä.}$$

6. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva ja jaksollinen funktio, jaksonaan 2π. Jos funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä $x_0 \in [-\pi, \pi]$, eli raja-arvo

$$a = \lim_{N \to \infty} S_N(x_0)$$

on olemassa, niin näytä että tällöin välttämättä $a = f(x_0)$.