Fourier-analyysin peruskurssi
5. harjoitus 2014

1. Jatkuvan, mutta ei missään derivoituvan funktion olemassaolo on ääriesimerkki siitä, että funktion toistuva derivointi voi johtaa hyvin poikkeukselliseen (ja huonoon) funktiokäyttäytymiseen. Olkoon $\varepsilon > 0$, $K > 0$ ja $n \in \mathbb{N}$ mielivaltaisesti valittuja vakioita. Määrää vakiot A, M ja θ siten, että funktiolle

$$f(x) = A\sin(Mx + \theta)$$

pätee $|f^{(k)}(x)| \leq \varepsilon$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $0 \leq k < n$, mutta $|f^{(n)}(0)| \geq K$.

2. Kokonaislukujonon $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sanotaan olevan lakunaarinen, jos

$$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots$$

ja jos on olemassa $q > 1$ ja $N \geq 1$ siten, että $a_{n+1} \geq qa_n$ kaikille $n \geq N$. (Tämä on eri asia kuin luentorungossa esitetty lakunaarinen Fourier-sarja, vaikkakin asiayhteys on olemassa.) Mitkä seuraavista jonoista ovat lakunaarisia? Perustele vastauksesi.

a) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{2^k\}_{k\in\mathbb{N}}$

b) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{(k!)^2\}_{k\in\mathbb{N}}$

c) $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{k(k+1)(k+2)\}_{k\in\mathbb{N}}$

Tehtävät 3–5 voi ratkaista itsenäisesti olettamalla edellisen tehtävän tunnetuksi.

3. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$ ja olkoon $b \in [0,1)$. Osoita, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0,b)\}}{N} = b.$$

Vihje:

$$\#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in [0,b)\} = \#\{1 \leq n \leq N : \eta_n \in (0,b)\} + \#\{1 \leq n \leq N : \eta_n = 0\}.$$

4. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$ ja olkoon $0 \leq a < b \leq 1$. Osoita käyttämällä apuna tehtävää 3, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{[a,b)}(\eta_n) = \int_0^1 \chi_{[a,b)}(x)dx.$$

5. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$ ja olkoon $0 \leq a_k < b_k \leq 1$ kaikilla $k = 1, \ldots, K$. Olkoon

$$g(x) = \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \chi_{[a_k,b_k)}(x), \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Osoita käyttämällä apuna tehtävää 4, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} g(\eta_n) = \int_0^1 g(x)dx.$$