Fourier-analyysin peruskurssi
6. harjoitus 2014

1. Osoita, että yhtälöllä

$$y'' + 0,02y' + 25y = \frac{4}{\pi n^2}\cos(nt)$$

on yksityisratkaisu

$$y_n = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt),$$

missä

$$A_n = \frac{4(25-n^2)}{\pi n^2[(25-n^2)^2 + (0,02n)^2]}$$

ja

$$B_n = \frac{0,08}{\pi n[(25-n^2)^2 + (0,02n)^2]}.$$

2. Etsi yksityisratkaisu yhtälölle

$$y'' + cy' + y = K\sin t,$$

missä $c > 0$ ja $K \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.

3. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden vakiokertoimista päästään usein eroon sopivalla muuttujanvaihdolla. Etsi sopiva vakio A siten, että sijoitus $t = A\tau$ lämpöyhtälöön

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sieventään sen muotoon

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Muunna vastaavalla tavalla aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

muotoon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4. Etsi muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ oleva ratkaisu lämpöyhtälölle

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

kun $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja

$$u(x,0) = 1 + 3\cos(2x) + 2\cos(4x), \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

5. Etsi muotoa $u(x,t) = X(x)T(t)$ oleva ratkaisu aaltoyhtälölle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

kun $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$ ja

$$u(x,0) = x(\pi - x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

6. Osoita Fourier-integraaliesitystä käyttämällä, että

$$\int_0^\infty \frac{\cos(wx) + w\sin(wx)}{1+w^2}\,dw = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ \pi/2, & \text{kun } x = 0 \\ \pi e^{-x}, & \text{kun } x > 0. \end{cases}$$