Fourier-analyysin peruskurssi
8. harjoitus 2014

1. Etsi funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{kun } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

2. Olkoon $\mathcal{F}(f(t))$ funktion $f(t)$ Fourier-muunnos ja $a \in \mathbb{R}$ vakio. Osoita, että

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-iwa}\mathcal{F}(f(t)).$$

3. Etsi Lauseen 19.9 avulla

$$\mathcal{F}\left(xe^{-x^2}\right).$$

4. Olkoon $g \in L^1(-\infty, \infty)$. Käytä Fourier-muunnosta differentiaaliyhtälön

$$u'' - u + 2g(x) = 0$$

ratkaisun $u(x) = g * e^{-|x|}$ löytämiseksi. Mitä oletuksia ratkaisun tulee toteuttaa, jotta menetelmää voi soveltaa?

5. Osoita, että

$$f * g = g * f,$$

missä f ja g sellaisia funktiota, että konvoluutiot $f*g$ ja $g*f$ ovat hyvin määriteltyjä.

6. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellaisia funktiota, että $(f * g) \cdot h$ ja $f * (g \cdot h)$ ovat hyvin määriteltyjä. Tarkastele päteekö yhtälö

$$(f * g) \cdot h = f * (g \cdot h),$$

toisin sanoen, onko konvoluutio assosiatiivinen tulon kanssa?