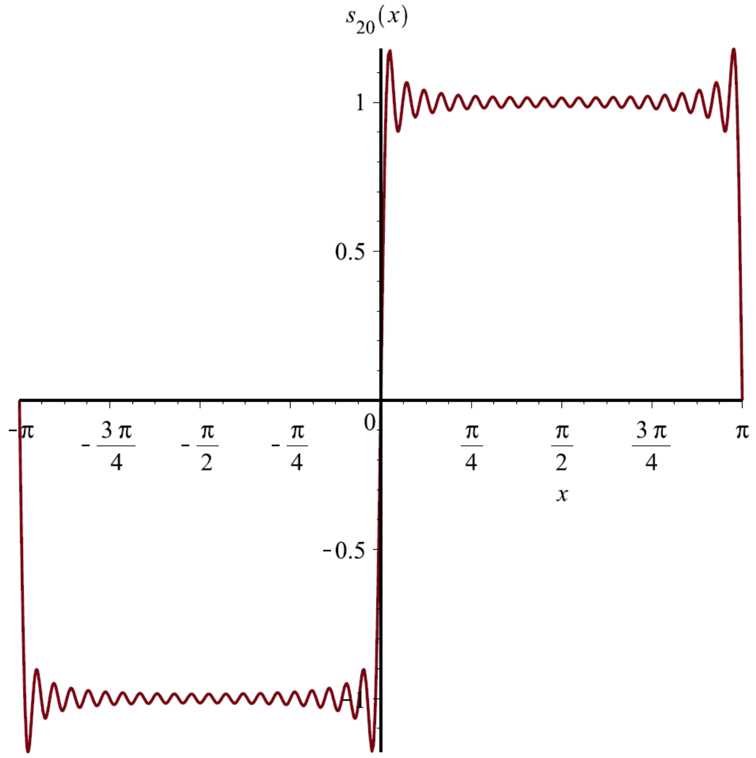
Fourier-analyysin peruskurssi (3317454)

Risto Korhonen



Sisältö

1. Johdanto

Olkoon $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tai $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann integroituva. Fourier-analyysin perusajatuksena on esittää funktio $f(x)$ Fourier- eli trigonometrisena sarjana muodossa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \tag{1}$$

missä

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Monet 1700-luvun matematiikot, mm. Bernoulli, Euler ja Lagrange tiesivät "kokeellisesti", että muotoa (1) oleva esitys voidaan löytää joillekin yksinkertaisille funktioille. Fourier väitti (1807), että esitys (1) on aina olemassa, ja näytti kuinka lineaarisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä voi ratkaista tämän sarjakehitelmän avulla.

Sarjakehitelmällä (1) on monia etuja verrattuna esimerkiksi Taylorin sarjaan.

- Fourier-sarja on yleispätevä: esitys (1) toimii oikein tulkittuna myös esim. epäjatkuville funktioille.
- Toimii hyvin fysikaalisissa malleissa: eksponenttifunktiot e^{inx} kuvaavat jaksollista aaltoliikettä, värähtelyjä, jne.
- Differentiaalioperaatoreiden toiminta:

$$\frac{d}{dx} e^{inx} = ine^{inx},$$

  joten e^{inx} on operaattorin ∂_x ominaisvektori.

Tarkasteltaessa sarjaa (1) nousee mieleen kysymys siitä, että kuinka löydetään kertoimet c_n? Tätä tarkoitusta varten oletetaan, että f on trigonometrinen polynomi

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n (\cos(nx) + i \sin(nx)).$$

Kertomalla tämä yhtälö puolittain termillä e^{-ikx} ja integroimalla saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)x} dx = c_k,$$

joten

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx =: \hat{f}(k).$$

Yleiselle funktiolle f etsitään vastaavaa esitystä

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}. \tag{2}$$

Kysymyksiä:

- Milloin sarja (2) suppenee?
- Missä mielessä suppeneminen tapahtuu?
- Määrääkö Fourier-sarja (2) funktion $f(x)$ yksikäsitteisesti?
- Miten kertoimet c_n kuvaavat funktion $f(x)$ ominaisuuksia?

Edelliset ja vastaavat kysymykset ovat olleet keskeisiä modernin analyysin kehitykselle. Esimerkiksi Lebesgue-integraali kehitettiin alun perin Fourier-analyysin tarpeisiin.

Kurssin ensimmäisessä osassa käsitellään Fourier-sarjojen perusominaisuuksia ja toisessa osassa niiden sovelluksia eri kysymyksiin. Kurssin kolmas osa keskittyy jatkuvaan Fourier-muunnokseen

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

ja sen yhteyksiin esimerkiksi differentiaaliyhtälöihin.

Esimerkki 1.1. *Fourier-sarjojen peruskysymykset nousevat esiin jo tavallisissa fysiikan ongelmissa. Tarkastellaan värähtelevää kieltä, jonka pituus on $L > 0$. Olkoon $u = u(x,t)$ kielen poikkeama tasapainotilasta ($u \equiv 0$) hetkellä t pisteessä $x \in [0, L]$. Kun oletetaan, että kieli on äärettömän ohut, venymätön (ts. poikkeamat ovat niin pieniä, ettei venymistä tarvitse huomioida) ja homogeeninen (rakenne on sama kaikkialla), voidaan osoittaa, että*

$$\partial_t^2 u(x,t) = c^2 \partial_x^2 u(x,t), \tag{3}$$

missä c on jousesta riippuva vakio. Yhtälö (3) on ns. aaltoyhtälö. Oletetaan, että

- *Kielen päätepisteet ovat kiinnitetty:*

  $$u(0,t) = 0 = u(L,t)$$

  kaikilla $t \geq 0$.

- *Alkuarvot hetkellä $t = 0$:*
  - *alkupoikkeama $u(x,0) = f(x)$ ja*
  - *alkunopeus $\partial_t u(x,0) = g(x)$,*

  missä $f(x)$ ja $g(x)$ ovat annettuja funktioita.

Tehtävä: Määrää $u(x,t)$ alkuarvojen f ja g avulla.

Ratkaisu: Havaitaan, että funktiot

$$u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[A_n \cos\left(c\frac{n\pi t}{L}\right) + B_n \sin\left(c\frac{n\pi t}{L}\right)\right]$$

toteuttavat yhtälön (3) *ja lisäksi pätee*

$$u_n(0,t) = 0 = u_n(L,t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. *Etsitään seuraavaksi* u*:ta ratkaisujen* u_n *summana,*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Kuinka tällöin valitaan tuntemattomat kertoimet A_n *ja* B_n*? Alkuhetkellä* $t = 0$ *pätee*

$$u_n(x,0) = A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

mistä seuraa

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right).$$

Mistä saadaan selville kertoimet A_n*?* *<u>Formaalisti</u> laskien*

$$\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = A_k \frac{L}{2}.$$

Valitaan siis

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx. \tag{4}$$

Vastaavalla laskulla

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \frac{c\pi}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[-nA_n \sin\left(c\frac{n\pi t}{L}\right) + nB_n \cos\left(c\frac{n\pi t}{L}\right)\right],$$

mistä jälleen formaalilla laskulla saadaan

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \partial_t u_n(x,0) = \frac{c\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) = g(x)$$

ja, päätellen kuten edellä, valitaan

$$B_n \frac{2}{c\pi n} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) g(x) dx. \tag{5}$$

Näin on saatu idea aaltoyhtälön (3) *ratkaisemiseksi: Kun* f *ja* g *on annettu, lasketaan* A_n *ja* B_n *kaavoista* (4) *ja* (5)*, ja otetaan summa*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[A_n \cos\left(c\frac{n\pi t}{L}\right) + \sin\left(c\frac{n\pi t}{L}\right)\right].$$

<u>Kysymys:</u> Saadaanko näin aaltoyhtälön (3) *ratkaisu?*

Ongelmia:

1. *Millaisilla f ja g kertoimet A_n ja B_n ovat olemassa?*
2. *Mistä tiedetään, että sarjat*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

suppenevat? Tämä riippuu kertoimista A_n ja B_n, ja siis funktioista f ja g, mutta miten?

3. *Missä mielessä sarjat (jos suppenevat) esittävät funktioita f ja g?*
4. *Vaikka yllä olevat sarjat olisivatkin hyvin määriteltyjä ja niiden summat oikeat funktiot, niin voidaanko sarjaa $\sum_n u_n(x,t)$ derivoida kahdesti termeittäin? Jos voidaan, niin milloin? Derivointi kasvattaa sarjojen kertoimia ($A_n \to nA_n$), joten suppeneminen heikkenee.*

Osa I

Fourier-sarjat

2. Jaksolliset funktiot

Määritelmä 2.1. *Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jaksollinen, jos on olemassa $a > 0$ siten, että*

$$f(x + a) = f(x) \tag{6}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin a on funktion f jakso. Pienin luku $a > 0$ siten, että funktiolla f on jaksona a, on funktion f perusjakso.

Huomioita:

- Vakiofunktiolla $f(x) \equiv c$ ($c \in \mathbb{R}$) ei ole perusjaksoa.
- Funktion $\sin x$ perusjakso on 2π ja funktion $\cos(2\pi x/a)$ perusjakso on a. Esimerkiksi funktiot x ja x^2 eivät ole jaksollisia.
- Jos f on määritelty välillä $(\alpha, \alpha+a]$, niin f voidaan laajentaa jaksolliseksi funktioksi koko reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ "kopioimalla" f kaikille väleille

  $$(\alpha + ma, \alpha + (m + 1)a],$$

  jossa m käy läpi kaikki luvut joukossa $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Täsmällisesti ottaen funktion f jaksollinen laajennus F määritellään seuraavasti: Olkoon $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen, niin on olemassa yksikäsitteinen luku $m \in \mathbb{Z}$ siten, että

$$x - ma \in (\alpha, \alpha + a].$$

Asettamalla

$$F(x) := f(x - ma),$$

ja käymällä läpi kaikki reaaliluvut $x \in \mathbb{R}$, saadaan muodostettua jaksollinen funktio F, jonka jaksona on a.

Jaksollisten funktioiden ominaisuuksia:

Jos f ja g ovat jaksollisia funktioita, jaksonaan a, niin

1. f ja g ovat jaksollisia jaksonaan na kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
2. $h = \alpha f + \beta g$ on jaksollinen, jaksonaan a, kaikilla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. fg on jaksollinen jaksonaan a.
4. Olkoon $\lambda > 0$. Tällöin $f(\lambda x)$ on jaksollinen jaksonaan a/λ.

5. Jos f on integroituva välillä $[0, a]$, niin

$$\int_0^a f(x)dx = \int_\alpha^{\alpha+a} f(x)dx$$

kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.

Reaaliarvoinen trigonometrinen polynomi on muotoa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

missä $L > 0$ ja $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Tämän funktion jakso on $2L$. Eräs Fourier-sarjojen teorian tärkeistä kysymyksistä on se kuinka annettua jaksollista funktiota voidaan approksimoida trigonometrisillä polynomeilla.

3. Parilliset ja parittomat funktiot

Määritelmä 3.1. *Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pariton, jos*

$$f(x) = -f(-x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkiksi $\sin(\lambda x)$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$, ja x^{2n+1}, missä $n \in \mathbb{N}$, ovat parittomia funktioita.

Määritelmä 3.2. *Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on parillinen, jos*

$$f(x) = f(-x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkiksi $\cos(\lambda x)$, missä $\lambda \in \mathbb{R}$, ja x^{2n}, missä $n \in \mathbb{N}$, ovat parillisia funktioita.

Parillisten ja parittomien funktioiden ominaisuuksia:

1. Jos f on pariton, niin $f(0) = 0$.
2. Jos f on pariton, niin
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$
kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Jos g on parillinen, niin
$$\int_{-\alpha}^{\alpha} g(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} g(x)dx$$
kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Jos funktiot f ja $\tilde{f}$ ovat parittomia ja g ja $\tilde{g}$ parillisia, niin fg on pariton, $f\tilde{f}$ parillinen ja $g\tilde{g}$ parillinen funktio.

4. Fourier-sarja 2π-jaksoisille funktioille

Olkoon f jaksollinen funktio, jonka jaksona on 2π. Tavoitteena on esittää f muodossa

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \tag{7}$$

missä a_n ja b_n ovat reaalisia vakioita. Huomaa, että $\sin(nx)$ ja $\cos(nx)$ ovat jaksollisia funktiota jaksonaan 2π kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Pyrimme vastaamaan seuraaviin kysymyksiin:

Kysymys 1: Jos oletetaan, että yhtälö (7) on voimassa, niin voidaanko vakiot a_n ja b_n esittää funktion f avulla?

Kysymys 2: Milloin (jos milloinkaan) näillä vakioiden a_n ja b_n arvoilla yhtälö (7) on voimassa?

Tarkastellaan ensin kysymystä 1. Oletetaan, että (7) on voimassa, ja että se voidaan integroida termeittäin. Tällöin

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx\right),$$

josta seuraa

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{8}$$

Siis a_0 on tunnettu. Kertoimien a_n ja b_n käsittelyä varten tarvitaan seuraavaa aputulosta.

Lemma 4.1. *Olkoon $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tällöin*

(a)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0,$$

(b)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \pi\delta_{nm},$$

(c)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \pi\delta_{nm},$$

missä δ_{nm} on Kroneckerin deltafunktio

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \neq m \\ 1, & \text{kun } n = m. \end{cases}$$

Etsitään nyt vakiot a_n ja b_n olettamalla, että (7) on tosi. Kerrotaan yhtälö (7) puolittain funktiolla $\cos(mx)$ ja integroidaan termeittäin, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx &= \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx.\end{aligned}$$

Soveltamalla Lemmaa 4.1 saadaan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \sum_{n=1} a_n \pi \delta_{nm} = \pi a_m,$$

joten

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx, \tag{9}$$

kun $m \neq 0$. Itse asiassa aiemmin todettiin, että kaava (9) pätee myös tapauksessa $m = 0$, ks. (8). Tämän takia yhtälön (7) vakiotermi kirjoitettu muodossa $a_0/2$.

Kertomalla yhtälö (7) puolittain funktiolla $\sin(mx)$ ja integroimalla termeittäin, saadaan vastaavasti

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx. \tag{10}$$

Määritelmä 4.2. *Olkoon f sellainen funktio, että*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

ovat olemassa kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

ja tätä sarjaa kutsutaan funktion f <u>Fourier-sarjaksi</u> riippumatta siitä suppeneeko se kohti funktiota f vai ei. Vakioita a_n ja b_n kutsutaan funktion f <u>Fourier-kertoimiksi</u>.

Esimerkki 4.3. *Olkoon f jaksollinen funktio, jonka jaksona on 2π, ja jolle pätee*

$$f(x) = |x|, \quad \text{kun } x \in (-\pi, \pi].$$

Etsi funktion f Fourier-sarja.

Tarkastellaan seuraavaksi kysymystä 2 seuraavan esimerkin valossa.

Esimerkki 4.4. *Olkoon f jaksollinen funktio, jonka jaksona on 2π, ja jolle pätee*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ -1, & \text{kun } -\pi < x \leq 0. \end{cases}$$

Funktion f Fourier-sarja on

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}.$$

Kysymys 2 kuuluu, että milloin

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))?$$

Funktion $f(x)$ Fourier-sarja voidaan kirjoittaa raja-arvona

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x),$$

missä

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}.$$

Kysymys on siis suppeneeko $s_n(x)$ kaikilla x? Jos suppenee, niin onko raja-arvo $f(x)$?

Konvergenssista:

Edellisessä esimerkissä sarjan osasummat vaikuttavat todellakin suppenevan kohti funktiota $f(x)$. Epäjatkuvuuskohdissa ne suppenevat kohti nollaa. Vastaava tulos pätee laajalle funktiojoukolle. Tämän tuloksen esittämistä varten tarvitaan yksipuoleisen raja-arvon käsitettä.

Funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $c \in \mathbb{R}$ on

$$f(c_+) = \lim_{h\to 0+} f(c+h),$$

jos tämä raja-arvo on olemassa. Vastaavasti funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä $c \in \mathbb{R}$ on

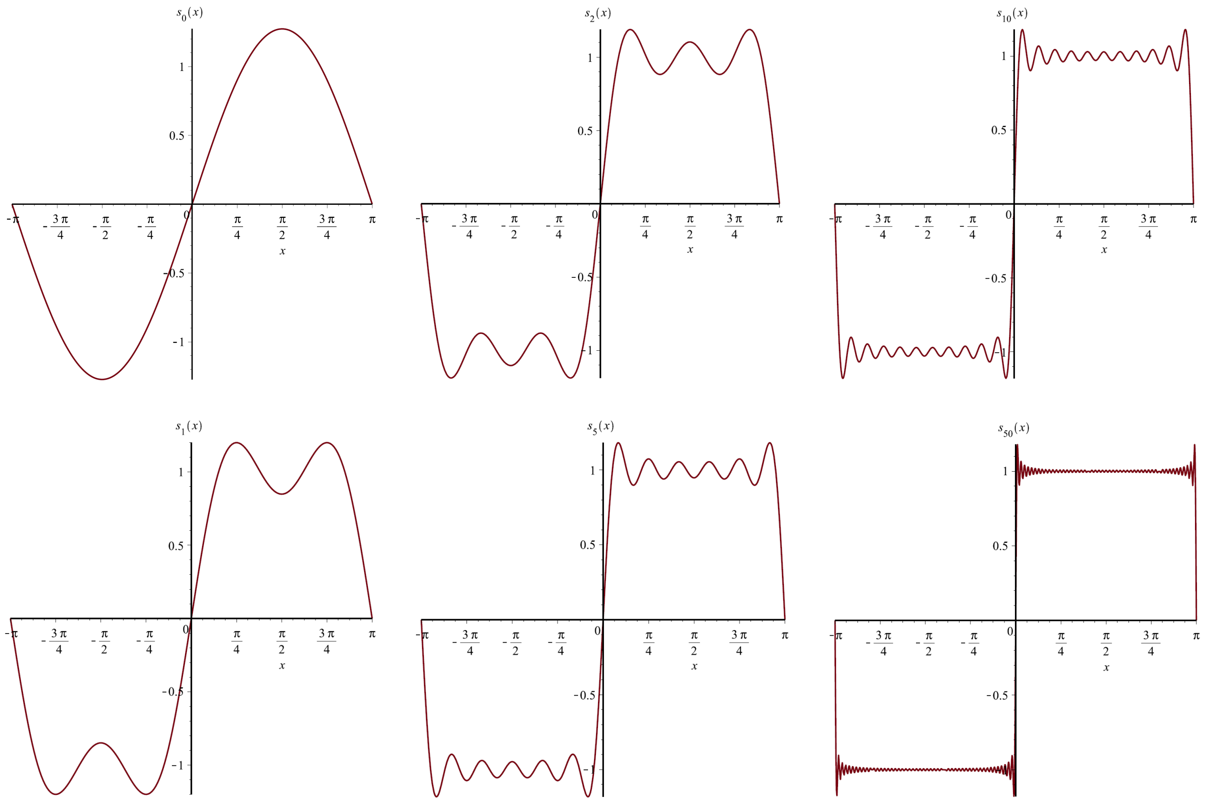
$$f(c_-) = \lim_{h\to 0+} f(c-h),$$

jos se on olemassa. Olemassaolon toteaminen on tärkeää, koska esimerkiksi $f(x) = \sin(1/x)$ on funktio, jolla ei ole kumpaakaan edellä mainituista raja-arvoista.

Määritelmä 4.5. *Funktio f on paloittain jatkuva välillä $I = (a, b)$, jos*

(i) väli I voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin $I_1, \ldots, I_n$ siten, että f on jatkuva jokaisen osavälin jokaisessa sisäpisteessä, ja

(ii) funktiolla f on osavälien $I_1, \ldots, I_n$ alku- ja loppupisteissä vastaavasti oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot.



Kuva 1: Sarjan osasummia $s_n(x)$ esimerkissä 4.4.

Toisin sanoen funktio on paloittain jatkuva, jos sillä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, joissa kaikissa funktiolla on sekä oikean-, että vasemmanpuoleiset äärelliset raja-arvot.

Lause 4.6 (Konvergenssilause). *Olkoon f funktio, joka toteuttaa Dirichlet's ehdot:*

(a) $f(x)$ on määritelty välillä $(-\pi, \pi)$ paitsi mahdollisesti äärellisen monessa pisteessä $x \in (-\pi, \pi)$.

(b) $f(x)$ on jaksollinen funktio jaksonaan 2π.

(c) $f(x)$ ja $f'(x)$ ovat paloittain jatkuvia välillä $(-\pi, \pi)$.

Tällöin funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa

$$\frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right), \tag{11}$$

toisin sanoen

$$\frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right). \tag{12}$$

Huomioita:

- Jos funktio f on jatkuva pisteessä x, niin

$$f(x_+) = f(x_-) = f(x),$$

joten tällöin Fourier-sarja suppenee kohti arvoa $f(x)$.

- Ehdot (a), (b) ja (c) ovat riittäviä, mutta eivät välttämättömiä Fourier-sarjan suppenemiselle.

- Pelkästä funktion f jatkuvuudesta ei vielä seuraa Fourier-sarjan suppeneminen.

- Jos annettu funktio on jatkuva välillä, jonka pituus on 2π, niin funktion jaksollisen laajennuksen Fourier-sarja voidaan löytää määritelmän 4.2 avulla. Yhtälö (12) on tällöin voimassa alkuperäisen välin sisäpisteissä Lauseen 4.6 nojalla olettaen, että myös funktion derivaatta on paloittain jatkuva välillä $(-\pi, \pi)$. Välin päätepisteissä tulee olla tarkkana, koska niissä joudutaan ajaudutaan helposti epäjatkuvuuskohtiin, jolloin Fourier-sarja suppenee kohti arvoa (11).

Olettamalla, että funktio f käyttäytyy vielä hieman paremmin kuin konvegenssilauseessa, saadaan Fourier-sarja suppenemaan tasaisesti.

Lause 4.7. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolla on jaksona 2π. Tällöin funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f.*

5. Fourier-sarja mielivaltaisen jakson tapauksessa

Olkoon $L > 0$. Tarkastellaan jaksollista funktiota f, jonka jakso on $2L$. Tavoitteena on esittää funktio f sarjana, jossa esiintyvät termit

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{ja} \quad \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Tätä varten tehdään muuttujanvaihto

$$X = \frac{\pi x}{L}$$

ja määritellään

$$g(X) := f(x) = f\left(\frac{LX}{\pi}\right),$$

jolloin

$$g(X + 2\pi) = f\left(\frac{L(X + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{LX}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{LX}{\pi}\right) = g(X).$$

Siis g on jaksollinen funktio, jonka jakso on 2π, joten luvun 4 tuloksia voidaan soveltaa sen tarkasteluun. Päädytään seuraavaan määritelmään $2L$-jaksoisen funktion Fourier-sarjaksi.

Määritelmä 5.1. *Olkoon f sellainen funktio, että*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

ja

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

ovat olemassa kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

ja tätä sarjaa kutsutaan funktion f Fourier-sarjaksi riippumatta siitä suppeneeko se kohti funktiota f vai ei. Vakioita a_n ja b_n kutsutaan funktion f Fourier-kertoimiksi.

Sijoittamalla funktio

$$g(X) = f(x) = f\left(\frac{LX}{\pi}\right) \tag{13}$$

Lauseeseen 4.6 saadaan konvergenssilause mielivaltaisen jakson tapauksessa.

Lause 5.2 (Konvergenssilause). *Olkoon f funktio, joka toteuttaa Dirichlet's ehdot:*

(a) *$f(x)$ on määritelty välillä $(-L, L)$ paitsi mahdollisesti äärellisen monessa pisteessä $x \in (-L, L)$.*

(b) $f(x)$ on jaksollinen funktio jaksonaan $2L$.

(c) $f(x)$ ja $f'(x)$ ovat paloittain jatkuvia välillä $(-L, L)$.

Tällöin funktion f Fourier-sarja suppenee pisteessä x kohti arvoa

$$\frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right), \tag{14}$$

toisin sanoen

$$\frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right). \tag{15}$$

Esimerkki 5.3. *Olkoon*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in (0, L] \\ 0, & \text{kun } x \in (-L, 0]. \end{cases}$$

Etsi funktion f $2L$-jaksollisen laajennuksen Fourier-sarja ja osoita, että

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Fourier-sarjan tasaista suppenemista käsittelevä lause yleisen jakson tapauksessa saadaan sijoittamalla funktio (13) Lauseeseen 4.7.

Lause 5.4. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva funktio, jolla on jaksona $2L$, $L > 0$. Tällöin funktion f Fourier-sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f.*

Sarjaa

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), \tag{16}$$

missä $A, \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, kutsutaan <u>trigonometriseksi sarjaksi</u> välillä $[-L, L]$. Jos sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

suppenevat itseisesti, niin trigonometrinen sarja (16) suppenee tasaisesti. Funktion f Fourier-sarja on aina trigonometrinen sarja. Jos tämä sarja suppenee tasaisesti, niin se on tällöin yksikäsitteinen.

Lause 5.5. *Jos muotoa (16) oleva sarja suppenee kohti funktiota f tasaisesti välillä $[-L, L]$, niin (16) on funktion f Fourier-sarja. Toisin sanoen $A = a_0/2$, $\alpha_n = a_n$ ja $\beta_n = b_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Lauseesta 5.5 seuraa, että jokainen trigonometrinen polynomi on itsensä Fourier-sarja. Toisin sanoen, jos

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{N} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

niin funktion f Fourier-sarjan kertoimet ovat $a_0 = 2A$,

$$a_n = \begin{cases} \alpha_n, & \text{kun } 1 \leq n \leq N \\ 0, & \text{kun } n > N \end{cases}$$

ja

$$b_n = \begin{cases} \beta_n, & \text{kun } 1 \leq n \leq N \\ 0, & \text{kun } n > N \end{cases} .$$

6. Sini- ja kosinisarjat

Olkoon reaaliarvoinen funktio f määritelty välillä $[0, L]$. Tarkoituksena on etsiä funktiota f kuvaava sarjakehitelmä, joka sisältää ainoastaan kosinitermejä, tai ainoastaan sinitermejä. Tämä tehdään laajentamalla f ensin parilliseksi (kosinitermisen sarjan tapauksessa) tai parittomaksi (sinitermisen sarjan tapauksessa) funktioksi välillä $[-L, L]$, joka edelleen laajennetaan $2L$-jaksoiseksi funktioksi. Tämän jälkeen etsitään saadun jaksollisen funktion Fourier-sarja.

Siis, jos f on määritelty välillä $[0, L]$, niin sen parillinen laajennus F_e on funktion

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in [0, L] \\ f(-x), & \text{kun } x \in (-L, 0) \end{cases}$$

jaksollinen laajennus. Tällöin F_e on jaksollinen funktio, jaksonaan $2L$, jolle pätee lisäksi $F_e(x) = F_e(-x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Funktion f pariton laajennus F_o on funktion

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in [0, L] \\ -f(-x), & \text{kun } x \in (-L, 0) \end{cases}$$

jaksollinen laajennus. Tällöin F_o on $2L$-jaksollinen funktio, jolle pätee $F_o(x) = -F_o(-x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x \neq nL$, $n \in \mathbb{N}$.

Siten

$$F_e(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{17}$$

missä

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} F_e(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Yhtälön (17) oikeaa puolta kutsutaan funktion f kosinitermiseksi Fourier-sarjaksi.

Vastaavasti

$$F_o(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

missä

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

on funktion f siniterminen Fourier-sarja.

Huomautus 6.1. *Jotta funktio F_o olisi aidosti pariton funktio (eikä vain pariton laajennus), niin tulisi olla voimassa $F_o(0) = 0$. Tämä seuraa sijoittamalla $x = 0$ parittoman funktion määritelmään. Koska*

$$F_o(0) = -F_o(-0),$$

niin $F_o(0) = 0$. Lisäksi jaksollisuuden nojalla

$$F_o(L) = -F_o(-L) = -F_o(L),$$

joten $F_o(L) = 0$, ja siis $F_o(nL) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Esimerkki 6.2. *Olkoon $f(x) = x$ kaikilla $x \in [0, L]$. Etsi funktion f sini- ja kosinitermiset Fourier-sarjat.*

7. Ortogonaaliset funktiot

Olkoot f ja g jatkuvia funktioita välillä $[a, b]$. Jaetaan väli $[a, b]$ tasamittaisiin osaväleihin, joiden pituus on

$$\Delta x = \frac{b-a}{N}, \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Valitaan jokaiselta osaväliltä piste x_k, missä $k \in \{1, \dots, N\}$. Tällöin

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} f(x_k)g(x_k)\Delta x,$$

joten

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx \sum_{k=1}^{N} a_k b_k, \tag{18}$$

missä $a_k = f(x_k)\sqrt{\Delta x}$ ja $b_k = f(x_k)\sqrt{\Delta x}$. Täten yhtälön (18) vasen puoli on likimäärin yhtä suuri kuin kahden vektorin sisätulo N-ulotteisessa vektoriavaruudessa, kun N on suuri. Antamalla $N \to \infty$ tästä likiarvosta saadaan yhtäsuuruus. Siten on perusteltua määritellä funktioiden f ja g sisätulo alla olevalla tavalla (19).

Olkoon $C_p(a, b)$ kaikkien niiden funktioiden joukko, jotka ovat paloittain jatkuvia välillä $[a, b]$. Määritellään funktioiden $f, g \in C_p(a, b)$ sisätulo kaavalla

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{19}$$

Koska f ja g ovat paloittain jatkuvia välillä $[a, b]$, niin myös fg on paloittain jatkuva samalla välillä. Siten fg on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$ ja siis yhtälö (19) on hyvin määritelty sisätulo avaruudessa $C_p(a, b)$. Tällä sisätulolla on paljon vastaavia ominaisuuksia kuin tavallisella äärellisulotteisen vektoriavaruuden sisätulolla.

Lemma 7.1. *Olkoon $f, g, h \in C_p(a, b)$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin*

(a) $(f, g) = (g, f)$

(b) $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$

(c) $(cf, g) = c(f, g)$

(d) $(f, f) \geq 0$

Analogiaa vektoriavaruuksien kanssa voi viedä eteenpäin määrittelemällä <u>normi</u> avaruudessa $C_p(a, b)$ sisätulon avulla seuraavasti:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_a^b [f(x)]^2 \right)^{1/2}, \qquad f \in C_p(a, b).$$

Kaksi funktiota $f, g \in C_p(a, b)$ ovat ortogonaalisia, jos

$$(f, g) = 0,$$

toisin sanoen, kun

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Lisäksi funktion $f \in C_p(a, b)$ sanotaan olevan normalisoitu, jos $\|f\| = 1$.

Edellä mainitussa analogiassa geometrinen tulkinta ei säily. Funktion $f \in C_p(a, b)$ normilla ei ole pituusmerkitystä, eikä kahden funktion $f, g \in C_p(a, b)$ ortogonaalisuus kerro mitään näiden funktioiden, kohtisuoruudesta toisiinsa nähden. Niin sanottu etäisyys funktioiden $f \in C_p(a, b)$ ja $g \in C_p(a, b)$ välillä,

$$\|f - g\| = \left[\int_a^b \left(f(x) - g(x)^2\right) dx\right]^{1/2}$$

on mitta funktioiden f ja g kuvaajien keskivertoetäisyyksistä.

Olkoon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ joukko funktioita siten, että $g_n \in C_p(a, b)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämän joukon sanotaan olevan ortogonaalinen, jos

$$(g_m, g_n) = 0$$

aina kun $m \neq n$. Jos $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on ortogonaalinen joukko, ja lisäksi

$$\|g_n\| = 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin joukon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sanotaan olevan ortonormaali. Ortogonaalisesta joukosta voidaan muodostaa ortonormaali jakamalla kukin joukon funktioista omalla normillaan, edellyttäen että kaikkien joukon funktioiden normit ovat nollasta eriäviä.

Esimerkki 7.2. *Funktiot $g_m(x) = \sin(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, muodostavat ortogonaalisen joukon välillä $[-\pi, \pi]$, koska selvästi $g_m \in C_p(a, b)$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$, ja Lemman 4.1 nojalla*

$$(g_m, g_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = 0$$

aina kun $m \neq n$. Saman lemman nojalla

$$\|g_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)dx = \pi,$$

joten $\|g_m\| = \sqrt{\pi}$. Näin ollen ortogonaalista joukkoa $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vastaava ortonormaali joukko koostuu funktioista

$$\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 3x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

Esimerkki 7.3. *Välillä $[-\pi, \pi]$ muodostetuissa Fourier-sarjoissa esiintyvät funktiot*

$$\{g_0, g_1, g_2, \ldots\} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\} \tag{20}$$

muodostavat ortogonaalisen joukon Lemman 4.1 nojalla.

Kehitettäessä jaksollista 2π-jaksoista funktiota $f(x)$ Fourier-sarjaksi, saadaan muotoa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x) \tag{21}$$

oleva kehitelmä, missä funktiot $g_0, g_1, \ldots$ ovat joukon (20) ortogonaalisia funktioita ja vakiot $c_0, c_1, \ldots$ niihin liittyviä Fourier-kertoimia (poislukien c_0, joka on muotoa $c_0 = a_0/2$).

Yleisemmin voidaan kysyä, onko tällainen esitys mahdollinen, jos Esimerkin 7.3 sijasta tarkastellaan jotain muuta ortogonaalista funktiojoukkoa $g_0(x), g_1(x), \ldots$ Jos muotoa (21) oleva kehitelmä on tällöin olemassa, niin se on funktion f yleistetty Fourier-sarja ja sen kertoimet ovat funktion f yleistettyjä Fourier-kertoimia tarkasteltavan ortogonaalisen joukon suhteen. Nämä kertoimet saadaan selville vastaavalla menetelmällä kuin tavalliset Fourier-kertoimet. Kerrotaan ensin yhtälö (21) puolittain funktiolla $g_m(x)$. Tällöin saadaan yhtälö

$$f(x)g_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x) g_m(x),$$

josta seuraa, edellyttäen että sarja voidaan integroida termeittäin,

$$\int_a^b f(x)g_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b g_n(x)g_m(x)dx,$$

missä $[a, b]$ on se väli, jossa funktiojoukko on ortogonaalinen. Ortogonaalisuuden nojalla seuraa

$$\int_a^b f(x)g_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (g_n, g_m) = c_m \|g_m\|^2,$$

joten

$$c_m = \frac{1}{\|g_m\|^2} \int_a^b f(x)g_m(x)dx$$

on Fourier-kertoimien lauseke yleisessä tapauksessa. Esimerkin 7.3 tapauksessa tämä kaava antaa lausekkeet tavallisille Fourier-kertoimille.

8. Pienimmän neliön approksimointi

Tarkastellaan 3-ulotteista vektoriavaruutta, jonka virittävät ortonormaalit vektorit $\{e_1, e_2, e_3\}$. Kahden vektorin lineaarikombinaatio

$$k = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2$$

sijaitsee aina $e_1 e_2$-tasossa. Jotta k olisi paras mahdollinen kolmiulotteisen vektorin $\overline{x}$ approksimaatio, niin k:n on oltava $\overline{x}$:n projektio $e_1 e_2$-tasoon. Tästä seuraa, että

$$\gamma_1 = (\overline{x}, e_1)$$

ja

$$\gamma_2 = (\overline{x}, e_2).$$

Vastaavasti kertoimet

$$c_n = (\overline{x}, e_n)$$

approksimoivat vektoria $\overline{x}$ parhaiten, kun vektori k muodostetaan lineaarikombinaationa mistä hyvänsä joukon $\{e_1, e_2, e_3\}$ osajoukosta. Fourier-kertoimille on olemassa vastaava karakterisointi.

Olkoon $f \in C_p(a, b)$, ja olkoon

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$$

funktioita, jotka kuuluvat ortonormaaliin joukkoon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Olkoon

$$K_m(x) = \gamma_1 g_1(x) + \gamma_2 g_2(x) + \cdots + \gamma_m g_m(x) \tag{22}$$

funktioiden $g_1, \ldots, g_m$ lineaarikombinaatio. Pyritään määräämään yhtälön (22) vakiokertoimet $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ siten, että K_m approksimoi funktiota parhaalla mahdollisella tavalla siinä mielessä, että virhe

$$E = \int_a^b [f(x) - K_m(x)]^2 \, dx$$

on mahdollisimman pieni. Tämä on funktion f pienimmän neliön approksimaatio. Huomaa, että virhe E on funktioiden f ja K_m etäisyyden $\|f - K_m\|$ neliö.

Lause 8.1. *Olkoon $\{g_1, \ldots, g_m\}$ ortonormaalin joukon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ osajoukko ja olkoon $f \in C_p(a, b)$. Tällöin funktion $f(x)$ yleistetyn Fourier-sarjan osasumma*

$$c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \cdots + c_m g_m(x), \tag{23}$$

joukon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suhteen, on paras funktion $f(x)$ pienimmän neliön approksimaatio kaikista mahdollisista joukon $\{g_1, \ldots, g_m\}$ lineaarikombinaatioista.

Edellisessä lauseessa funktion $f \in C_p(a, b)$ yleistetyllä Fourier-sarjalla tarkoitetaan täsmällisesti ottaen funktion f jaksollisen laajennuksen, jonka jaksona on $b - a$, yleistettyä Fourier-sarjaa. Sama pätee Seurauksessa 8.2 ja Lauseessa 8.3 alla. Koska (23) on funktion $f(x)$ yleisen Fourier-sarjan osasumma ortonormaalin joukon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suhteen, niin kertoimet $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ovat funktion $f(x)$ m ensimmäistä yleistettyä Fourier-kerrointa joukon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suhteen.

Seuraus 8.2 (Besselin epäyhtälö). *Olkoon $f \in C_p(a,b)$ ja olkoot $c_1, \ldots, c_m$ funktion f yleistettyjä Fourier-kertoimia ortonormaalin joukon $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suhteen. Tällöin funktion $f(x)$ yleistetyn Fourier-sarjan osasumma*

$$c_1^2 + \cdots + c_m^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx = \|f\|^2. \tag{24}$$

Termi $\|f\|^2$ Besselin epäyhtälön (24) oikella puolella ei riipu vakiosta m, joten kun m kasvaa, niin epäyhtälön (24) vasemman puolen summat muodostavat kasvavan jonon, joka on ylhäältä rajoitettu. Siten tämä jono suppenee kohti raja-arvoa, joka on korkeintaan $\|f\|^2$. Tästä seuraa, että Fourier-kertoimien neliöistä muodostettu sarja suppenee, ja

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx, \tag{25}$$

joten $c_n \to 0$ kun $n \to \infty$ ja siis

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (f, g_n) = 0. \tag{26}$$

Esimerkissä 7.2 todettiin, että joukko

$$\left\{ \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

on ortonormaali välillä $[-\pi, \pi]$. Yhtälöstä (26) seuraa siten, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Vastaavasti esimerkiksi joukko

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

on ortonormaali välillä $[0, \pi]$, joten

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Tietyillä ehdoilla epäyhtälössä (25) pätee yhtäsuuruus.

Lause 8.3 (Parsevalin kaava). *Olkoon $f \in C_p(-L, L)$. Tällöin funktion f tavallisille Fourier-kertoimille pätee*

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

jos f:n Fourier-sarja suppenee tasaisesti kohti funktiota f välillä $[-L, L]$.

9. Kompleksitermiset Fourier-sarjat

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ kompleksiarvoinen funktio, joka voidaan esittää muodossa

$$f(t) = u(t) + iv(t), \tag{27}$$

missä u ja v ovat reaaliarvoisia reaalimuuttujan funktiota välillä $[a, b]$ ja i on imaginääriyksikkö. Funktion f derivaatta on

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t),$$

olettaen että u ja v ovat derivoituvia. Vastaavasti

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

jos u ja v ovat integroituvia välillä $[a, b]$. Olkoon

$$\overline{f(t)} = u(t) - iv(t)$$

funktion f kompleksikonjugaatti. Tällöin

$$[\overline{f(t)}]' = \overline{f'(t)}.$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että reaaliarvoisten funktioiden perusominaisuudet, kuten esimerkiksi tulon derivoimissääntö, pätevät myös muotoa (27) oleville kompleksiarvoisille funktioille. Lisäksi, jos $u(t)$ ja $v(t)$ ovat jatkuvia välillä $t \in [a, b]$ ja jos

$$F(t) = U(t) + iV(t)$$

on sellainen funktio, että $F'(t) = f(t)$ kaikille $t \in [a, b]$, niin

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Kompleksiarvoinen eksponenttifunktio on muotoa

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{28}$$

missä $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Tämä saadaan ns. Eulerin kaavan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

avulla. Määritelmän (28) eksponenttifunktio toteuttaa tavalliset eksponenttifunktion laskukaavat. Lisäksi, jos $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ ovat reaalifunktioita, niin

$$z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

ja

$$\frac{d}{dt}e^{z(t)} = e^{z(t)}\frac{d}{dt}z(t).$$

Kompleksisen eksponenttifunktion avulla Fourier-sarja voidaan esittää kompaktimmassa muodossa.

Määritelmä 9.1. *Olkoon $L > 0$ ja olkoon f sellainen funktio, että*

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\,dx$$

ovat olemassa kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin merkitään

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

ja tätä sarjaa kutsutaan funktion f kompleksitermiseksi Fourier-sarjaksi riippumatta siitä suppeneeko se kohti funktiota f vai ei. Vakioita c_n kutsutaan funktion f kompleksitermisiksi Fourier-kertoimiksi.

Käyttäen hyväksi kompleksisen eksponenttifunktion ominaisuuksia voidaan osoittaa todeksi myös ns. Lagrangen trigonometrinen yhtälö, vaikka tämä yhtälö itse ei sisällä kompleksilukuja.

Lause 9.2 (Lagrangen trigonometrinen yhtälö). *Olkoon $m \in \mathbb{N}$ ja $\theta \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$2\sum_{n=1}^{m}\cos(n\theta) = -1 + \frac{\sin((m+1/2)\theta)}{\sin(\theta/2)}, \tag{30}$$

kun $\theta \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

10. Dirichlet ydin

Fourier-sarja pisteittäistä suppenemista (vrt. Lause 4.6) voidaan tietyissä tilanteissa tarkastella ns. Dirichlet ytimen avulla. Olkoon $f(x)$ paloittain jatkuva jaksollinen funktio jaksonaan 2π. Tällöin

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right], \tag{31}$$

missä

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ja

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Sijoittamalla kertoimien a_n ja b_n lausekkeet Fourier-sarjan (31) osasummaan, saadaan

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos[n(s-x)] ds. \end{aligned}$$

Olkoon

$$D_m(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m} \cos(nu).$$

Funktio $D_m(u)$ on Dirchlet ydin, ja se toteuttaa yhtälöt

$$\int_0^{\pi} D_m(u) du = \int_{-\pi}^{0} D_m(u) du = \frac{\pi}{2} \tag{32}$$

ja

$$D_m(u) = \frac{\sin[(m+1/2)u]}{2\sin(u/2)}, \qquad u \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots, \tag{33}$$

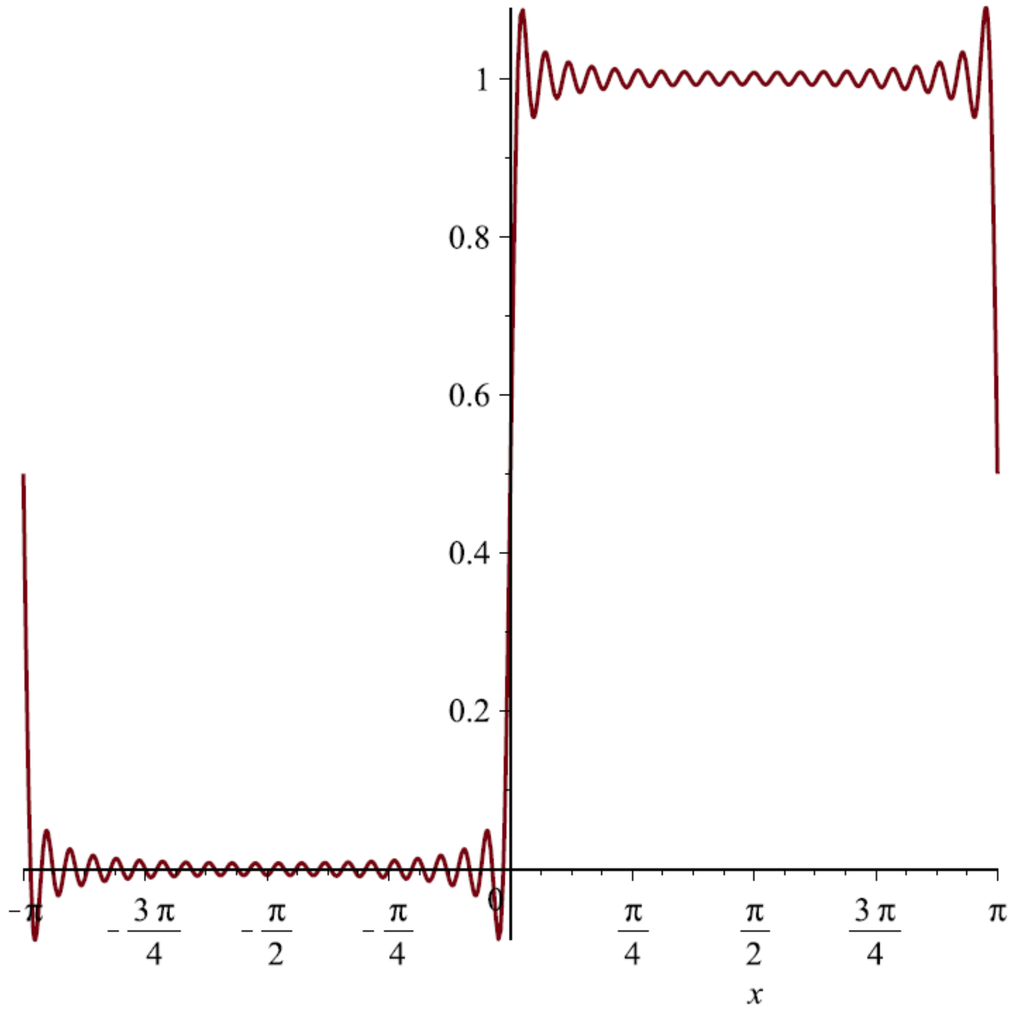
joista jälkimmäinen seuraa Lagrangen trigonometrisen yhtälön (30) nojalla. Dirichlet ytimen avulla Fourier-sarjan (31) osasummat saadaan esitettyä muodossa

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_m(s-x) ds. \tag{34}$$

Lisäksi pätee seuraava aputulos, jota tarvitaan Dirichlet konvergenssilauseen (Lause 4.6) todistuksessa. Aputuloksen esitystä varten kerrataan toispuoleisen derivaatan määritelmä.

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vasemmanpuoleinen derivaatta pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ on

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$



Kuva 2: Esimerkin 10.2 askelfunktion $h(x)$ Fourier-sarjan osasumma $S_m(x)$ tapauksessa $m = 20$.

jos tämä raja-arvo on äärellisenä olemassa. Funktion f oikeanpuoleinen derivaatta pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ on vastaavasti

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

jos kyseinen raja-arvo on äärellisenä olemassa.

Lemma 10.1. *Olkoon funktio $F(u)$ paloittain jatkuva välillä $(0, \pi)$ ja olkoon oikeanpuoleinen derivaatta $F'_+(0)$ olemassa. Tällöin*

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^{\pi} F(u) D_m(u) du = \frac{\pi}{2} F(0_+).$$

Esimerkki 10.2 (Gibbsin ilmiö). *Tarkastellaan askelfunktion*

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{kun } -\pi < x \leq 0 \end{cases}$$

jaksollista 2π*-jaksoista laajennusta* $H(x)$*. On olemassa jono positiivisia reaalilukuja*

$$\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$$

siten, että

$$x_m \to 0, \quad \text{kun} \quad m \to \infty,$$

ja funktion $H(x)$ *Fourier-sarjan osasummien arvot* $S_m(x_m)$ *näissä pisteissä ylittävät askelfunktion* $h(x)$ *arvot noin yhdeksällä prosentilla, kun* m *on suuri. Osoittautuu, että tämä ns. Gibbsin ilmiö esiintyy aina, kun tarkasteltavalla funktiolla on epäjatkuvuuskohta.*

11. Konvoluutiot ja hyvät ytimet

Edellisessä luvussa osoitettiin, että Fourier-sarjan N:s osasumma voidaan kirjoittaa muodossa

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_m(s-x)dx,$$

missä D_m on Dirichlet ydin. Fourier-osasummien käsittely johtaa siten luonnollisella tavalla niin sanottuihin konvoluutio-operaattoreihin. Ennen tämän käsitteen täsmällistä määrittelyä otetaan käyttöön joitakin merkintöjä.

Merkintä. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ integroituva funktio, toisin sanoen

$$\|f\|_{L^1} := \int_a^b |f(t)|dt < \infty.$$

Tällöin merkitään

$$f \in L^1[a,b].$$

Jos $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ on rajoitettu, toisin sanoen on olemassa $K > 0$ siten että $|f(x)| \le K$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin käytetään merkintää

$$f \in L^\infty[a,b].$$

Määritelmä 11.1. *Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että*

$$f, g \in L^1[-\pi,\pi].$$

Tällöin funktioiden f ja g konvoluutio $f * g$ on

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy.$$

Konvoluutio on integraali, jonka voi ajatella ilmaisevan funktioiden f ja g päällekkäisyyden määrää, kun g liikkuu funktion f yli. Siten se eräässä mielessä "yhdistää" funktiot f ja g. Konvoluutiolla ei ole "ykkösalkiota" siinä mielessä, että ei ole olemassa funktiota g siten, että

$$f * g = f$$

kaikilla f. On kuitenkin mahdollista löytää jonoja g_n siten, että

$$f * g_n \to f,$$

kun $n \to \infty$ (vrt. alla oleva Lause 11.4). Seuraavassa lauseessa luetellaat keskeisimmät konvoluution perusominaisuudet.

Lause 11.2. *Olkoot $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että*

$$f, g, h \in L^1[-\pi,\pi],$$

ja olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$. Tällöin *(a) $f * (g + h) = f * g + f * h$,*

(b) $(\alpha f) * g = \alpha(f * g)$,

(c) $f * g = g * f$,

(d) $f * g$ on jatkuva, jos f tai g on jatkuva.

Tarkastellaan seuraavaksi yleisiä integraaliytimiä, joilla on tiettyjä hyviä ominaisuuksia konvergenssin kannalta.

Määritelmä 11.3. *Perhe $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ on hyvä perhe ytimiä, jos*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1, \qquad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \tag{35}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|dx \leq C, \quad C > 0, \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N} \tag{36}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)|dx \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty, \quad \text{kaikilla } \delta > 0 \tag{37}$$

Seuraava lause on erittäin hyödyllinen erilaisissa konvergenssitarkasteluissa. Hyvän ytimen ominaisuuksissa (35) - (37) on abstraktoitu ne piirteet, jotka tekevät konvergenssista helppoa.

Lause 11.4. *Olkoon $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ perhe hyviä ytimiä ja $f \in L^{\infty}[-\pi, \pi]$. Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} (K_n * f)(x) = f(x)$$

jokaisessa pisteessä x, jossa f on jatkuva.

Kysymys. *Toteuttavatko Dirichlet ytimet hyvien ytimien ehdot?*

Yhtälön (32) nojalla

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2D_N(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

joten ydin $2D_N$ toteuttaa ehdon (35) kaikilla $N \in \mathbb{N}$. Entä ehto (36), joka takaa ytimen tasaisen integroituvuuden? Osoittautuu, että

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |2D_N(x)|dx \geq \frac{1}{\pi}\log N \to \infty,$$

kun $N \to \infty$. Siis Dirichlet ytimet $\{2D_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ eivät muodosta hyvää perhettä ytimiä. Tästä johtuen Fourier-sarjojen pisteittäisen suppenemisen täydellinen ymmärtäminen on vaikeaa. Itse asiassa on olemassa esimerkkejä jatkuvista funktioista, joiden Fourier-sarja hajaantuu joissakin pisteissä.

Dirichlet konvergenssilause (Lause 4.6) sanoo, että jos 2π-jaksoiset funktiot f ja f' ovat paloittain jatkuvia, niin

$$S_n(x) \to f(x), \qquad \text{kun } n \to \infty,$$

aina kun f on jatkuva pisteessä x. Mutta:

Esimerkki 11.5 (du Bois-Reymond 1873). *On olemassa jatkuva funktio f siten, että*

$$\limsup_{n\to\infty} S_n(0) = \infty.$$

Toisaalta Carleson osoitti vuonna 1966, että jatkuvan funktion Fourier-sarja suppenee melkein kaikkialla (Lebesguen mitan mielessä).

Kaikista näistä vaikeuksista huolimatta hyviä perheitä ytimiä voidaan hyödyntää Fourier-sarjojen teoriassa, kuten seuraavassa luvussa ilmenee.

12. Fejér ydin

Esimerkin 11.5 valossa on luonnollista esittää seuraava kysymys:

Jos jatkuvan funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Fourier-kertoimet on annettu, niin onko mahdollista löytää $f(t)$ kaikilla $t \in [a,b]$?

Fejér antoi tähän kysymykseen (kaikkien yllätykseksi) positiivisen vastauksen vuonna 1899. Perusajatus Fejérin päättelyn taustalla on seuraava. Jos Fourier-sarjan osasummat

$$S_0(x), S_1(x), S_2(x), \dots$$

käyttäytyvät huonosti (ts. jono hajaantuu), niin tarkastellaan keskiarvoa

$$S_0(x), \frac{S_0(x)+S_1(x)}{2}, \frac{S_0(x)+S_1(x)+S_2(x)}{3}, \dots$$

joka voi käyttäytyä paremmin konvergenssin mielessä. Tämä ilmiö oli ollut tunnettu jo Eulerin ajoista lähtien, mutta ensimmäinen henkilö joka tutki asiaa systemaattisesti oli Cesàro 1800-luvun loppupuolella.

Lemma 12.1 (Cesàro). *Olkoon $s_n \in \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Jos $s_n \to s$, kun $n \to \infty$, niin

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_n \to s$$

(b) On olemassa jonoja $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ siten, että s_n ei suppene kohti raja-arvoa, kun $n \to \infty$, mutta

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_n$$

suppenee.

Huomautus. Yleisesti, kun tarkastellaan sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{38}$$

suppenemista, niin voidaan tutkia osasummien

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

suppenemista. Merkitään

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_n,$$

jolloin sanotaan, että sarja (38) Cesàro suppenee, jos raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a \in \mathbb{C}$$

on olemassa. Cesàron lemman (Lemma 12.1) nojalla pätee, että

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{suppenee} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{Cesàro suppenee,}$$

mutta implikaatio ei päde käänteiseen suuntaan ($\not\Leftarrow$). Siis Cesàro suppeneminen on heikompi ehto, kuin ns. tavallinen suppeneminen.

Esimerkki 12.2. *Olkoon* $a_n = (-1)^{n+1}$ *kaikille* $n \in \mathbb{N}$. *Tällöin* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *on jono*

$$1, -1, 1, -1, \ldots,$$

joten osasummat

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_n$$

muodostavat jonon $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *joka on*

$$1, 0, 1, 0, \ldots$$

Tämä ei selvästikään suppene. Toisaalta

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}$$

muodostaa jonon

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \ldots,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}.$$

Jonon $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cesàro summa on* $1/2$.

Olkoon toisaalta $a_n = 1$ *kaikille* $n \in \mathbb{N}$. *Tällöin* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *on jono*

$$1, 1, 1, 1, \ldots$$

ja osasummat

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_n$$

muodostavat jonon $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *joka on*

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Selvästi tämä jono hajaantuu kohti ääretöntä. Jono $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, missä*

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n},$$

on muotoa

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{10}{4}, \frac{15}{5}, \frac{21}{6}, \frac{28}{7}, \dots,$$

joka hajaantuu myös kohti ääretöntä. Jono $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ei suppene tavallisessa eikä Cesàron mielessä.*

Esimerkki 12.3. *Olkoon* $x \neq n2\pi$ *kaikille* $n \in \mathbb{Z}$*. Tällöin*

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \cos(jx) = 0$$

Cesàron mielessä. Toisin sanoen Dirichlet ydin $D_m(x) \to 0$ *Cesàron mielessä, kun* $m \to \infty$*.*

Edellisessä esimerkissä ollaan lähellä Fejérin perusajatusta Fourier-sarjojen suppenemisesta. Olkoon

$$S_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} c_j e^{ijx},$$

funktion $f(x)$ kompleksitermisen Fourier-sarjan N:s osasumma, missä

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx, \qquad j \in \mathbb{N},$$

ovat funktion f kompleksitermiset Fourier-kertoimet. (Tässä $L = \pi$, eli $f(x)$ oletetaan jaksolliseksi funktioksi, jonka jaksona on 2π.) Määritellään Fejér-ydin

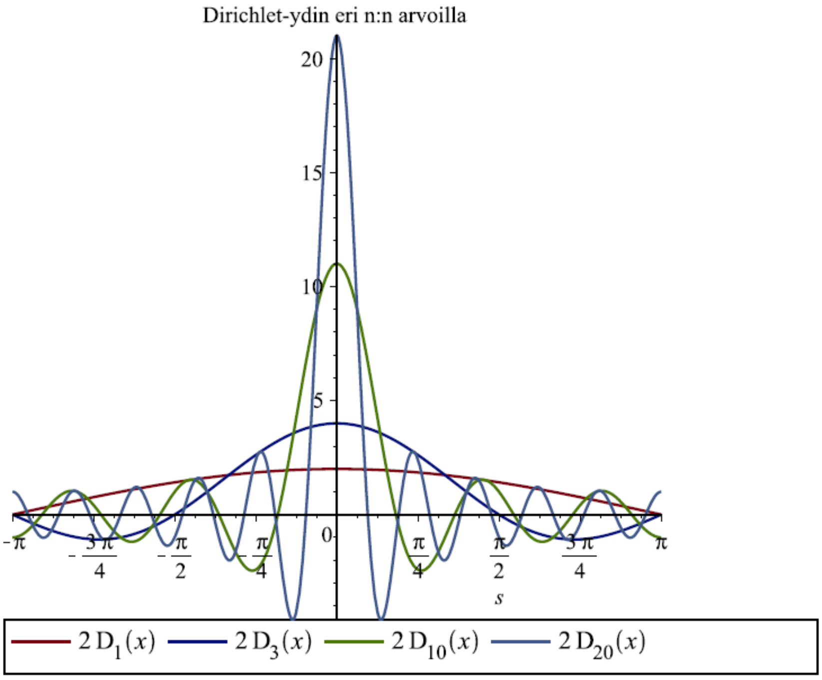
$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k(x),$$

missä $D_k(x)$ on Dirichlet-ydin. Kirjoitetaan

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(x)$$

ja pyritään esittämään funktio $\sigma_N(x)$ Fejér-ytimen avulla. Osoittautuu, että funktion f Fourier-sarjan osasummien $S_N(x)$ Cesaro-summa $\sigma_N(x)$ voidaan ilmaista funktion f ja Fejér-ytimen konvoluution avulla muodossa

$$\sigma_N(x) = 2(f * F_N)(x). \tag{39}$$



Kuva 3: Dirichlet ydin $2D_N(x)$.

Lisäksi Fejér ytimen avulla saadaan muodostettua perhe hyviä ytimiä, joten se on ainakin suppenemistarkasteluiden kannalta parempi työkalu kuin Dirichlet-ydin.

Lause 12.4. *Joukko $\{2F_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ on perhe hyviä ytimiä. Toisin sanoen*

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2F_N(x)dx = 1$ *kaikilla* $N \in \mathbb{N}$.

(ii) On olemassa $C > 0$ *siten, että* $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |2F_N(x)|dx \leq C$ *kaikilla* $N \in \mathbb{N}$.

(iii) Kaikille $\delta > 0$ *pätee* $\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |2F_N(x)|dx \to 0$, *kun* $N \to \infty$.

Lisäksi pätevät seuraavat Fejér-ytimen perusominaisuudet.

Lemma 12.5. *Olkoon* $N \in \mathbb{N}$. *Tällöin*

(i) $F_N(x) \geq 0$ *kaikilla* $x \in [-\pi, \pi]$.

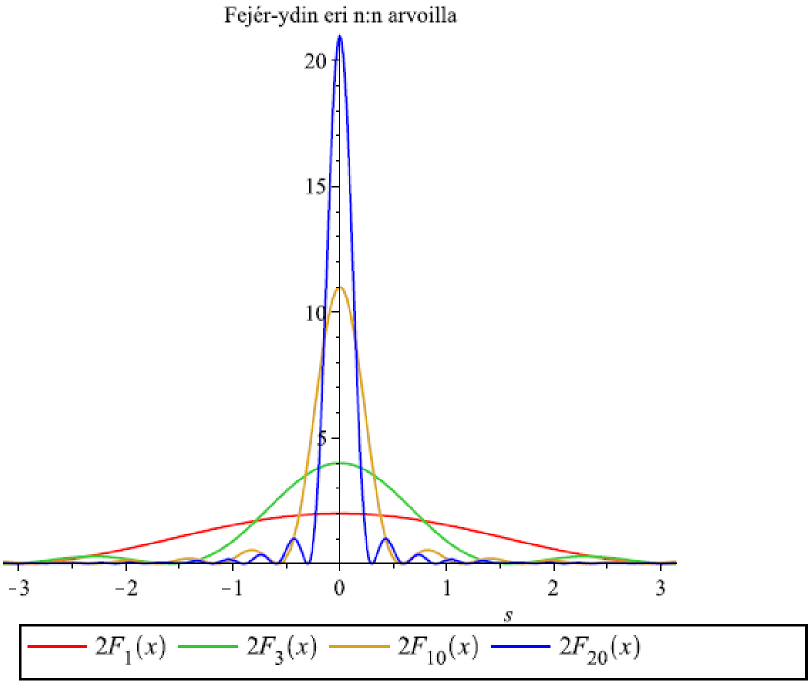
(ii) Kaikille $\delta > 0$ *pätee* $F_N(x) \to 0$, *kun* $N \to \infty$ *tasaisesti välin* $[-\delta, \delta]$ *ulkopuolella.*

(iii)

$$2F_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin[(N+1)x/2]}{\sin(x/2)}\right)^2,$$

kun $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$.

(iv) $F_N(0) = N + 1$.



Kuva 4: Fejér ydin $2F_N(x)$.

Perusajatus Fejérin tarkastelun taustalla on seuraava. Olkoon $\delta > 0$ pieni ja $N \in \mathbb{N}$ suuri. Tällöin, jos f on jatkuva 2π-jaksollinen funktio, niin

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)F_N(s)ds \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-s)F_N(s)ds,$$

koska Lemman 12.5 nojalla välin $[-\delta, \delta]$ ulkopuolisen osan vaikutus integraaliin on hyvin pieni. Toisaalta, koska δ on pieni ja f on jatkuva, niin se on lähes vakiofunktio välillä

$$[x-\delta, x+\delta].$$

Siis

$$f(x-s) \approx f(x)$$

kaikilla $s \in [-\delta, \delta]$, joten

$$\begin{aligned}\sigma_N(x) &\approx \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x)F_N(s)ds \\ &= f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} 2F_N(s)ds\right) \\ &\approx f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2F_N(s)ds\right) \\ &= f(x).\end{aligned}$$

Edellä kahdessa viimeisessä askeleessa on käytetty hyvän ytimen $2F_N$ ominaisuuksia (i) ja (iii) Lauseessa 12.4.

Yllä olevan tarkastelun perusteella funktion f Fourier-sarjan osasummien $S_N(x)$ Cesaro-summa $\sigma_N(x)$ on lähellä tarkasteltavaa funktiota $f(x)$, kun N on suuri. Täsmällisesti ottaen on voimassa seuraava lause.

Lause 12.6 (Fejér). *Olkoon $f \in L^\infty[-\pi, \pi]$ jatkuva funktio pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$. Tällöin*

$$\sigma_N(x) \to f(x),$$

kun $N \to \infty$.

Huomautus. Jos $f \in L^\infty[-\pi, \pi]$ on jatkuva koko välillä $[-\pi, \pi]$, niin Lauseen 12.6 suppeneminen on tasaista.

Fejérin lauseesta seuraa, että jatkuvan funktion Fourier-kertoimet määräävät funktion yksikäsitteisesti.

Lause 12.7. *Jos $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ ovat jatkuvia ja funktioiden f ja g kompleksitermisille Fourier-kertoimille $c_n(f)$ ja $c_n(g)$ pätee*

$$c_n(f) = c_n(g)$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$, niin tällöin $f \equiv g$.

Fejérin lauseesta seuraa myös, että trigonometriset polynomit

$$Q(t) = \sum_{j=-n}^{n} \alpha_j e^{ijt}, \qquad \alpha_j \in \mathbb{C},$$

ovat tiheässä jatkuvien funktioiden joukossa metriikan

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

suhteen.

Lause 12.8. *Jos $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ on jatkuva ja $\varepsilon > 0$, niin on olemassa trigonometrinen polynomi P siten, että*

$$\rho(f, P) = \sup_{x \in [-\pi, \pi]} \{|f(x) - P(x)|\} \leq \varepsilon.$$

Osa II

Fourier-sarjojen sovelluksia

13. Jatkuvat, ei missään derivoituvat funktiot

Riemann ehdotti vuonna 1861, että funktio

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 \pi x)}{n^2}, \qquad x \in [-1,1],$$

ei ole missään pisteessä derivoituva, mutta ei antanut tälle asialle todistusta. Weierstrass antoi ensimmäisen pitävän esimerkin jatkuvasta, ei missään derivoituvasta funktiosta. Hän osoitti, että funktiolla

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(a^n \pi x)$$

ei ole derivaattaa missään pisteessä tietyillä vakioiden a ja b arvoilla siten, että

$$0 < b < 1 < a, \qquad ab > 1.$$

Tässä luvussa osoitetaan todeksi eräs versio Weierstrassin tuloksesta.

Riemannin funktioon $R(x)$ liittyen Hardy osoitti vuonna 1916, että R ei ole derivoituva irrationaalipisteissä. Lopullisen ratkaisun asialle antoi Joseph Gerver vuonna 1969. Hän osoitti, että $R(x)$ <u>on</u> derivoituva pisteissä

$$x = \frac{p}{q},$$

missä p ja q ovat parittomia kokonaislukuja, mutta ei missään muualla.

Osoitetaan seuraava tulos.

Lause 13.1. *Jos $0 < \alpha < 1$, niin funktio*

$$f(x) = f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}, \qquad x \in [-\pi, \pi], \tag{40}$$

on jatkuva ja 2π-jaksollinen, mutta ei derivoituva missään pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$.

Havaitaan, että funktiolla f_α on seuraavat ominaisuudet.

(1) Funktio f_α on jatkuva: Olkoon

$$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n\alpha} e^{i2^n x}.$$

Tällöin $\lim_{N\to\infty} g_N = f_\alpha$, funktio g_N on jatkuva kaikilla $N \in \mathbb{N}$ ja funktion f_α määrittelevä sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti. Tästä seuraa, että

$$f_\alpha = \lim_{N\to\infty} g_N$$

on jatkuva.

(2) Monet funktion f_α Fourier-kertoimista ovat nollia:

$$c_{2^n} = (2^n)^{-\alpha}, \qquad n \in \mathbb{N},$$
$$c_k = 0, \qquad \text{kun } k \neq 2^m \quad \text{kaikilla } m \in \mathbb{N}.$$

Tällaista Fourier-sarjaa sanotaan lakunaariseksi.

Muokataan Fejér-ytimiä lakunaaristen Fourier-sarjojen käsittelyä varten. Seuraavassa tarkastellaan jaksollista funktiota g, jonka jaksona on 2π. Tällöin voidaan osoittaa, että funktion g Fejér ytimen avulla saadaan

$$\sigma_N(x) = (2F_N * g)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k e^{ikx} \tag{41}$$

ja Dirichlet-ytimellä

$$S_N(x) = (2D_N * g)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx},$$

missä c_k on funktion g kompleksinen Fourier-kerroin. Vastaavasti pelkille ytimille $2F_N(x)$ ja $2D_N(x)$ saadaan yhtälöt

$$2F_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}$$

ja

$$2D_N = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}.$$

Tavoitteena on muodostaa jonkinlainen näiden ytimien välimuoto, joka säilyttää hyviä ominaisuuksia molemmista lähtöytimistä.

Määritelmä 13.2. *Kun $g \in L^1[-\pi, \pi]$, asetetaan*

$$\Delta_N(x) = 2\sigma_{2N-1}(x) - \sigma_{N-1}(x) = ((4F_{2N-1} - 2F_{N-1}) * g)(x), \tag{42}$$

missä $x \in [-\pi, \pi]$.

Ytimen $4F_{2N-1} - 2F_{N-1}$ Fourier-kertoimet $c_{|k|}$ ovat

$$c_{|k|} = 1, \qquad \text{kun } 0 \leq |k| \leq N$$
$$c_{|k|} = 2 - \frac{|k|}{N}, \qquad \text{kun } N+1 \leq |k| \leq 2N-1$$
$$c_{|k|} = 0, \qquad \text{kun } |k| \geq 2N.$$

Siis funktiota $\Delta_N(x)$ vastaava ydin $4F_{2N-1} - 2F_{N-1}$ toimii kuin Dirichlet-ydin Fourier-välillä $k \in [-N, N]$ ja sen Fourier-kertoimet laskeutuvat lineaarisesti nollaan (kuten Fejér-ytimen tapauksessa) kun $k \in [-2N, -N]$ tai $k \in [N, 2N]$. Tällöin

(a) Funktio $\Delta_N(x)$ perii funktion $\sigma_N(x)$ hyvät summausominaisuudet.

(b) Jos g on lakunaarinen ja $N = 2^n$, niin

$$S_N(x) = \Delta_N(x). \tag{43}$$

Osoitetaan todeksi yhtälö (43). Yhdistämällä yhtälöt (41) ja (42) saadaan,

$$\begin{aligned}
\Delta_N(x) &= 2\sigma_{2N-1}(x) - \sigma_{N-1}(x) \\
&= 2\sum_{k=-2N+1}^{2N-1}\left(1 - \frac{|k|}{2N}\right)c_k e^{ikx} - \sum_{k=-N+1}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right)c_k e^{ikx} \\
&= \sum_{N\le|k|\le 2N-1}\left(2 - \frac{|k|}{N}\right)c_k e^{ikx} + \sum_{k=-N+1}^{N-1}\left[\left(2 - \frac{|k|}{N}\right) - \left(1 - \frac{|k|}{N}\right)\right]c_k e^{ikx} \\
&= \sum_{N\le|k|\le 2N-1}\left(2 - \frac{|k|}{N}\right)c_k e^{ikx} + \sum_{k=-N+1}^{N-1} c_k e^{ikx} \\
&= \sum_{N+1\le|k|\le 2N-1}\left(2 - \frac{|k|}{N}\right)c_k e^{ikx} + \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}.
\end{aligned} \tag{44}$$

Koska oletuksen nojalla funktio g on lakunaarinen, ja $N = 2^n$, niin

$$c_N = c_{2^n} \neq 0,$$

mutta

$$c_{N+1} = \cdots = c_{2N-1} = 0,$$

koska lukuja $N+1, \ldots, 2N-1$ ei voi esittää muodossa 2^m, $m \in \mathbb{N}$. Siten

$$\sum_{N+1\le|k|\le 2N-1}\left(2 - \frac{|k|}{N}\right)c_k e^{ikx} = 0$$

yhtälöketjussa (44), joten

$$\Delta_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = S_N(x).$$

Lisäksi Lauseen 13.1 funktiolle $f_\alpha(x)$ pätee

$$\Delta_{2N}(x) - \Delta_N(x) = 2^{-(n+1)\alpha} e^{i2^{n+1}x}, \tag{45}$$

missä $N = 2^n$ ja $x \in [-\pi, \pi]$. Lause 13.1 seuraa alla olevan tuloksen avulla.

Lemma 13.3. *Olkoon $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ jatkuva. Jos g on derivoituva pisteessä $x_0 \in [-\pi,\pi]$, niin tällöin*

$$\sigma_N'(x_0) = O(\log N),$$

kun $N \to \infty$.

__**Merkintä:**__ Lukujonojen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ja $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sanotaan toteuttavan

$$a_n = O(b_n), \qquad n \to \infty,$$

jos ja vain jos on olemassa vakio $K > 0$ siten, että

$$|a_n| \leq Cb_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Jos halutaan kompleksiarvoisen funktion f_α sijasta muodostaa reaaliarvoinen, jatkuva, mutta ei missään derivoituva funktio, niin voidaan valita esimerkiksi

$$g_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \cos(2^n x).$$

Tällöin saadaan, vastaavasti kuten yhtälön (45) tapauksessakin,

$$\Delta_{2N}(x) - \Delta_N(x) = 2^{-(n+1)\alpha} \cos(2^{n+1}x),$$

missä $N = 2^n$. Mutta nyt

$$|\cos(2^{n+1}x)| \neq \text{ vakio},$$

joten tilanne on tältä osin oleellisesti erilainen kuin yhtälön (45) tapauksessa, jossa vastaavalle funktiolle $e^{i2^{n+1}x}$ on voimassa

$$|e^{i2^{n+1}x}| = 1.$$

Tästä syystä Lemmaa 13.3 ei voida suoraan soveltaa funktion g_α tapauksessa. Tätä varten tarvitaan Lemman 13.3 tarkennus, joka sanoo että

$$\Delta'_N(x_0 + h) = O(\log N)$$

kun $|h| \leq 1/N$ ja g on jatkuva ja derivoituva pisteessä x_0. Valitsemalla nyt sopiva h saadaan

$$|\Delta'_{2N}(x_0) - \Delta'_N(x_0)| = 2^{(1-\alpha)(n+1)} = (2N)^{1-\alpha},$$

joka osoittaa, että g_α ei ole derivoituva missään pisteessä.

14. Weylin teoreema ja irrationaaliluvut

Tarkastellaan seuraavaksi Fourier-analyysin sovellusta lukuteoriaan.

Jos $x, y \in \mathbb{R}$ ja $x - y \in \mathbb{Z}$, niin merkitään

$$x = y \pmod{\mathbb{Z}}$$

ja sanotaan, että x ja y ovat kongruentteja modulo $\mathbb{Z}$. Kun $x \in \mathbb{R}$, niin on olemassa yksikäsitteinen luku $< x > \in [0, 1)$, jolle

$$x =< x > \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Lukua $< x >$ kutsutaan x:n desimaaliosaksi.

Ongelma: Jos $\gamma \in \mathbb{R}$, niin mitä voidaan sanoa jonosta

$$< \gamma >, < 2\gamma >, < 3\gamma >, < 4\gamma >, \dots \qquad \big(\in [0, 1)\big).$$

1. Jos $\gamma = p/q \in \mathbb{Q}$, niin jono on jaksollinen.
2. Jos $\gamma \notin \mathbb{Q}$, niin jonon alkiot ovat erillisiä ja irrationaalisia.

Tapauksessa, jossa $\gamma \notin \mathbb{Q}$, asiasta voidaan sanoa vielä paljon enemmän. Tätä varten tarvitaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 14.1. *Jono lukuja*

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots),$$

missä $\alpha_j \in [0, 1)$, $j \in \mathbb{N}$, *on tasan jakautunut, jos jokaisella välillä*

$$(a, b) \subset [0, 1)$$

pätee

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\#\{1 \le n \le N : \alpha_n \in (a, b)\}}{N} = b - a.$$

Huomautus: Merkintä $\#A$ tarkoittaa "joukon A alkioiden lukumäärää."

Huomautus: "Tasan jakautunut" $\implies$ "tiheä joukossa $[0, 1)$", mutta
"tiheä joukossa $[0, 1)$" $\not\Rightarrow$ "Tasan jakautunut"

Seuraava lause antaa vastauksen yllä olevaan ongelmaan.

Lause 14.2. *Jos γ on irrationaalinen, niin jono*

$$(< \gamma >, < 2\gamma >, < 3\gamma >, \dots)$$

on tasan jakautunut välille $[0, 1)$.

Ennen väitteen todistamista muotoillaan se analyyttisin termein.

<u>**Merkitään:**</u> Jos $(a,b) \subset [0,1)$, niin olkoon $\chi_{(a,b)}(t)$ välin (a,b) karakteristisen funktion jaksollinen 1-jaksoinen jatko. Toisin sanoen

$$\chi_{(a,b)}(t) = 1$$

jos ja vain jos

$$t \in (a,b) \mod \mathbb{Z}$$

ja

$$\chi_{(a,b)}(t) = 0$$

jos ja vain jos

$$t \notin (a,b) \mod \mathbb{Z}.$$

Edellisillä merkinnöillä

$$\#\{1 \leq n \leq N :< n\gamma >\in (a,b)\} \equiv \sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma),$$

joten Lause 14.2 voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 \chi_{(a,b)}(t)dt,$$

kun $N \to \infty$, kaikilla $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Tämän raja-arvon, ja siten Lauseen 14.2, oikeaksi todistamiseksi tarvitaan seuraava aputulos.

Lemma 14.3. *Olkoon $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jatkuva jaksollinen funktio, jaksonaan* 1. *Tällöin*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx, \tag{46}$$

kun $N \to \infty$.

Perusajatus Lauseen 14.2 todistuksessa on todistaa väite ensin trigonometrisille polynomeille ja sen jälkeen käyttää yleisiä approksimaatioargumentteja. Siten, jos tarkasteltava jono

$$(<\gamma>, <2\gamma>, <3\gamma>, \ldots)$$

korvataan yleisellä lukujonolla

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$$

ja Lemma 14.3 saadaan todistettua tälle yleiselle jonolle, niin tällä päättelyllä seuraa puolet seuraavan Weylin tasa-arvolauseen todistuksesta.

Lause 14.4 (Weylin kriteeri). *Jono* $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$, *missä* $\eta_j \in [0,1)$ *kaikilla* $j \in \mathbb{N}$, *on tasan jakautunut välille* $[0,1)$, *jos ja vain jos*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \eta_n} = 0$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

15. Harmoninen värähtelijä

Jouseen ripustetun massan m liikettä kuvaa vaimennetun värähtelyliikkeen differentiaaliyhtälö

$$my'' + cy' + ky = 0, \tag{47}$$

missä c on vaimennuskerroin ja k jousivakio. Tapauksessa $c > 0$ yhtälön jokainen ratkaisu $y(t)$ lähestyy arvoa 0, kun $t \to \infty$. Jos massaan m vaikuttaa lisäksi y-akselin suuntainen ajasta riippuva ulkoinen voima $r(t)$, värähtelyä kuvaava differentiaaliyhtälö on

$$my'' + cy' + ky = r(t). \tag{48}$$

Tarkastellaan erikoistapausta, jossa $r(t)$ on jaksollinen siten, että

$$r(t) = F_0 \cos(\omega t), \tag{49}$$

missä $F_0 > 0$ ja $\omega > 0$ ovat vakioita. Tällöin yhtälöllä (48) on muotoa

$$y_p(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \tag{50}$$

oleva yksityisratkaisu, missä vakiot a ja b voidaan etsiä määräämättömien kertoimien menetelmällä. Toisen kertaluvun lineaaristen differentiaaliyhtälöiden teorian mukaan jokainen yhtälön (48) ratkaisu saadaan lisäämällä ratkaisuun (50) jokin homogeenisen yhtälön (47) ratkaisu $y_h(t)$. Koska

$$\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0,$$

niin nähdään, että jokainen yhtälön (48) ratkaisu lähestyy asymptoottisesti yksityisratkaisua (50), kun $t \to \infty$. Jos ulkoinen voima $r(t)$ on jaksollinen, mutta ei sinimuotoinen, yhtälön (48) yksityisratkaisu voidaan löytää kehittämällä $r(t)$ Fourier-sarjaksi.

Esimerkki 15.1. *Olkoon $r(t)$ funktio, jolla on jaksona 2π ja jolle*

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & \textit{kun } -\pi \le t < 0 \\ -t + \pi/2 & \textit{kun } 0 \le t < \pi. \end{cases} \quad (10^{-5}N)$$

Etsitään yhtälölle (48) *yksityisratkaisu, kun $m = 1$ (g), $c = 0,02$ (g/s) ja $k = 25$ (g/s^2). Funktion $r(t)$ kosiniterminen Fourier-sarja on*

$$r(t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos(3t) + \frac{1}{5^2}\cos(5t) + \cdots\right) \tag{51}$$

Tarkastellaan epähomogeenista yhtälöä

$$y'' + 0,02y' + 25y = \frac{4}{\pi n^2}\cos(nt), \tag{52}$$

missä oikealla puolella on Fourier-sarjan (51) *n:s termi* ($n = 1, 3, 5, \ldots$). *Oikea puoli on siis muotoa* (49), *missä $\omega = n$. Yhtälöllä* (52) *on näin ollen muotoa* (50) *oleva yksityisratkaisu*

$$y_n = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt).$$

Vakiot A_n *ja* B_n *voidaan määrätä sijoittamalla yhtälöön* (52)*, jolloin saadaan*

$$A_n = \frac{4(25 - n^2)}{\pi n^2 D}$$

ja

$$B_n = \frac{0,08}{\pi n D},$$

missä

$$D = (25 - n^2)^2 + (0,02n)^2.$$

Laskemalla puolittain yhteen yhtälöt

$$y_n'' + 0,02y_n' + 25y_n = \frac{4}{\pi n^2}\cos(nt)$$

eri n*:n arvoilla nähdään, että summa*

$$S_n = y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n+1}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$S_n'' + 0,02S_n' + 25S_n = r_n(t)$$

missä $r_n(t)$ *on Fourier-sarjan* (51) *osasumma*

$$r_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos[(2k+1)t].$$

Tarkempi analyysi osoittaa, että raja-arvo

$$y = \lim_{n\to\infty} S_n$$

on olemassa ja antaa etsityn yksityisratkaisun yhtälölle (48)*. Siis*

$$y = y_1 + y_3 + y_5 + \cdots,$$

missä

$$y_n = A_n\cos(nt) + B_n\sin(nt).$$

Tutkitaan ratkaisun luonnetta: lasketaan värähtelyjen y_n *amplitudit*

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \frac{4}{\pi n^2\sqrt{D}},$$

missä

$$D = (25 - n^2)^2 + (0,02n)^2,$$

arvoilla $n = 1, 3, 5, 7, 9$*:*

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,0530 \\ C_3 &= 0,0088 \\ C_5 &= 0,5100 \\ C_7 &= 0,0011 \\ C_9 &= 0,0003. \end{aligned}$$

Huomataan, että amplitudi on suurimmillaan lähinnä systeemin luonnollista värähtelytaajuutta siten, että $y \approx y_5$*. Kysymyksessä on siten lähes harmoninen värähtely, jonka taajuus on viisi kertaa ulkoisen voiman taajuus.*

16. Reuna-arvotehtävät

Monet fysiikan ongelmat johtavat osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Näihin ongelmiin usein liittyvät reunaehdot johtavat puolestaan vastaaviin osittaisdifferentiaaliyhtälöiden reuna-arvotehtäviin. Tarkastellaan seuraavaksi esimerkinomaisesti reuna-arvotehtävien ratkaisemista Fourier-sarjateorian avulla. Menetelmä antaa mahdollisuuden konstruoida ratkaisu eksplisiittisesti.

Lämpöyhtälö

Lämmönjohtumista homogeenisessä, ulospäin eristetyssä (ts. lämpöä ei pääse virtaamaan pois) tangossa kuvaa reuna-arvo-ongelma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq \pi, \quad u_0 \in L^1(0,\pi), \end{cases} \tag{53}$$

missä $u(x,t)$ on lämpötila ja π on tangon pituus (π voidaan korvata mielivaltaisella pituudella ℓ). Yhtälö (53) on ns. *lämpöyhtälö*. Sijoitetaan yrite

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

yhtälöön (53), jolloin saadaan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = X(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

ja

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2},$$

joten

$$X(x)\frac{\partial T(t)}{\partial t} = \alpha T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}. \tag{54}$$

Tästä seuraa, että

$$\frac{\alpha}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{\partial T(t)}{\partial t}, \tag{55}$$

eli

$$\begin{cases} \dfrac{1}{T} \cdot \dfrac{d}{dt} T = -k^2 \alpha \\ \dfrac{\alpha}{X} \cdot \dfrac{d^2}{dx^2} X = -k^2 \alpha, \end{cases} \tag{56}$$

missä k on vakio, koska yhtälön (55) vasen ja oikea puoli ovat toisistaan riippumattomia. Yhtälöiden (56) ratkaisut reunaehdoilla

$$u(0,t) = 0 \quad \text{ja} \quad u(\pi,t) = 0$$

ovat

$$T_k(t) = C_k e^{-k^2 \alpha t}$$

ja

$$X_k(x) = D_k \sin(kx),$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja C_k, D_k ovat vakioita. Siis osaongelmalla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = 0 = u(\pi, t)$$

on (eräät) ratkaisut

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = A_k e^{-k^2 \alpha t} \sin(kx),$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja $A_k \in \mathbb{R}$. Nämä ratkaisut eivät kuitenkaan välttämättä toteuta ehtoa

$$u_k(x,0) = u_0(x).$$

Haetaan ratkaisua u sarjamuodossa

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 \alpha t} \sin(kx)$$

olettaen, että tämä sarja suppenee joukossa

$$E = \{(x,t) : 0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t < \infty\}$$

ja että sarjasta kerran t:n suhteen ja kaksi kertaa x:n suhteen termeittäin osittaisderivoimalla saatu sarja suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset E$. Tällöin havaitaan, että u toteuttaa yhtälön

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

koska sarjan $u(x,t)$ jokainen termi $u_k(x,t)$ toteuttaa tämän yhtälön. Lisäksi nähdään sijoittamalla $x = 0$ ja $x = \pi$, että

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

kaikilla $t \ge 0$. Edelleen funktio u toteuttaa reunaehdon

$$u(x,0) = u_0(x),$$

jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx) = u_0(x).$$

Ottamalla funktiosta u_0 pariton jaksollinen laajennus välillä $[-\pi, \pi]$ ja muodostamalla tämän laajennuksen Fourier-sarja, havaitaan, että

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(t) \sin(kt) dt.$$

Siten saadaan (formaali) ratkaisu

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} u_0(t)\sin(kt)dt\right)e^{-k^2\alpha t}\sin(kx).$$

Siis

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2\alpha t}\sin(kx),$$

missä

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(t)\sin(kt)dt$$

on reuna-arvo-ongelman jatkuva ratkaisu, jos sarja (esim.) suppenee tasaisesti joukossa E.

Esimerkki 16.1. *Etsi reuna-arvotehtävän* (53) *ratkaisu, kun*

$$u_0(x) = x(\pi - x).$$

Aaltoyhtälö

Johdannossa tarkasteltiin esimerkkiä ohuesta ja venymättömästä värähtelevästä kielestä, joka on molemmista päistään tukevasti kiinnitetty. Sovelletaan seuraavaksi Fourier-sarjojen teoriaa tämän esimerkin käsittelyyn. Olkoon $u = u(x,t)$ kielen poikkeama tasapainotilasta ($u \equiv 0$) ajan hetkellä t pisteessä $x \in [0,\pi]$. Tällöin

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \tag{57}$$

missä alkuarvot u_0 ja u_1 toteuttavat $u_0, u_1 \in L^1(0,\pi)$, ja kielen pituus on π. Edellä mainittu osittaisdifferentiaaliyhtälö on ns. *aaltoyhtälö* 1-ulotteisessa tapauksessa. Haetaan tälle ratkaisua muodossa

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{58}$$

Koska

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

ja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = T(t)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

niin sijoittamalla yrite (58) aaltoyhtälöön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{59}$$

saadaan

$$T(t)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}X(x)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}.$$

Tästä seuraa edelleen

$$\frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d^2X(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{d^2T(t)}{dt^2} = -\lambda,$$

koska muuttujat x ja t ovat toisistaan riippumattomia. Täten saadaan yhtälöt

$$X'' + \lambda X = 0$$

ja

$$T'' + c^2\lambda T = 0.$$

Reunaehdoista

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \tag{60}$$

seuraa, että

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Jos $\lambda \leq 0$, niin reuna-arvotehtävällä

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \tag{61}$$

on vain triviaali ratkaisu $X \equiv 0$. Mielenkiintoisempi tapaus on $\lambda > 0$, jossa ei-triviaaleja ratkaisuja on olemassa. Merkitään tällöin $\omega = \sqrt{k}$ ja siten reuna-arvotehtävä (61) saa muodon

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{62}$$

Yhtälöllä (62) on ei-triviaaleja ratkaisuja, jos ja vain jos

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

Nämä ratkaisut ovat muotoa

$$X(x) = A\sin(kx), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Toisaalta yhtälön

$$T'' + c^2\lambda T = 0$$

ratkaisut, kun $\lambda = k^2$, ovat

$$T(t) = B\cos(kct) + C\sin(kct).$$

Siten aaltoyhtälöllä (59) on ratkaisut

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = A_k\sin(kx)\left[B_k\cos(kct) + C_k\sin(kct)\right], \quad k \in \mathbb{N},$$

jotka toteuttavat reunaehdot

$$u_k(0,t) = u_k(\pi,t) = 0.$$

Ratkaisun u tulee vielä toteuttaa alkuehdot

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \qquad x \in [0,\pi].$$

Kyseiset ehdot eivät välttämättä toteudu edellä mainituilla ratkaisuilla u_k. Haetaan ratkaisua sarjayritteellä

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kx)\left[B_k \cos(kct) + C_k \sin(kct)\right].$$

Olettaen, että tästä sarjasta kaksi kertaa derivoimalla muuttujien x ja t suhteen saatu sarja suppenee tasaisesti, havaitaan, että $u(x,t)$ toteuttaa yhtälön (59) ja reunaehdot (60) kaikilla $t \geq 0$. Ehto

$$u(x,0) = u_0(x)$$

toteutuu, jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k \sin(kx) = u_0(x),$$

mikä on voimassa esimerkiksi jos $A_k = 1$ ja

$$B_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(t)\sin(kt)dt.$$

Ehto

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$$

toteutuu, jos ($A_k = 1$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} kc\sin(kx)\left[-B_k \sin 0 + C_k \cos 0\right] = u_1(x),$$

mikä on voimassa, jos

$$\sum_{k=1}^{\infty} kcC_k \sin(kx) = u_1(x),$$

eli, jos

$$C_k = \frac{2}{kc\pi}\int_0^{\pi} u_1(t)\sin(kt)dt.$$

Siis on löydetty jatkuva ratkaisu

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\left[\left(\int_0^{\pi} u_0(t)\sin(kt)dt\right)\cos(kct) + \left(\frac{1}{kc}\int_0^{\pi} u_1(t)\sin(kt)dt\right)\sin(kct)\right],$$

mikäli u_0 ja u_1 ovat sellaisia, että kyseessä olevasta sarjasta kaksi kertaa termeittäin osittaisderivoimalla saatu suppenee tasaisesti joukossa

$$\{(x,t) : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t < \infty\}.$$

Osa III

Fourier-muunnokset

17. Fourier-integraali

Jos Fourier-sarja suppenee, niin sen esittämä funktio on aina jaksollinen. Fourier-analyysiä voidaan kuitenkin soveltaa myös sellaisiin koko reaaliakselilla määriteltyihin funktioihin, jotka eivät ole jaksollisia.

Esimerkki 17.1. *Tarkastellaan kanttiaaltofunktiota, jolla on jaksona $2L > 2$, ja jolle pätee*

$$f_L(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } -L < x < -1 \\ 1, & \text{kun } -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{kun } 1 < x < L. \end{cases}$$

Antamalla $L \to \infty$, saadaan funktio, joka ei enää ole jaksollinen:

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Esimerkki 17.2. *Olkoon $f_L(x)$ funktio, jolla on jaksona $2L$, ja jolle pätee*

$$f_L(x) = e^{-|x|}, \quad \text{kun } -L < x < L.$$

Antamalla $L \to \infty$ saadaan jälleen funktio, joka ei ole jaksollinen:

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = e^{-|x|}.$$

Yleisemmin jokainen funktio voidaan esittää muodossa

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x),$$

missä funktio $f_L(x)$ on jaksollinen jaksonaan $2L$ ja

$$f_L(x) = f(x),$$

kun $-L < x < L$. Jos funktio $f(x)$ on riittävän säännöllinen, niin $f_L(x)$ voidaan esittää Fourier-sarjana kaikilla $L > 0$ muodossa

$$f_L(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Sijoittamalla tähän Fourier-kertoimien lausekkeet saadaan

$$\begin{aligned} f_L(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(t)dt + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(&\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\int_{-L}^{L} f_L(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt \\ &+ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\int_{-L}^{L} f_L(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt\Bigg). \end{aligned} \tag{63}$$

Olkoon F reaaliarvoinen funktio $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\int_0^\infty F(w)dw$$

on äärellisenä olemassa. Tällöin Riemannin integraali voidaan esittää raja-arvona

$$\int_0^\infty F(w)dw = \lim_{\Delta w \to 0} \sum_{n=1}^\infty F(w_n)\Delta w, \tag{64}$$

missä $\Delta w = w_{n+1} - w_n$ ja $w_{n+1} > w_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Pyritään käyttämään yhtälöä (64) Fourier-sarjan (63) tarkastelussa. Tätä varten merkitään

$$w_n = \frac{n\pi}{L},$$

jolloin

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{\pi}{L}$$

ja siis

$$\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}.$$

Täten

$$\begin{aligned} f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(t)dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \bigg(&\cos(w_n x)\, \Delta w \int_{-L}^{L} f_L(t) \cos(w_n t)\, dt \\ &+ \sin(w_n x)\, \Delta w \int_{-L}^{L} f_L(t) \sin(w_n t)\, dt \bigg). \end{aligned} \tag{65}$$

Jos integraali

$$\int_{-L}^{L} f_L(t)dt$$

pysyy rajoitettuna, kun $L \to \infty$, niin

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f_L(t)dt \to 0,$$

kun $L \to \infty$. Yhtälön (65) summatermissä $\Delta w = \pi/L \to 0$ ja $f_L(t) \to f(t)$, kun $L \to \infty$, joten *vaikuttaisi siltä*, että

$$\begin{aligned} f_L(x) \rightsquigarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \bigg(&\cos(wx) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt)\, dt \\ &+ \sin(wx) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt)\, dt \bigg) dw. \end{aligned}$$

Tätä kautta päädytään seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 17.3. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että integraalit*

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$$

ja

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$$

ovat olemassa ja äärellisiä. Tällöin integraalia

$$\widetilde{F}(x) = \int_{0}^{\infty} [A(w) \cos(wx) + B(w) \sin(wx)]\, dw$$

kutsutaan funktion f Fourier-integraaliksi.

Ennen Määritelmää 17.3 tehty päättely ei osoita sitä, että Fourier-integraalille pätee

$$\widetilde{F}(x) = f(x)$$

vaikka f olisikin hyvin käyttäytyvä funktio (esim. jatkuva). Rajankäynti $L \to \infty$ yhtälössä (65) on vaikea tehtävä. Ei ole lainkaan selvää, että yhtälön (65) oikean puolen jälkimmäinen termi lähestyy Fourier-integraalia $\widetilde{F}(x)$, kun $\Delta w \to 0$. Tarkempi analyysi antaa seuraavan riittävän ehdon.

Lause 17.4. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio siten, että myös derivaatta-funktio f' on paloittain jatkuva. Tällöin*

$$\widetilde{F}(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti, jos f on jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\widetilde{F}(x) = f(x).$$

Lause (17.4) on Dirichlet:n lauseen (Lause 4.6) vastine Fourier-integraaleille.

Esimerkki 17.5. *Olkoon*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < 1 \\ 0, & \text{kun } |x| \geq 1. \end{cases} \tag{66}$$

Etsitään funktion f Fourier-integraaliesitys.

Esimerkissä 17.5 askelfunktio (66) esitetään epäjatkuvuuskohtien ulkopuolella Fourier-integraalin avulla muodossa

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos(wx) \sin w}{w} dw,$$

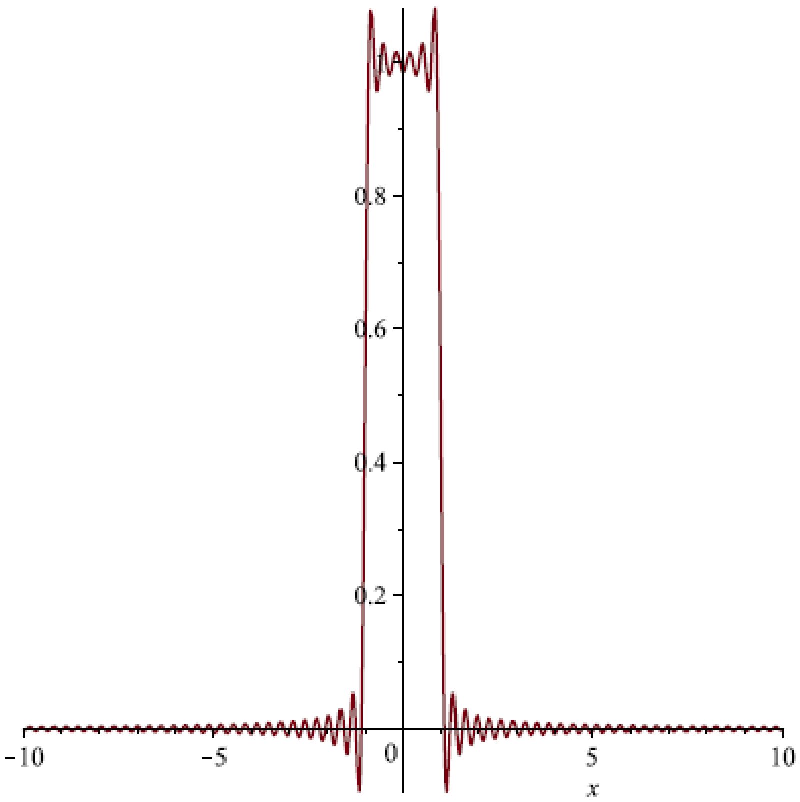
joka on epäoleellisen integraalin määritelmän nojalla

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} \frac{\cos(wx) \sin w}{w} dw.$$

Tästä seuraa, että funktiota $f(x)$ voi approksimoida integraalin

$$\frac{2}{\pi} \int_{0}^{a} \frac{\cos(wx) \sin w}{w} dw, \qquad a > 0,$$

avulla, vastaavasti kuin Fourier-sarjan osasummia voi käyttää jaksollisen funktion approksimointiin.



Kuva 5: Esimerkin 17.5 askelfunktion $f(x)$ Fourier-integraali osavälillä $[0, 20]$.

Sini- ja kosini-integraalit

Parillisten ja parittomien funktioiden tapauksessa Fourier-integraali yksinkertaistuu. Oletetaan ensin, että $f(x)$ on parillinen funktio ja tarkastellaan kertoimia $A(w)$ ja $B(w)$ Määritelmässä 17.3. Tällöin osoittautuu, että

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos(wt) dt \tag{67}$$

ja

$$B(w) = 0.$$

Toisin sanoen parillisen funktion $f(x)$ Fourier-integraali $\widetilde{F}(x)$ sievenee muotoon

$$\widetilde{F}(x) = \int_0^\infty A(w) \cos(wx) dw,$$

missä $A(w)$ on muotoa (67). Tämä on funktion f kosini-integraali.

Vastaavasti, jos $f(x)$ on pariton, niin Määritelmästä 17.3 saadaan

$$A(w) = 0$$

ja

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin(wt) dt. \tag{68}$$

Tällöin parittoman funktion $f(x)$ Fourier-integraali $\widetilde{F}(x)$ sievenee sini-integraaliksi

$$\widetilde{F}(x) = \int_0^\infty B(w) \sin(wx) dw,$$

missä $B(w)$ on muotoa (68).

Esimerkki 17.6 (Laplacen integraali). *Etsitään Fourier sini- ja kosini-integraalit funktiolle*

$$f(x) = e^{-kx}, \qquad k > 0,$$

kun $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

18. Fourier sini- ja kosinimuunnokset

Kosinimuunnos

Parillisen funktion $f(x)$ Fourier-integraali voidaan esittää kosini-integraalina muodossa

$$\widetilde{F}(x) = f(x) = \int_0^\infty A(w)\cos(wx)dw, \tag{69}$$

missä

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos(wt)dt. \tag{70}$$

Yhtälössä (69) on oletettu, että funktio $f(x)$ on jatkuva ja toteuttaa Lauseen 17.4 oletukset. Tämä siksi, että yhtäsuuruus $\widetilde{F}(x) = f(x)$ saadaan olemaan voimassa. Määritellään

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}A(w),$$

jolloin

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos(wt)dt. \tag{71}$$

Toisaalta

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_c(w)\cos(wx)dw. \tag{72}$$

Määritelmä 18.1. *Funktio $\hat{f}_c(w)$ yhtälössä* (71) *on funktion $f(x)$ Fourier kosinimuunnos.*

Muodostamalla funktion $\hat{f}_c(w)$ kosinimuunnos, päädytään yhtälön (72) nojalla takaisin alkuperäiseen funktioon $f(x)$.

Sinimuunnos

Parittoman funktion $f(x)$ Fourier-integraali voidaan esittää sini-integraalina muodossa

$$\widetilde{F}(x) = f(x) = \int_0^\infty B(w)\sin(wx)dw, \tag{73}$$

missä

$$B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\sin(wt)dt. \tag{74}$$

Yhtälössä (73) on oletettu, että funktio $f(x)$ on jatkuva ja toteuttaa Lauseen 17.4 oletukset. Määritellään

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}B(w),$$

jolloin

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin(wt)dt. \tag{75}$$

Toisaalta

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \hat{f}_s(w)\sin(wx)dw. \tag{76}$$

Määritelmä 18.2. *Funktio* $\hat{f}_s(w)$ *yhtälössä* (75) *on funktion* $f(x)$ *Fourier sinimuunnos.*

Muodostamalla funktion $\hat{f}_s(w)$ sinimuunnos, päädytään yhtälön (76) nojalla takaisin alkuperäiseen funktioon $f(x)$.

Kosini- ja sinimuunnoksille käytetään myös merkintöjä

$$\mathcal{F}_c(f) = \hat{f}_c \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{F}_s(f) = \hat{f}_s.$$

Käänteismuunnosta merkitään vastaavasti

$$\mathcal{F}_c^{-1}(f) \qquad \text{ja} \qquad \mathcal{F}_s^{-1}(f).$$

Esimerkki 18.3. *Olkoon*

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{kun } 0 < x < a \\ 0 & \text{kun } x \geq a. \end{cases}$$

Etsi funktion $f(x)$ *Fourier sini- ja kosinimuunnokset.*

Lineaarisuus

Fourier sini- ja kosinimuunnosten olemassaolo on taattu, jos $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ on paloittain jatkuva funktio siten, että integraali

$$\int_0^\infty |f(x)| dx$$

suppenee. Jos edellä mainittu suppenemisehto on voimassa funktiolle $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, niin tällöin merkitään $f \in L^1(0, \infty)$.

Lemma 18.4. *Olkoon* $a, b \in \mathbb{R}$, *ja olkoot* f *ja* g *paloittain jatkuvia funktioita siten, että* $f, g \in L^1(0, \infty)$. *Tällöin*

(i) $\mathcal{F}_c(af + bg) = a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g)$

(ii) $\mathcal{F}_s(af + bg) = a\mathcal{F}_s(f) + b\mathcal{F}_s(g)$.

Toisin sanoen Fourier sini- ja kosinimuunnokset ovat lineaarisia operaatioita. Tämän lisäksi ne muuntavat tietyssä tilanteessa derivoinnin algebralliseksi operaatioksi, kuten seuraava lause näyttää.

Lause 18.5. *Olkoon* $f : [0, \infty) :\to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio siten, että* $f \in L^1[0, \infty)$ *ja olkoon sen derivaattafunktio* $f' : [0, \infty) :\to \mathbb{R}$ *paloittain jatkuva. Jos*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0,$$

niin

(a) $\mathcal{F}_c(f') = w\mathcal{F}_s(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$

(b) $\mathcal{F}_s(f') = -w\mathcal{F}_c(f)$.

Soveltamalla Lausetta 18.5 kaksi kertaa saadaan algebralliset kaavat myös toisen asteen derivaatoille, edellyttäen että myös derivaattafunktio f' toteuttaa Lauseen 18.5 ehdot. Tällöin saadaan

(a2) $\mathcal{F}_c(f'') = -w^2\mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$

(b2) $\mathcal{F}_s(f'') = -w^2\mathcal{F}_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0)$.

Esimerkki 18.6. *Etsi* $\mathcal{F}_c(f)$, *kun* $f(x) = e^{-ax}$ *ja* $a > 0$.

19. Fourier-muunnos

Kompleksinen Fourier-integraali

Reaalimuuttujan kompleksiarvoisten funktioiden integrointi noudattaa lähes identtisesti samoja sääntöjä kuin reaalifunktioiden integrointi. Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on muotoa

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

missä $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin esimerkiksi

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

kun määritellään

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Edelleen

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx, \qquad \alpha \in \mathbb{C},$$

ja tulon derivoimiskaavasta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

seuraa osittaisintegroinnin kaava

$$\int_a^b fg'dx = \Big/_{\!a}^{\!b} fg - \int_a^b f'gdx$$

kompleksiarvoisille funktioille f ja g.

Esimerkki 19.1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(e^{iax}\right) &= \frac{d}{dx}(\cos(ax) + i\sin(ax)) \\
&= -a\sin(ax) + ia\cos(ax) \\
&= ia\cos(ax) + i^2 a\sin(ax) \\
&= ia(\cos(ax) + i\sin(ax)) \\
&= iae^{iax}.
\end{aligned}$$

Ennen kuin varsinaiseen kompleksiseen Fourier-muunnokseen päästään kiinni, tarvitaan kompleksisen Fourier-integraalin käsite.

Määritelmä 19.2. *Integraalia*

$$\widehat{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(wx-wt)}dt\right]dw$$

kutsutaan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kompleksiseksi Fourier-integraaliksi edellyttäen, että se on äärellisenä olemassa.

Jos oletetaan, että funktio $f(x)$ on riittävän säännöllinen, jotta

$$f(x) = \widetilde{F}(x),$$

missä $\widetilde{F}$ on funktion f (reaalinen) Fourier-integraali, niin tällöin vastaava yhtälö pätee myös kompleksiselle Fourier-integraalille. Erityisesti on voimassa seuraava versio Dirichlet:n lauseesta (Lause 4.6).

Lause 19.3. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio siten, että myös derivaattafunktio f' on paloittain jatkuva. Tällöin*

$$\widehat{F}(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti, jos f on jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin

$$\widehat{F}(x) = f(x).$$

Fourier-muunnos

Määritellään

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt, \tag{77}$$

jolloin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw. \tag{78}$$

Määritelmä 19.4. *Funktio $\hat{f}(w)$ yhtälössä (77) on funktion $f(x)$ Fourier-muunnos.*

Jos Fourier-muunnos $\hat{f}(w)$ on tiedossa, niin lähtöfunktio $f(x)$ saadaan selville yhtälön (78) avulla. Sanotaan, että $f(x)$ on Fourier-muunnoksen $\hat{f}(w)$ kääntеinen Fourier-muunnos. Vaihtoehtoisesti merkitään

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$$

ja käänteismuunnosta symbolilla $\mathcal{F}^{-1}$.

Dirichlet:n konvergenssilauseen integroitu versio saadaan Fourier-muunnoksen avulla seuraavaan muotoon.

Lause 19.5. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio siten, että myös derivaattafunktio f' on paloittain jatkuva. Tällöin*

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti, jos f on jatkuva pisteessä $x \in \mathbb{R}$, niin

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw.$$

Esimerkki 19.6. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muotoa*

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{kun } 0 < x < a \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Etsi funktion f Fourier-muunnos.

Huomautus. Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on parillinen funktio, niin

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}_c(f).$$

Toisaalta, jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on pariton, niin

$$\mathcal{F}(f) = -i\mathcal{F}_s(f).$$

Tästä seuraa, että parillisen reaalifunktion Fourier-muunnos on reaalinen, mutta parittoman reaalifunktion Fourier-muunnos on puhtaasti imaginäärinen.

Esimerkki 19.7. *Laske funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = e^{-ax^2}, \qquad a > 0,$$

Fourier-muunnos.

Fourier-muunnos on lineaarinen operaatio.

Lause 19.8. *Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellaisia funktioita, joiden Fourier-muunnokset ovat olemassa. Tällöin*

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g).$$

Myös yleisen Fourier-muunnoksen avulla derivointi saadaan tietyissä olosuhteissa muutettua algebralliseksi operaatioksi. Itse asiassa tällöin saatava algebrallinen derivointikaava on yksinkertaisempi yleisen Fourier-muunnoksen tapauksessa, kuin sini- ja kosinimuunnoksilla.

Lause 19.9. *Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio siten, että myös derivaattafunktio f' on paloittain jatkuva. Tällöin, jos lisäksi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty,$$

ja

$$f(x) \to 0, \quad \text{kun} \quad x \to \pm\infty,$$

niin

$$\mathcal{F}(f'(x)) = iw\mathcal{F}(f(x))$$

Soveltamalla Lausetta 19.9 kaksi kertaa peräkkäin, saadaan

$$\mathcal{F}(f'') = -w^2 \mathcal{F}(f) \tag{79}$$

olettaen että myös derivaattafunktio f' toteuttaa lauseen ehdot.

Esimerkki 19.10. *Tarkastellaan x-akselilla sijaitsevaa äärettömän pitkää homogeenista kaapelia, jonka pinta on eristetty ja jonka lämpötila kohdassa x ajan hetkellä t on $u(x,t)$. Oletetaan, että*

$$u(x,0) = f(x) \tag{80}$$

ja että kaikilla muuttujan t arvoilla

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = 0.$$

Määritetään kaapelin lämpötila kohdassa x hetkellä t. Funktio $u(x,t)$ toteuttaa 1-ulotteisen lämpöyhtälön

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \tag{81}$$

missä $c \in \mathbb{R}$ on vakio. Pidetään t kiinnitettynä ja muodostetaan yhtälön (81) vasemman ja oikean puolen määrittelemien x:n funktioiden Fourier-muunnokset. Käyttämällä kaavaa (79) saadaan tällöin

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right) = c^2 \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\right) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u).$$

Toisaalta

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) e^{-iwx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx} dx \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}(u),
\end{aligned}$$

mikäli derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto on sallittua. Funktiolle $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$ saadaan näin ollen differentiaaliyhtälö

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2 w^2 \hat{u}.$$

Jokaisella kiinteällä muuttujan w arvolla tämä yhtälö voidaan ratkaista erottamalla muuttujat. Tulos on

$$\hat{u}(w,t) = C(w) e^{-c^2 w^2 t}, \tag{82}$$

missä integroimisvakio $C(w)$ riippuu muuttujan w arvosta. Alkuehdosta (80) seuraa muodostamalla puolittain Fourier-muunnokset

$$\hat{u}(w,0) = \mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(w),$$

joten sijoittamalla $t = 0$ yhtälössä (82) saadaan

$$\hat{u}(w, 0) = C(w) = \hat{f}(w),$$

josta edelleen

$$\hat{u}(w, t) = \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}.$$

Pitämällä edelleen t kiinteänä tästä saadaan käänteinen Fourier-muunnos (kaava (78))

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}dw.$$

Konvoluutio

Jos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on sellainen funktio, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

niin merkitään $f \in L^1(-\infty, \infty)$. Määritellään konvoluutio yli koko reaaliakselin seuraavasti.

Määritelmä 19.11. *Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellaisia funktiota, että $f, g \in L^1(-\infty, \infty)$ ja joko f tai g on rajoitettu. Tällöin konvoluutio on kuvaus*

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt.$$

Vakio $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ on skaalausvakio, joka jätetään usein pois konvoluution määritelmästä.

Huomautus. Määritelmän 19.11 oletukset takaavat sen, että $f * g$ on hyvin määritelty, toisin sanoen, että integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt$$

suppenee. Täsmällinen suppenemistarkastelu sivuutetaan.

Lause 19.12. *Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sellaisia funktiota, että $f, g, h \in L^1(-\infty, \infty)$ ja g ja h ovat rajoitettuja. Tällöin*

(i) $f * g = g * f$ *(kommutatiivisuus),*

(ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$ *(osittelulaki),*

(iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ *(assosiatiivisuus).*

Lause 19.13 (Konvoluutiolause). *Oletetaan, että $f, g \in L^1(-\infty, \infty)$ ja että f ja g ovat paloittain jatkuvia ja rajoitettuja. Tällöin*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g).$$

Konvoluutio $f * g$ voidaan ilmaista myös Fourier-muunnosten $\mathcal{F}(f)$ ja $\mathcal{F}(g)$ avulla. Koska Konvoluutiolauseen nojalla

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g),$$

niin

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\right],$$

eli

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw,$$

missä on käytetty merkintöjä $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ ja $\mathcal{F}(g) = \hat{g}$.

Esimerkki 19.14. *Laske funktion*

$$f(x) = e^{-|x|}$$

konvoluutio itsensä kanssa.

Esimerkki 19.15 (Laplace-yhtälö). *Ratkaise alkuarvotehtävä*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R},y>0} (1+x^2)|u(x,y)| < \infty \quad . \end{cases}$$

20. Diskreetti Fourier-muunnos

Jos Dirichlet:n lauseen (Lause 4.6) ehdot ovat voimassa, niin funktion $f(x)$ Fourier-sarja suppenee ja esittää funktiota $f(x)$ kokonaisella välillä. Tätä vastaava diskreetti ongelma voidaan muotoilla seuraavasti.

Etsi trigonometrinen polynomi, joka saa annetut arvot äärellisen monessa annetussa pisteessä.

Tarkastellaan tätä kysymystä ensin esimerkin kautta.

Esimerkki 20.1. *Etsitään muotoa*

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + c_2 e^{2ix} + c_3 e^{3ix} \tag{83}$$

oleva trigonometrinen polynomi, joka saa pisteissä $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$, $x = 3\pi/2$ *vastaavat arvot* 2, 4, 6 *ja* 8. *Toisin sanoen* $p(x)$ *toteuttaa*

$$\begin{cases} p(0) = 2 \\ p(\pi/2) = 4 \\ p(\pi) = 6 \\ p(3\pi/2) = 8. \end{cases}$$

Edellisen esimerkin mukainen trigonometrinen interpolointitehtävä voidaan ratkaista samaan tapaan myös tilanteessa, jossa solmupisteitä ja tuntemattomia polynomin kertoimia on n kappaletta. Tällöin etsitään muotoa

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{ikx}$$

olevaa trigonometristä polynomia, joka saa solmupisteissä

$$\frac{2\pi j}{n}$$

annetut arvot f_j, missä $0 \le j \le n-1$. Ratkaistavana on siis yhtälöryhmä

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{2\pi ijk/n} = f_j, \qquad 0 \le j \le n-1.$$

Sijoittamalla

$$w_n = e^{2\pi i/n}$$

tämä yhtälöryhmä saa muodon

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk} = f_j, \qquad 0 \le j \le n-1.$$

Sen kerroinmatriisi F_n on tyyppiä $n \times n$ ja F_n:n jk:s alkio on

$$w_n^{(j-1)(k-1)}.$$

Käänteismatriisi saadaan yhtälöstä

$$F_n^{-1} = \frac{1}{n}\overline{F}_n, \qquad (ts.\ \overline{F}_n F_n = nI), \tag{84}$$

missä matriisin $\overline{F}_n$ jk:s alkio on

$$\overline{w}_n^{(j-1)(k-1)}. \tag{85}$$

Systeemin

$$F_n c = f$$

ratkaisu on siis

$$c = F_n^{-1} f = \frac{1}{n}\overline{F}_n f. \tag{86}$$

Tämä on oleellisesti jonon $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ diskreetti Fourier-muunnos. Täsmällinen määritelmä esitetään alla.

Komponenteittain kirjoitettuna (86) on

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \overline{w}_n^{jk} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-2\pi ijk/n}. \tag{87}$$

Tämä on jatkuvan funktion Fourier-sarjan kertoimen

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

diskreetti analogia. Yhtälön (87) oikea puoli on myös edellisen integraalin likiarvo.

Diskreetin Fourier-muunnoksen määritelmää varten tarvitaan jaksollisen jonon käsitettä.

Määritelmä 20.2. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Jono*

$$\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

on n-periodinen (tai n-jaksollinen), jos

$$x(j+n) = x(j)$$

kaikilla $j \in \mathbb{Z}$.

Määritellään edellisen tarkastelun pohjalta diskreetti Fourier-muunnos täsmällisesti.

Määritelmä 20.3. *Olkoon jono $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ n-periodinen. Tällöin jonon $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ diskreetti Fourier kerroin on*

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x(j)e^{-2\pi ijk/n}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{88}$$

Jono

$$\{\hat{x}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

on jonon $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ diskreetti Fourier-muunnos.

Huomautus 20.4. *Diskreetti Fourier-muunnos on n-jaksollinen, aina kun lähtöjono on n-jaksollinen.*

Seuraavaksi etsitään kaava diskreetin Fourier-muunnoksen käänteismuunnokselle.

Lause 20.5. *Olkoon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ n-periodinen jono, jonka diskreetti Fourier-muunnos on $\{\hat{x}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$. Tällöin*

$$x(j) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}(k) e^{2\pi ijk/n}$$

kaikille $j = 0, \dots, n-1$.

Kirjallisuudessa on diskreetti Fourier muunnos on usein määritelty ilman skaalausvakiota $1/n$ kaavassa (88). Tällöin vakio $1/n$ ilmestyy Lauseen 20.5 kaavaan. Skaalausvakioksi voidaan asettaa myös $1/\sqrt{n}$, jolloin se esiintyy molemmissa kaavoissa.

Otetaan seuraavaksi konkreettiset esimerkit diskreetin Fourier-muunnoksen, sekä sen käänteismuunnoksen, laskemisesta.

Esimerkki 20.6. *Olkoon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ 4-periodinen jono siten, että*

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ x(1) = 3 \\ x(2) = -1 \\ x(3) = 1. \end{cases}$$

Toisin sanoen,

$$\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, 2, 3, -1, 1, 2, 3, -1, 1, \dots\}.$$

Etsi jonon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ diskreetti Fourier-muunnos.

Esimerkki 20.7. *Olkoon $\{\hat{x}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ 4-periodinen jono siten, että*

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = \frac{5}{4} \\ \hat{x}(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i \\ \hat{x}(2) = -\frac{3}{4} \\ \hat{x}(3) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

Toisin sanoen,

$$\{\hat{x}(k) : k \in \mathbb{Z}\} = \left\{\dots, \frac{5}{4}, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i, \frac{5}{4}, \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{2}i, \dots\right\}.$$

Etsi jonon $\{\hat{x}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ diskreetti Fourier-käänteismuunnos.

Huomautus 20.8. *Jos jono $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ on n-periodinen, niin*

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=q}^{n+q-1} x(j) e^{-2\pi ijk/n} \tag{89}$$

ja

$$x(j) = \sum_{k=q}^{n+q-1} \hat{x}(k) e^{2\pi i jk/n} \tag{90}$$

kaikille $q \in \mathbb{Z}$. Erityisesti, jos $n = 2M + 1$ ja $q = -M$, missä $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, niin

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{n} \sum_{j=-M}^{M} x(j) e^{-2\pi i jk/n} \tag{91}$$

ja

$$x(j) = \sum_{k=-M}^{M} \hat{x}(k) e^{2\pi i jk/n}. \tag{92}$$

Otetaan taas käyttöön merkintä

$$w_n = e^{2\pi i/n}$$

yhtälöiden käsittelyn yksinkertaistamiseksi (vrt. yhtälö (85) edellä). Seuraavassa lauseessa on lueteltu joitakin keskeisiä diskreetin Fourier-muunnoksen ominaisuuksia.

Lause 20.9. *Olkoot $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ ja $\{y(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ reaalisia n-periodisia jonoja. Tällöin*

1. $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x(j) y(m-j) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}(k) \hat{y}(k) w_n^{mk}$ *kaikilla $m \in \mathbb{Z}$ (konvoluutiolause)*
2. $\widehat{x_{m_0}}(k) = \hat{x}(k) w_n^{-m_0 k}$, *missä $x_{m_0}(j) := x(j - m_0)$ (siirto-ominaisuus)*
3. $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x(j) \overline{y(j)} = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{x}(k) \overline{\hat{y}(k)}$ *(Parseval)*
4. $\displaystyle \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |x(j)|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}(k)|^2$ *(Energialause)*

Nopea Fourier-muunnos (FFT)

Diskreettiä Fourier-muunnosta laskettaessa on määrättävä kutakin $k = 0, \ldots, N-1$ kohti summa

$$\begin{aligned}
\hat{x}(k) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x(j) e^{-2\pi i jk/n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x(j) w_n^{-jk} \\
&= \frac{1}{n} \left[x(0) + x(1) w_n^{-k} + \cdots + x(n-1) w_n^{-k(n-1)} \right].
\end{aligned} \tag{93}$$

Lausekkeita $\hat{x}(0), \ldots \hat{x}(n-1)$ laskettaessa tulee siis tehdä $(n-1)^2+n$ kertolaskua. Seuraava lause antaa keinon vähentää laskutoimitusten määrää oleellisesti.

Otetaan käyttöön merkinnät $x_e(j) := x(2j)$ ja $x_o(j) := x(2j+1)$, missä $j \in \mathbb{Z}$.

Lause 20.10. *Olkoon $n = 2M$, missä $M \in \mathbb{N}$. Tällöin*

$$\hat{x}(k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x_e(j) w_M^{-jk} + w_n^{-k}\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x_o(j) w_M^{-jk}\right)$$

kaikilla $k = 0, \ldots, n-1$.

Merkitään

$$\hat{x}_e(k) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x_e(j) w_M^{-jk}$$

ja

$$\hat{x}_o(k) = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x_o(j) w_M^{-jk}.$$

Kun $n = 2M$, niin laskemalla diskreetit Fourier-muunnokset $\hat{x}(0), \ldots, \hat{x}(n-1)$ kaavalla (93) tarvitaan

$$m_1 = (2M-1)^2 + 2M = 4M^2 - 2M + 1 \approx 4M^2$$

kertolaskua. Käyttämällä Lausetta 20.10 lasketaan aluksi

$$\frac{1}{2}\hat{x}_e(k) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}\hat{x}_o(k),$$

jolloin $\hat{x}(k)$: n laskemiseen, kun $k = 0, \ldots, n-1$, tarvitaan

$$m_2 = 2(M-1)^2 + 4M + 1 = 2M^2 + 3 \approx 2M^2$$

kertolaskua, sillä $\{\hat{x}_e(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ja $\{\hat{x}_o(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ovat M-periodisia. Siten suurilla M:n arvoilla kertolaskujen lukumäärä likimäärin puolittuu.

Oletetaan nyt, että $n = 2^s$. Jatkamalla edellä olevaa tarkastelua induktiivisesti, on osoitettavissa, että suurilla s:n arvoilla

$$F(n) \approx n \log_2 n,$$

missä $F(n)$ on kertoimien $\hat{x}(0), \ldots, \hat{x}(n-1)$ laskemiseen tarvittavien kertolaskujen lukumäärä. Suoraan kaavalla laskettaessa

$$F(n) \approx n^2,$$

joten Lauseen 20.10 avulla laskutoimituksia voidaan vähentää oleellisesti. Vastaava menetelmä soveltuu myös käänteisen diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseen. Lauseeseen 20.10 perustuvaa nopeaa algoritmia diskreetin Fourier-muunnoksen laskemiseksi kutsutaan nopeaksi Fourier-muunnokseksi (FFT). Nopea Fourier-muunnos on muun muassa Matlab-ohjelmistossa sisäänrakennettuna.

Fourier-sarjan approksimointi

Tarkastellaan seuraavassa funktion arvojen likimääräistä laskemista niin sanotuissa "otospisteissä" tai "solmupisteissä" (vrt. Esimerkki 20.1), kun Fourier-kertoimet c_k tunnetaan välillä

$$-M \leq k \leq M.$$

Olkoon

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{94}$$

missä

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

(esimerkiksi, kun Dirichlet:n lauseen oletukset ovat voimassa, niin (94) on voimassa laajassa $\mathbb{R}$:n osajoukossa).

Olkoon $n = 2M + 1$ ja katkaistaan sarja (94), kun $|k| > M$, jolloin

$$f(x) \approx \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx} =: S_M(x).$$

Tarkastellaan osasummaa $S_M(x)$ "otospisteissä"

$$x_l = -\pi + l \cdot \frac{2\pi}{n}$$

välillä $[-\pi, \pi]$. Tällöin havaitaan, että

$$\begin{aligned} S_M(x_l) &= \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{ikx_l} \\ &= \sum_{k=-M}^{M} c_k e^{2\pi ikl/n} e^{-ik\pi} \\ &= \sum_{k=-M}^{M} (-1)^k c_k w_n^{kl}. \end{aligned}$$

Otosarvot $f(x_l)$ saadaan siis likimäärin laskettua relaatiosta

$$f(x_l) \approx S_M(x_l) = \sum_{k=-M}^{M} (-1)^k c_k w_n^{kl}, \quad l = 0, \ldots, n-1. \tag{95}$$

Tarkastellaan kääntäen Fourier-kertoimien c_k laskemista otosarvojen avulla. Koska $n = 2M + 1$, niin samalla tavoin kuin Lauseessa 20.5 havaitaan, että relaatiosta (95) seuraa

$$(-1)^k c_k = \frac{1}{2M+1} \sum_{l=0}^{2M} S_M(x_l) w_n^{-kl}, \quad k = -M, \ldots, M. \tag{96}$$

Erityisesti, kun $n = 2M + 1$ havaitaan, että yhtälön (96) oikea puoli määrittelee jonon

$$\{S_M(x_l) : 0 \leq l \leq n - 1\}$$

periodisen jatkon diskreetin Fourier-muunnoksen ja (95) on sen diskreetti Fourier-käänteismuunnos. Käytännössä yhtälö (96) korvataan likimääräisellä kaavalla

$$(-1)^k c_k \approx \frac{1}{2M+1} \sum_{l=0}^{2M} f(x_l) w_n^{-kl}, \quad k = -M, \ldots, M, \tag{97}$$

josta Fourier-kertoimet ja diskreetti Fourier-muunnos voidaan laskea otosarvojen $f(x_l)$ nojalla likimäärin. Kaavat (95) ja (97) ovat tarkkoja, jos $f(x) = S_M(x)$, toisin sanoen, jos f on trigonometrinen polynomi.

21. Fourier-käänteismuunnoslause

Tässä luvussa todistetaan Lauseen 19.5 yleistys. Tätä varten tarvitaan ensin hieman esitietoja.

Määritelmä 21.1. *Olkoon f kuvaus $[a,b] \to \mathbb{C}$, missä $a < b$. Tällöin f on rajoitetusti heilahteleva välillä $[a,b]$, jos on olemassa $M > 0$ siten, että*

$$\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

kaikille välin $[a,b]$ jaoille $P = \{x_0, \ldots, x_m\}$.

Esimerkki 21.2. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja derivoituva funktio kailla $x \in [a,b]$ siten, että*

$$|f'(x)| \leq A < \infty, \qquad x \in (a,b).$$

Tällöin f on rajoitetusti heilahteleva välillä $[a,b]$. Nimittäin, jos

$$P = \{x_0, \ldots, x_m\}$$

on mielivaltainen välin $[a,b]$ jako, niin väliarvolauseen nojalla

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{m} |f'(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq A \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \\ &= A(b-a) < \infty,\end{aligned}$$

missä $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ kaikilla $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Lause 21.3. *Funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on rajoitetusti heilahteleva, jos ja vain jos on olemassa kasvavat funktiot $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ siten, että*

$$f = g_1 - g_2.$$

Huomautus 21.4. *Edellisen lauseen esitys rajoitetusti heilahtelevalle funktiolle ei ole yksikäsitteinen, koska*

$$f = (g_1 + g) - (g_2 + g),$$

missä $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ on mielivaltainen kasvava funktio.

Seuraus 21.5. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ rajoitetusti heilahteleva. Tällöin raja-arvot $f(a_+)$ ja $f(b_)$ ovat äärellisinä olemassa. Lisäksi raja-arvot $f(x_\pm)$ ovat äärellisinä olemassa kaikille $x \in (a,b)$.*

Seuraava lause on Lauseen 19.5 yleistys.

Lause 21.6 (Fourier-integraalilause). *Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$, ja olkoon $f \in L^1(-\infty, \infty)$ rajoitetusti heilahteleva välillä $[x-\delta, x+\delta]$. Tällöin*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(\xi(t-x))dt\right)d\xi = \frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right).$$

Muuntamalla Fourier-integraalilause alla olevaan kompleksiseen muotoon ja käyttämällä Esimerkkiä 21.2, Lauseen 19.5 väite seuraa.

Seuraus 21.7. *Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$, ja olkoon $f \in L^1(-\infty, \infty)$ rajoitetusti heilahteleva välillä $[x-\delta, x+\delta]$. Tällöin*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2}\left(f(x_+) + f(x_-)\right).$$

Lemma 21.8 (Riemann-Lebesgue). *Olkoon f Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, missä $a < b$. Tällöin*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\alpha x)dx = 0.$$

Lisäksi, jos $f \in L^1(-\infty, \infty)$, niin

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx = 0.$$

Lause 21.9 (Jordan). *Olkoon $f : [0,\delta]$ rajoitetusti heilahteleva. Tällöin*

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\delta f(t)\frac{\sin(\alpha t)}{t}dt = f(0_+).$$