Fourier-analyysin peruskurssi
Kertaustehtäviä: luvut 1–12

1. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in (-\pi, 0] \\ \sin x & \text{kun } x \in (0, \pi] \end{cases}.$$

Muodosta funktion f Fourier-sarja

2. Olkoot a_n ja b_n funktion $f(x)$ Fourier-kertoimet ja olkoon $k \in \mathbb{R}$ vakio. Osoita, että funktiolla $kf(x)$ on Fourier-kertoimet ka_n ja kb_n.

3. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan $2L$ siten, että

$$f(x) = \begin{cases} x + L, & \text{kun } x \in (-L, 0] \\ 0, & \text{kun } x \in (0, L]. \end{cases}$$

Muodosta funktion f Fourier-sarja.

4. Muodosta funktion $f(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1]$, kosiniterminen Fourier-sarja etsimällä ensin sopiva funktion $f(x)$ parillinen laajennus.

5. Olkoon

$$\phi_n(x) = (2/l)^{1/2} \sin(n - \frac{1}{2})(\pi x/l),$$

missä $x \in [0, l]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että joukko

$$\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

on ortonormaali välillä $[0, l]$.

6. Olkoon f jaksollinen funktio jaksonaan 2π siten, että $f(x) = e^{|x|}$, kun $-\pi < x \leq \pi$. Muodosta funktion f kompleksiterminen Fourier-sarja.

7. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jaksollisia 2π-jaksoisia funktioita siten, että $f, g \in L^1[-\pi, \pi]$. Osoita, että $f * g$ on jatkuva, jos f tai g on jatkuva.

8. Fejérin lause (monisteen Lause 12.6) sanoo, että pisteessä $x \in [-\pi, \pi]$ jatkuvalle ja välillä $[-\pi, \pi]$ rajoitetulle funktiolle f pätee

$$\sigma_N(x) \to f(x),$$

kun $N \to \infty$. Näytä, että oletusta jatkuvuudesta ei voi poistaa Fejérin lauseessa. *Vihje:* Voit käyttää apuna esim. funktiota

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t \neq 0, \quad t \in [-\pi, \pi] \\ 1, & \text{kun } t = 0. \end{cases}$$

9. Osoita, että mielivaltaisille (kompleksisille) trigonometrisille polynomeille P ja Q pätee
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)Q(mt)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q(t)dt,$$
aina kun $m \in \mathbb{Z}$ on riittävän suuri. *Vihje:* Käytä tietoa $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 0$, kun $n \neq 0$, ja $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 1$, kun $n = 0$.

10. Olkoon P on trigonometrinen polynomi ja $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Osoita soveltamalla tehtävää 9, että
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)g(mt)dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(t)dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt,$$
kun $m \to \infty$. *Vihje:* Muodosta monisteen Lauseen 12.8 avulla jono trigonometrisiä polynomeja $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ siten, että $Q_n \to g$ tasaisesti, kun $n \to \infty$.