Fourier-analyysin peruskurssi
Kertaustehtäviä: luvut 13–21

Käytä tehtävissä 1–3 hyväksi 5. laskuharjoitusten tehtäviä 3–5.

1. Olkoon f jatkuva funktio välillä $[0,1]$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Osoita, että on olemassa $M > 0$ siten, että funktiolle

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{m=1}^{M} f(m/M)\chi_{[(m-1)/M, m/M)}(x)$$

pätee

$$\sup_{x\in[0,1)} |f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Vihje: Koska f on jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$, niin se on itse asiassa tasaisesti jatkuva samalla välillä $[0,1]$.

2. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$ ja olkoon f jatkuva välillä $[0,1]$. Osoita käyttämällä apuna tehtävää 1, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\eta_n) = \int_0^1 f(x)dx.$$

3. Olkoon $(\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots)$ tasan jakautunut välille $[0,1)$. Osoita käyttämällä apuna tehtävää 2, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\eta_n} = 0$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. (Tämä tulos on yksi suunta Weylin kriteeristä.)

4. Muodosta funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 < x < a \\ 0, & \text{kun } x \geq a \end{cases}$$

kosini-integraaliesitys.

5. Etsi funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ix}, & \text{kun } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Fourier-muunnos.

6. Olkoon $f(x) = e^{-x^2}$ ja $g(x) = e^{-2x^2}$. Laske $f * g$.

7. Olkoon $g \in L^1(-\infty,\infty)$. Etsi Fourier-muunnoksen avulla tavallisen differentiaaliyhtälön

$$u'' - u + 2g(x) = 0 \tag{1}$$

ratkaisu. Tällä tavoin etsitty ratkaisu lähestyy kohti nollaa, kun $x \to \pm\infty$. Mikä on yhtälön yleinen ratkaisu?

8. Etsi eri menetelmillä muotoa

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} \tag{2}$$

oleva trigonometrinen polynomi siten, että $P(0) = f_0$ ja $P(\pi) = f_1$, missä $f_0, f_1 \in \mathbb{R}$.

9. Olkoon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ 4-periodinen jono siten, että

$$\begin{cases} x(0) = -1 \\ x(1) = 0 \\ x(2) = 1 \\ x(3) = 0. \end{cases}$$

Etsi jonon $\{x(j) : j \in \mathbb{Z}\}$ diskreetti Fourier-muunnos.

10. Olkoon $f \in L^1(-\infty, \infty)$ Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, missä $a < b$. Osoita, että tällöin

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = 0.$$

(Tämä on Riemann-Lebesguen lemman, Lemma 21.8, toinen osa.)