

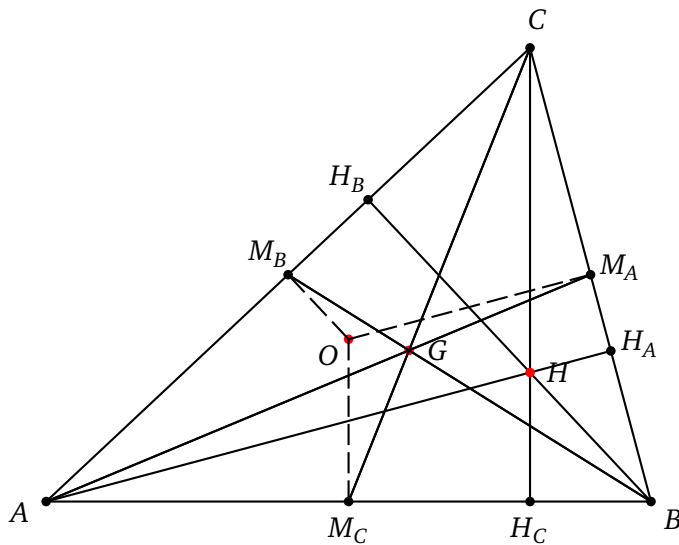
GEOMETRIA

Lyhyt kurssi

Tero Harju
1989 – 2012

Matematiikan laitos
Turun Yliopisto

<http://users.utu.fi/harju>



Aluksi

Intuitiivinen geometria

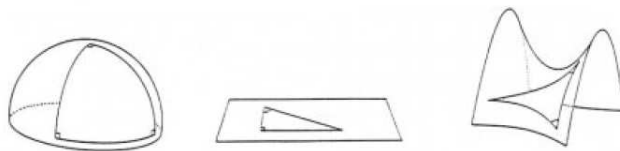
Tällä kurssilla keskitytään *Euklidiseen tasogeometriaan*. Lähestymistapa siihen on *intuitiivinen* eli *koulugeometrinen*, mikä tarkoittaa, että sopiva joukko käsitteiden merkityksiä ja niitä koskevia tuloksia oletetaan tunnetuiksi. Tällaisia käsitteitä ovat mm: *piste, suora, jana, janan pituus, kulma, kulman suuruus, kolmio, ja ympyrä*.

Samalla kurssin tarkoitus on johdatella *ongelmanratkaisuun* matematiikassa. Tähän tasogeometria soveltuu hyvin, sillä vaikeampiinkin ongelmiin päästään käsiksi ilman pitkällistä teorian kehittelyä. Toisaalta geometriset todistukset ovat malliesimerkkejä matemaattisesta päättelystä.

Aksiomaattinen ja analyttinen geometria

Intuitiivisen lähestymistavan vaihtoehtoina ovat aksiomaattinen ja analyttinen lähestymistapa. *Aksiomaattinen geometria* koostuu määrittelemättömistä peruskäsitteistä (piste, suora, jne), ja perusoletuksista (aksiomat eli postulaatit), jotka luettelevat peruskäsitteiden väliset suhteet. Aksiomeista johdetaan loogisin päättelyaskelin uusia tuloksia (teoreemoja), ja määritellään uusia käsitteitä helpottamaan teorian etenemistä.

Aksiomatiikka ei koske vain Euklidista geometriaa vaan esimerkiksi myös äärellisiä geometrioita ja epäeuklidisia geometrioita: *hyperbolisessa geometriassa* paralleeliaksioma korvataan aksiomalla, jossa pisteen kautta kulkee useita yhdensuuntaisia suoria, ja *elliptisessä geometriassa* kaksi suoraa leikkaavat aina toisensa. Geometrian luonne riippuu suuresti valituista aksiomeista. Jotkut geometriat ovat äärellisiä, eli niissä on vain äärellinen määrä pisteitä ja suoria. Erilaisiin sovellutuksiin tarvitaan erilaisia geometrioita. Suhteellisuusteoriassa käytetään kaarevien avaruuksien geometriaa kun taas monet kombinatoriset teoriat hyödyntävät usein äärellisiä geometrioita. Mitään yhtä ja ainutta oikeaa geometriaa ei ole olemassa. Analyttinen geometria samaistaa tason reaalitason kanssa, ja käyttää lineaarialgebran ja analyysin metodeja hyväkseen. Erityisesti tietyt metriset geometriat hyödyntävät myös analyysin työkaluja.



Elliptinen, Euklidinen ja hyperbolinen geometria

Tasogeometrialle on aikojen saatossa esitetty useita aksiomaattisia systeemejä:

- Eukleideen aksiomatiikka (n. 300 eKr) on varmaankin tunnetuin aksiomatiikka. Se koostuu kolmestatoista kirjasta ja lähtökohtana ovat 5 aksiomaa ja 5 määrittelemätöntä käsitettä. Lyhykäisyydessään, ja nykykielellä ilmaistuna, aksiomat ovat:
 1. Jokaista pisteparia yhdistää yksikäsitteinen jana.
 2. Jokaista janaa voidaan jatkaa loputtomiin kumpaakin suuntaan.
 3. On olemassa yksikäsitteinen ympyrä kun keskipiste ja säde ovat annetut.
 4. Suorat kulmat ovat yhteneviä toistensa kanssa.
 5. Annetun pisteen kautta kulkee yksikäsitteinen annetun suoran suuntainen suora.
- Hilbertin aksiomatiikka vuodelta 1899 tarkensi Eukleideen työtä. Tämä systeemi käsitti 20 aksiomaa ja 6 määrittelemätöntä käsitettä.
- Tarskin aksiomatiikka vuodelta 1929 käsitti vain kaksi määrittelemätöntä käsitettä, “olla välissä” ja “yhtenevyys”, joita varten tarvittiin 11 aksiomaa.
- Birkhoffin aksiomatiikka vuodelta 1932 oli metristä geometriaa.
- Bachmannin aksiomatiikka vuodelta 1959 oli rakennettu puhtaasti algebran, ryhmäteorian, pohjalle.

Koulugeometrisen lähestymistavan merkittävin ero aksiomaattiseen geometriaan nähden on peruskäsitteiden *merkityksen* olettamisessa. Uusien tulosten johtaminen vanhoista on kummassakin lähestymistavassa samanluontoista:

Intuitio ei saa koskaan korvata päättelyä!

Frank and Ernest



Copyright (c) 1991 by Thaves. Distributed from www.thecomics.com.

Sisältö

1	Peruskäsitteitä	5
---	-----------------------	---

Tasogeometrian perustuloksia

2	Kolmioiden geometriaa	10
2.1	Yhtenevyys	10
2.2	Yhdenmuotoisuus	13
2.3	Konsyklisyys	18
2.4	Geometrinen konstruoituvuus	20
3	Merkilliset pisteet	23
3.1	Menelaus ja Ceva	23
3.2	Kolmion merkilliset pisteet	25
3.3	Monikulmioiden aloista	28

Liike tasossa

4	Isometriat	33
4.1	Transformaatiot	33
4.2	Isometrioiden määritelmä	34
4.3	Sovellutuksia	40
5	Yleisemmät kuvaukset	46
5.1	Similaarisuus	46
5.2	Affiinit kuvaukset	48
5.3	Inversio	51
	Liite 1: Isometriat ja ryhmät*	55
	Liite 2: Fraktaaleista*	59
	Kirjallisuutta valikoidusti	65

* Tähdellä merkityt kappaleet eivät tule tenttiin.

1 Peruskäsitteitä

Tässä osassa kuvaillaan Euklidisen geometrian peruskäsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä. Varsinaisia määritelmiä ei esitetä, koska nämä käsitteet oletetaan jo tunnetuiksi! Seuraavien sivujen perustulokset esitetään ilman todistuksia, ja näitä (ja vain näitä) käyttäen myöhemmät tulokset pyritään todistamaan.

Suorat ja janat

(**Euklidinen**) taso \mathbb{E} koostuu **pisteistä**, joita merkitään isoilla kirjaimilla A, B, \dots, P, Q, \dots , indekseihin ja ilman. Pisteet täyttävät tason homogeenisesti: mikään piste ei ole erityisasemassa muihin pisteisiin nähden, ja mikään suunta ei ole erityisasemassa: taso näyttää samantyyppiseltä katsottiinpa sitä mistä pisteestä käsin tahansa ja mihin suuntaan tahansa. Erityisesti tasossa ei ole ennakolta määrättyä origoa, eikä siis koordinaatistoa.

Tason **suora** on ääretön järjestetty joukko pisteitä. Jos $P, Q, R \in \ell$ ovat suoran ℓ eri pisteitä, on tarkalleen yksi niistä kahden muun **välissä**. Jos Q on pisteiden P ja R välissä, voidaan merkitä $P - Q - R$. Seuraavat ominaisuudet ovat tällöin voimassa

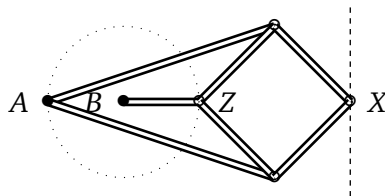
$$\begin{aligned} \text{jos } P - Q - R, \text{ niin } R - Q - P, \\ \text{jos } P - Q - R \text{ ja } P - R - S, \text{ niin } P - Q - S. \end{aligned}$$

Suoria merkitään pienillä kirjaimilla.

Lause 1.1 (Suora). *Kahden eri pisteen P ja Q kautta kulkee tarkalleen yksi suora $\ell(P, Q)$. Erityisesti kahdella eri suoralla on korkeintaan yksi yhteinen piste.*

Yhteisellä suoralla olevat pisteet P_1, P_2, \dots, P_n , $n \geq 2$, ovat **kollineaariset**. Tällöin merkintä $\ell(P_1, P_2, \dots, P_n)$ tarkoittaa sitä suoraa, jolle pisteet P_1, P_2, \dots, P_n kuuluvat.

Esimerkki 1.1. Mekaanisissa sovelluksissa suoran piirtämiseksi voi käyttää avuksi esimerkiksi *Peaucellierin nivelikköä* (1864), missä pisteet A ja B ovat kiinnitetyt ja piste Z liikkuu. Tällöin piste X piirtää suoraa. □



Suorat a ja b ovat **yhdensuuntaiset**, merkitään $a \parallel b$, jos $a = b$ tai $a \cap b = \emptyset$.
Seuraava tulos on keskeinen Eukliidisessä geometriassa.

Lause 1.2 (Paralleelipostulaatti). Tason pisteen P kautta kulkee tarkalleen yksi annetun suoran ℓ suuntainen suora. Jos $P \in \ell$, niin kysytty suora on ℓ itse.

Suoran $\ell(P, Q)$ pisteet, jotka ovat pisteiden P ja Q välissä muodostavat **janan**

$$PQ = \{R : P - R - Q\}.$$

Jos jana AB on valittu **yksikköjanaksi** (jolloin merkitään $|AB| = 1$), voidaan muiden janojen PQ pituudet ilmoittaa suhteessa siihen. Janan PQ **pituus** on ei-negatiivinen reaaliluku, $|PQ| = r$.

Myöhemmin, yksinkertaisuuden vuoksi, janelle ja sen pituudelle käytetään samaa merkintää PQ .

Pituusfunktio tuottaa tasoon metriikan:

Lause 1.3 (Metriikka). Kaikille tason pisteille P, Q, R on voimassa:

- (1) $PQ \geq 0$.
- (2) $PQ = 0 \iff P = Q$.
- (3) $PQ = QP$.
- (4) $PQ \leq PR + RQ$ (**kolmioepäyhtälö**).
- (5) $PQ = PR + RQ \iff R \in PQ$.

Jokaisella suoralla ℓ on kaksi mahdollista suuntaa. Jos toinen näistä suunnista valitaan, kutsutaan suoraa **suunnatuksi**. Tällöin 'olla välissä'-relaatiosta tulee epäsymmetrinen: jos $P \rightarrow Q$ ja $P - R - Q$ tai $P - Q - R$, niin $P \rightarrow R$. Huomaa, että suoran kaksi pistettä, P ja Q , määräävät sen suunnan. Korostettaessa suuntaa voidaan merkitä $\vec{\ell}(P, Q)$, kun suunta $P \rightarrow Q$ on valittu. Suunnatun suoran $\vec{\ell}(P, Q)$ jana PQ on suunnattu: $P \rightarrow Q$, ja korostettaessa suuntaa kirjoitetaan \overrightarrow{PQ} . Suoran $\vec{\ell}(Q, P)$ suunta on vastakkainen suoran $\vec{\ell}(P, Q)$ suunnalle. Suunnatun janan \overrightarrow{PQ} pituudelle käytetään merkintää

$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP},$$

toisin sanoen, suunnatun janan pituus riippuu etumerkiltään valitusta suunnasta.

Esimerkki 1.2. Kun P, Q, R ovat kollineaariset pisteet suunnatulla suoralla $\vec{\ell}$, niin

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = 0.$$

Tämä on riippumaton pisteiden P, Q, R järjestyksestä suoralla ℓ . □

Lause 1.4 (Janan siirto). Olkoot $\vec{\ell}(P, Q)$ suunnattu suora ja $r > 0$ positiivinen vakio. Tällöin on yksikäsitteinen piste $R \in \ell$, jolla $P \rightarrow R$ ja $\overrightarrow{PR} = r$.

Erityisesti, jos pisteet A, X, Y ovat kollineaariset ja $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AY}$, niin $X = Y$.

Verrannollisuus

Esimerkki 1.3. Osoitetaan, että jos X ja Y jakavat janan AB samassa suhteessa, niin $X = Y$, eli suunnatuille janoille on voimassa

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB} \implies X = Y.$$

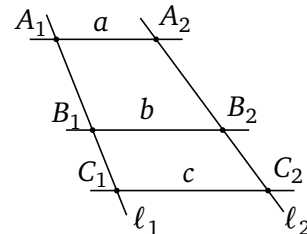
Väite seuraa yhtälöistä

$$\frac{AX}{XB} + 1 = \frac{AX + XB}{XB} = \frac{AB}{XB} \quad \text{ja} \quad \frac{AY}{YB} + 1 = \frac{AY + YB}{YB} = \frac{AB}{YB},$$

ja siten $XB = YB$, ja koska janat ovat suunnattuja, niin $X = Y$. □

Lause 1.5 (Verrannollisuus). Olkoot $a \parallel b \parallel c$ yhdensuuntaiset suorat, joita suorat ℓ_1 ja ℓ_2 leikkaavat pisteissä A_1, A_2, B_1, B_2 ja C_1, C_2 , vastaavasti. Tällöin

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

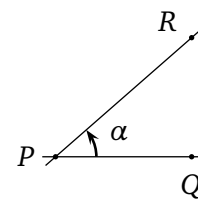


Huomaa, että edellä suorien a, b ja c järjestys ei ole kiinnitetty, eli esimerkiksi suora c voi kulkea suorien a ja b välissä.

Kulmat

Suora ℓ jakaa tason \mathbb{E} kahteen puoliskoon \mathbb{E}_1 ja \mathbb{E}_2 , joiden leikkaus on ℓ ja unioni koko taso \mathbb{E} . Kaksi pistettä $P, Q \in \mathbb{E}_i$ (missä $i = 1$ tai 2) ovat **samalla puolella** suoraa ℓ . Jos P ja Q ovat eri puolilla suoraa ℓ , niin $\ell(P, Q)$ leikkaa suoraa ℓ . **Kulma** on kahden leikkaavan suoraa ℓ_1 ja ℓ_2 rajoittama tason osa.

Leikkaavat suorat $\ell_1 = \ell(P, Q)$ ja $\ell_2 = \ell(P, R)$ jakavat tason neljään osaan, ja siksi tarvitaan vielä tieto miten kulma luetaan. Kulma $\alpha = \angle QPR$ on se tason osa, joka saadaan lukemalla taso vastapäivään suunnassa Q, P, R . Suorat $\ell(P, Q)$ ja $\ell(P, R)$ ovat kulman α **kyljet**. Kulma $\angle QPR$ on luonnostaan suunnattu, joten voidaan puhua kahden kulman **samannimisistä** kyljistä (vasemmat/oikeat kyljet).



Usein kulma $\angle QPR$ lyhennetään muotoon $\angle P$, mikäli se on asiayhteydestään selvä; esimerkiksi kuvasta tai siitä, että kulma aukeaa monikulmion sisälle.

Kulman suuruutta mitataan **asteilla** tai **radiaaneilla**. Näiden mittojen vastaavuus on: $360^\circ = 2\pi$. (Mikäli haluttua erottaa kulma $\angle P$ ja sen suuruus toisistaan, voidaan kirjoittaa $\sphericalangle P$ kulman suuruudelle. Jäljempänä tätä merkinnällistä erottelua ei ole tehty.)

Lause 1.6 (Samannimisyys). Jos kahden koveran kulman ($< 180^\circ$) α ja β samannimiset kyljet ovat yhdensuuntaiset, ovat ne yhtä suuret, $\alpha = \beta$.

Lause 1.7 (Kulman siirto). Olkoot α kulma ja $\vec{\ell}(P, Q)$ suora. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen suora $\vec{\ell}(P, R)$ siten, että $\angle QPR = \alpha$.

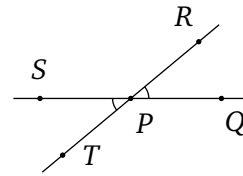
Kulmien suuruudet lasketaan modulo 360° , ja kirjoitetaan: $\angle RPQ = -\angle QPR$, jolloin seuraava tulos tarjoaa säännön kulmien yhteenlaskun lisäksi myös niiden erotukselle.

Lause 1.8 (Summa). $\angle QPR = \angle QPS + \angle SPR$.

Lause 1.9 (Oikokulma). Jos $P \in AB$, niin $\angle APB = 180^\circ$.

Esimerkki 1.4. Kulman $\angle QPR$ ristikulma on $\angle SPT$, missä $P \in SQ$ ja $P \in TR$. Kahden leikkaavan suoran ristikulmat ovat yhtä suuret.

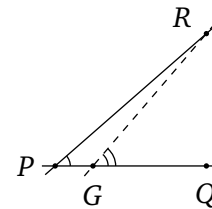
Todetaan tämä seuraavasti. Koskapa $180^\circ = \angle QPS = \angle QPR + \angle RPS$, ja samoin $180^\circ = \angle RPS + \angle SPT$, saadaan väite, eli $\angle QPR = \angle SPT$. \square



Kahden kulman yhtäsuuruuden tarkistamiseksi käytetään seuraavaa lausetta.

Lause 1.10 (Kulmat). (1) Jos $\angle QPR = \angle QPS$, niin $S \in \ell(P, R)$.

(2) Olkoon piste G janalla PQ ja $R \notin \ell(P, Q)$. Tällöin $\angle QPR \leq \angle QGR$, missä yhtäsuuruus on voimassa vain jos $G = P$.



Kaksi suoraa a ja b ovat **kohtisuorassa**, $a \perp b$, jos niiden muodostamat kulmat ovat suoria (90°). Jos $a \perp b$ ja $P \in b$, on b **normaali** pisteestä P suoralle a .

Lause 1.11 (Normaali). Normaali pisteestä suoralle on aina olemassa.

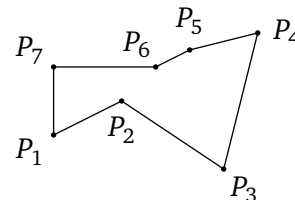
Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että normaali pisteestä P suoralle ℓ on aina yksikäsitteinen.

Yleisesti **ura** on pistejoukko, joka toteuttaa tietyt annetut ehdot. Esimerkiksi **ympyrä** $\omega(O, r)$ on niiden pisteiden ura, joiden etäisyys annetusta pisteestä O on annetun janan pituus $AB = r$.

Yhtenevyys

Suljettu murtoviiva koostuu tason järjestetystä pistejonosta P_1, P_2, \dots, P_n , $n \geq 3$, ja näitä yhdistävistä janoista, eli **sivuista**, $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$. Tässä pisteet P_1, P_2, \dots, P_n ovat murtoviivan **kärjet** (tai **kulmapisteet**).

Monikulmio $\Gamma = \diamond P_1P_2 \dots P_n$ on suljettu murtoviiva, jonka sivujen leikkauspisteet ovat tarkalleen P_1, P_2, \dots, P_n , eli kaksi sivua eivät leikkaa muualla kuin peräkkäisissä kärkipisteissä. Monikulmio on **tasasivuinen**, jos sen sivut ovat saman pituiset, ja se on **säännöllinen**, jos myös sen kärki-
kulmat ovat yhtä suuret.



Olkoot $\Gamma = \diamond P_1 P_2 \dots P_n$ ja $\Sigma = \diamond Q_1 Q_2 \dots Q_n$ monikulmioita, joissa on sama määrä pisteitä. Tällöin bijektio $P_i \mapsto Q_i$ on niiden välinen **vastaavuus**. Sivut $P_i P_{i+1}$ ja $Q_i Q_{i+1}$ ovat **vastinsivut** ja monikulmion sisään aukeavat kulmat $\angle P_i$ ja $\angle Q_i$ ovat niiden **vastinkulmat**. Monikulmiot Γ ja Σ ovat **yhtenevät** (eli **kongruentit**), $\Gamma \cong \Sigma$, mikäli niiden vastinsivut ovat pareittain yhtä pitkät ja vastinkulmat ovat pareittain yhtä suuret.

Geometriset konstruktiot ja tehtävät

Geometrinen konstruktio on apuvälineinä **harppi** ja **viivain**. Viivaimen avulla voidaan piirtää suora kahden *annetun* pisteen kautta, ja harpin avulla voidaan piirtää ympyrä *annettu* piste keskipisteenä ja *annettu* jana säteenä. Harppi-viivain konstruktioissa uusia pisteitä määrätään ympyröiden ja suorien leikkauspisteinä.

Harppi ja viivain eivät tunnu kovin moderneilta välineiltä verrattuina uudempiin elektroniin graafisiin työkaluihin. On kuitenkin huomattava, että

- pisteet, suorat ja ympyrät ovat edelleen geometrian peruskäsitteet, joiden konstruointeihin harppi ja viivain muodostavat pienen työkalupakin;
- harppi- ja viivainratkaisut selittävät ratkaisua havainnollisesti ja ratkaisujen luonne on hyvin algoritmien.

Geometrinen (**konstruktio-**) **tehtävä** koostuu

1. **Tehtävästä** eli oletuksista ja väitteestä muodossa “Piirrä ...” tai “Etsi ...”;
2. **Ratkaisusta**, joka on harppi-viivain konstruktio, eli luettelo ohjeista, joita seuraamalla ratkaisu löydetään;
3. **Todistuksesta**, että ratkaisu on oikein.

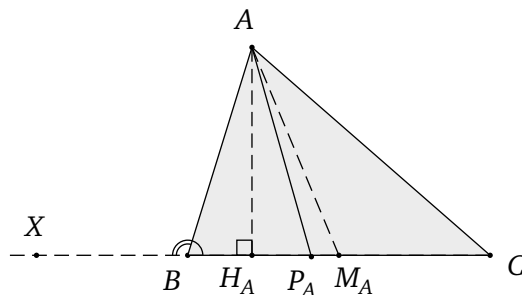
Osa I TASOGEOMETRIAN PERUSTULOKSIA

2 Kolmioiden geometriaa

Merkintöjä kolmioille

Kolmiolle, jonka kärkipisteet ovat A, B, C , käytetään merkintää $\Delta = \Delta ABC$. Suoran $\ell(B, C)$ piste on

- **mediaanin kantapiste** M_A , kun $BM_A = M_AC$.
- **korkeussuoran kantapiste** H_A , kun $\ell(A, H_A) \perp \ell(B, C)$.
- **kulmanpuolittajan kantapiste** P_A , kun $\angle BAP_A = \angle P_AAC$.



- $\angle B = \angle CBA$ on kolmion **kantakulma**. Kulma $\angle ABX$ on kulman $\angle B$ **ulkokulma**. Näiden kulmien summa on 180° .

2.1 Yhtenevyys

Kolmiot Δ ja Δ' ovat **yhtenevät**, merkitään $\Delta \cong \Delta'$, jos niiden vastinsivut ovat yhtä pitkät ja vastinkulmat ovat yhtä suuret.

Esimerkki 2.1. Monikulmio on järjestetty joukko pisteitä ja niitä yhdistäviä viivoja, ja niinpä, formaalisesti ottaen, pidämme kolmioita ΔABC ja ΔBAC eri monikulmioina, mutta toki vain sikäli että niiden kärkipisteet luetaan eri pisteestä lähtien ja eri suuntiin (myötä- ja vastapäivään). Jos $\Delta ABC \cong \Delta BAC$, niin määritelmän mukainen vastaavuus on $A \mapsto B$, $B \mapsto A$ ja $C \mapsto C$, ja siten yhtenevyyden mukaan $AC = BC$, joten tämä kolmio on **tasakylkinen**. Vastaavasti, jos $\Delta ABC \cong \Delta BCA$, niin kyseinen kolmio on **tasasivuinen**, eli kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. \square

Seuraava kriteeri on yleensä postulaattina aksiomaattisessa geometriassa. Eukleides perusteli sitä käyttäen 'päällekkäin asettamisen' kriteeriä, joka on kuvaava mutta epämääräinen todistusmetodi: Kaksi tason kuviota ovat yhtenevät, jos ne voidaan 'kuvion muodon ja koon säilyttäen' siirtää toinen toisikseen.

Lause 2.1 (SKS). Jos kolmion Δ kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

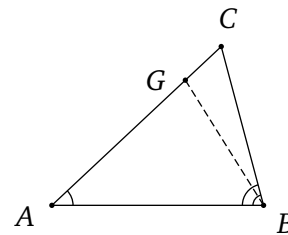
Tähän nojautuen etsitään monimuotoinen kokoelma yhtenevyyskriteerejä, jotka koskevat kolmion luonnollisia janoja ja kulmia.

Lause 2.2 (2K+S). Jos kolmion Δ kaksi kulmaa ja yksi sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

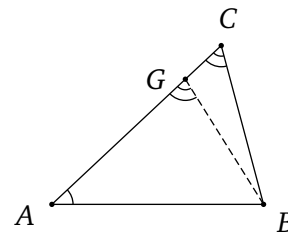
Todistus. Olkoot kyseiset kolmiot ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ niin, että $\angle A = \angle A'$ ja $AB = A'B'$. Jaetaan todistus kahteen osaan sen mukaan onko yhtä pitkät vastinsivut annettujen kulmien välissä vai ei.

(KSK) Olkoon $\angle B = \angle B'$. Lauseen 1.4 mukaan suoralla $\vec{\ell}(A, C)$ on yksikäsitteinen piste G , jolla $AG = A'C'$.

(Piste G voi olla myös sivun AC jatkeella eli $C \in AG$.) Kriteerin (SKS) mukaan $\Delta ABG \cong \Delta A'B'C'$, ja näin ollen $\angle GBA = \angle C'B'A'$. Mutta oletuksen mukaan $\angle B = \angle B'$, ja siten $\angle B = \angle GBA$, mistä $G = C$ seuraa lauseen 1.10 mukaan.



(KKS) Tapauksen, jossa $\angle C = \angle C'$, todistus on samanlainen kuin edellä. Väite seuraa jälleen lauseesta 1.10. \square

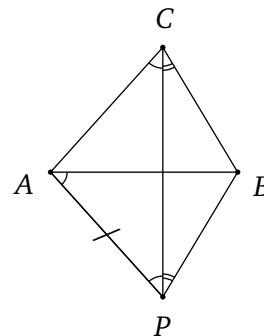


Esimerkki 2.2. Oletetaan, että kolmiossa ΔABC on $\angle A = \angle B$. Koska $AB = BA$, on kriteerin (KSK) nojalla $\Delta ABC \cong \Delta BAC$ ja eritoten $AC = BC$. Siten tämä kolmio on tasakylkinen. Toisaalta, jos kolmio ΔABC on tasakylkinen, $AC = BC$, niin $\Delta ABC \cong \Delta BAC$ kriteerin (SKS) mukaan ja siten myös $\angle A = \angle B$. Näin ollen ΔABC on tasakylkinen tarkalleen silloin kun sen kaksi kantakulmaa ovat yhtä suuret. Samoin voidaan osoittaa, että ΔABC on tasasivuinen jos ja vain jos sen kaikki kantakulmat ovat yhtä suuret. \square

Lause 2.3 (SSS). Jos kolmion Δ kaikki sivut ovat yhtä pitkät kuin vastinsivut kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

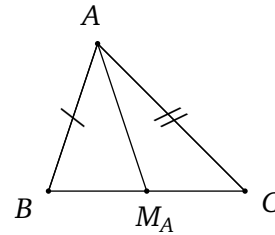
Todistus. Olkoot ΔABC ja $\Delta A'B'C'$ kyseiset kolmiot ja P piste, jolle $\angle PAB = \angle A'$ ja $AP = A'C'$ kuten kuvassa. Siis $AC = AP (= A'C')$, joten ΔACP on tasakylkinen. Esimerkin 2.2 mukaan $\angle ACP = \angle CPA$.

Vastaavasti ΔCBP on tasakylkinen, ja $\angle PCB = \angle BPC$. Kulmien yhteenlasku (tai vähennyslasku, jos $\angle A > 90^\circ$) tuottaa tuloksen $\angle ACB = \angle BPA$, ja kriteerin (SKS) mukaan $\Delta ABC \cong \Delta ABP$. Siten myös alkuperäiset kolmiot ovat yhtenevät. \square



Seuraavat tulokset kolmioille jäävät harjoitustehtäviksi.

Lause 2.4 (SMS). Jos kolmion Δ yhdestä kärkipisteestä lähtevät sivut ja mediaani ovat yhtä pitkät kuin vastinosat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.



Lause 2.5 (HHH). Jos kolmion Δ korkeusjanat ovat yhtä pitkät kuin vastinjanat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

Seuraava kriteeri todistetaan parhaiten käyttäen kolmion merkittäviä pisteitä.

Lause 2.6 (MMM). Jos kolmion Δ mediaanit ovat yhtä pitkät kuin vastinjanat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

Kulmanpuolittajia koskeva kriteeri on selvästi vaikeampi kuin edeltävät kriteerit.

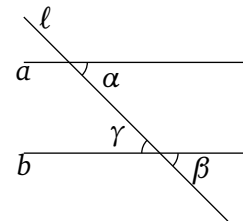
Lause 2.7 (PPP). Jos kolmion Δ kulmanpuolittajat ovat yhtä pitkät kuin vastinjanat kolmiossa Δ' , niin $\Delta \cong \Delta'$.

Suunnikkaat

Kuten edellä lauseen 1.10 ja paralleeliaksioman avulla todetaan helposti:

Lause 2.8. Leikatkoon ℓ suoria a ja b . Tällöin seuraavat kohdat ovat yhtäpitäviä (katso kuvaa):

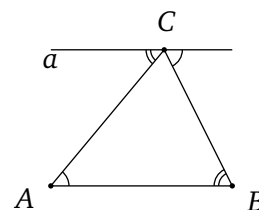
- (1) $a \parallel b$ (2) $\alpha = \beta$ (3) $\alpha = \gamma$.



Todistus. Harjoitus. □

Lause 2.9. Kolmion kulmien summa on 180° .

Todistus. Olkoon a suora siten, että $a \parallel \ell(A, B)$ ja $C \in a$. Tällöin lauseen 2.8 mukaan kuvan kulmat ovat pareittain yhtä suuret. □

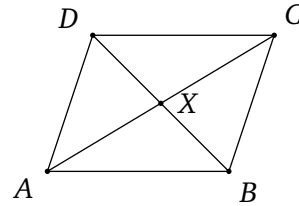


Lause 2.10 (Suunnikas). Seuraavat nelikulmiota koskevat ehdot ovat yhtäpitävät:

- (1) vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset,
- (2) vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät,
- (3) vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret,
- (4) kaksi vastakkaista sivua ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset,
- (5) lävistäjät puolittavat toisensa.

Todistus. Todistetaan, että ehto (2) seuraa ehdosta (1). Muut jäävät harjoituksiksi.

Olkoon $\diamond ABCD$ nelikulmio, jossa $\ell(A,B) \parallel \ell(D,C)$ ja $\ell(A,D) \parallel \ell(B,C)$. Tällöin $\angle ADB = \angle CBD$ lauseen 2.8 mukaisesti. Samoin $\angle BDC = \angle DBA$. Kriteerin (KSK) mukaan $\triangle ABD \cong \triangle CDB$, ja siten monikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. \square



Edellisen lauseen ehdot täyttävää nelikulmiota kutsutaan **suunnikkaaksi**.

2.2 Yhdenmuotoisuus

Kolmiot $\Delta = \triangle ABC$ ja $\Delta' = \triangle A'B'C'$ ovat **yhdenmuotoiset**, merkitään $\Delta \sim \Delta'$, jos niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivut ovat **verrannolliset**, eli

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Lause 2.11. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

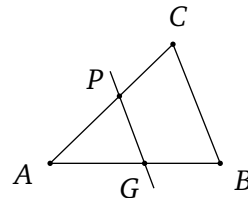
- (1) $\Delta \sim \Delta'$.
- (2) Kolmioiden Δ ja Δ' kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret.
- (3) Kolmioiden Δ ja Δ' vastinsivut ovat verrannolliset.

Todistus. Tapaukset (1) \implies (2) ja (1) \implies (3) seuraavat määritelmästä.

Jos kolmioilla $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ on yhtä pitkä sivu, $AB = A'B'$, palautuu väite yhtenevyyteen. Otaksutaan siksi, että $AB > A'B'$.

Muita kohtia varten, olkoon $G \in AB$ niin, että $A'B' = AG$, ja olkoon $P \in AC$ valittu niin, että $\ell(G,P) \parallel \ell(B,C)$. Tällöin lauseen 1.5 (missä $A = A_1 = A_2$) mukaan on

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AP}{AC}$$



ja lisäksi kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle AGP$ kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuret, koska $\ell(B,C) \parallel \ell(G,P)$.

Oletetaan että (2) on voimassa. Tällöin kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kaikki vastinkulmat ovat yhtä suuret, koska kolmion kulmien summa on 180° . Täten $\triangle A'B'C' \cong \triangle AGP$ (KSK), ja siten

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AG}{AB} = \frac{AP}{AC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Symmetrisesti voidaan osoittaa, että

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$$

ja näin ollen ehdosta (2) seuraa (1) ja samalla (3).

Oletetaan sitten että (3) on voimassa. Nyt $\triangle ABC \sim \triangle AGP$, sillä näillä kolmioilla kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret, ja meidän tiedämme jo että (2) \implies (1). Saadaan

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} = \frac{AG}{AP} = \frac{A'B'}{AP},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa valinnasta $A'B' = AG$. Näin ollen $A'C' = AP$, ja vastaavasti nähdään, että $B'C' = GP$. Kriteerin (SSS) mukaan $\triangle A'B'C' \cong \triangle AGP$, mistä väite seuraa, sillä $\triangle AGP \sim \triangle ABC$. \square

Jokaista yhtenevyydestä vastaa yhdenmuotoisuustulos: Sivujen yhtä suuruus korvataan vain niiden verrannollisuudella. Edellinen lause on (SSS \sim)-tulos. Kriteeriä (KSK) vastaava yhdenmuotoisuustulos on pelkkä (KK)-tulos.

Lause 2.12 (SKS \sim). Jos kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ on $\angle B = \angle B'$ ja

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'},$$

niin $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Todistus. Harjoitus. (Muuta edellistä todistusta niin, että käytetään kriteeriä (SKS) todentamaan, että $\triangle A'B'C' \cong \triangle AGP$). \square

Kulmanpuolittajat

Lause 2.13 (Kulmanpuolittaja). Kolmion kulman puolittajasuora jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC}.$$

Todistus. Olkoon $P = P_C$ kulman $\angle C$ puolittajan kantapiste. Piirretään jana $BE \parallel CA$, missä $E \in \ell(C, P)$, jolloin $\angle PCB = \angle ACP = \angle BEP$ oletuksen ja yhdensuuntaisuuden takia. Näin ollen $\triangle ECB$ on tasakylkinen, $BC = BE$. Koska $\triangle APC \sim \triangle BPE$ (KK), niin

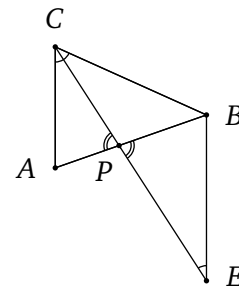
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BE} = \frac{AC}{BC},$$

mikä olikin väite. \square

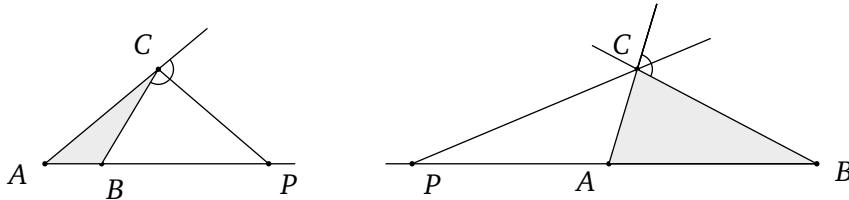
Edeltävä lause on voimassa myös kolmion ulkokulmien puolittajille.

Lause 2.14. Kolmion ulkokulman puolittajasuora jakaa vastakkaisen sivun viereisten sivujen suhteessa:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{BC}.$$



Todistus. Todistus on edeltävän kaltainen. On huomioitava kolme tapausta: $\angle A < \angle B$, $\angle A = \angle B$ vai $\angle A > \angle B$. Keskimmaisessä tapauksessa suhde on raja-arvo eli 1, ja kolmas tapaus palautuu symmetriaan nojautuen ensimmäiseen. \square



Esimerkki 2.3. Olkoot $\ell(C, P)$ ja $\ell(C, Q)$ kolmion $\triangle ABC$ kulman $\angle C$ kulman ja sen ulkokulman puolittajasuorat, missä $P, Q \in \ell(A, B)$.

Tällöin P ja Q jakavat janan AB **harmonisesti** suhteessa $h = AC/BC$, eli

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = h,$$

sillä

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AQ}{BQ}.$$

Huomattakoon, että edellä $\angle PCQ = 90^\circ$, joten piste C on sen ympyrän kehällä, jonka halkaisijana PQ on. Tästä voidaan päätellä edelleen seuraava Apolloniuksen ympyrää koskeva tulos:¹ Olkoon AB jana, ja $h \neq 1$ vakio. Niiden pisteiden X ura, joilla $\frac{AX}{XB} = h$, on ympyrä, jonka halkaisijana on jana PQ , missä $P, Q \in \ell(A, B)$ niin, että $AP/PB = h$ ja $AQ/QB = -h$.

Esimerkki 2.4. Jos piste P valitaan janalta AB siten, että

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{PB},$$

niin janalle AB on suoritettu **kultainen leikkaus**. Kun $AB = 1$ ja $AP = x$, niin kultaisessa leikkauksessa $1/x = x/1 - x$, ja siten $x^2 + x - 1 = 0$. Ratkaisemalla todetaan, että $x = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0.61803\dots$. Luku $\varphi = x + 1 = x^{-1} = 1.61803\dots$ esiintyy monissa yhteyksissä matematiikassa.

- Säännöllisen 5-kulmion halkaisijan suhde sivuun on φ .
- Määritellään **Fibonacciin luvut**² f_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, ehdoista $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ ja

$$f_{i+1} = f_i + f_{i-1},$$

jolloin saadaan jono lukuja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots , jotka näkyvät Turun yössä Energialaitoksen piippua koristamassa. Raja-arvo $\lim f_{i+1}/f_i$ on φ .

¹ Apollonius (n.262 – 180 eKr)

² Fibonacci eli Leonardo Pisalainen (n.1175 – 1250)

- Luku φ toteuttaa kaavan

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi},$$

mistä sille saadaan ketjumurtolukukehitelmä:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Samoin saadaan

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Pythagoraan lause

Pythagoraan³ lauseelle on esitettävissä lukuisia erilaisia todistuksia, katso esimerkiksi web-sivulle <http://www.cut-the-knot.com>.

Lause 2.15 (Pythagoras). *Olkoon $\triangle ABC$ suorakulmainen, $\angle C = 90^\circ$. Tällöin*

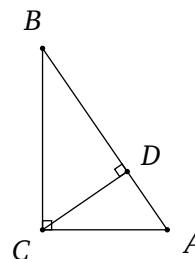
$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Todistus. Olkoon CD korkeusjana (eli $D = H_C$), jolloin kriteerin (KK) mukaan $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$. Näin ollen

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \quad \text{ja} \quad \frac{DB}{CB} = \frac{CB}{AB}.$$

Siten

$$AB^2 = AB(AD + DB) = AB \cdot \frac{AC^2 + CB^2}{AB} = AC^2 + CB^2.$$



□

Esimerkki 2.5. Pythagoraan lause vastaa trigonometriassa kaavaa $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

□

Pythagoraan lause on voimassa myös kääntäen, mutta tämä jää harjoitukseksi.

Lause 2.16. *Jos kolmiossa $\triangle ABC$ on $AB^2 = AC^2 + BC^2$, niin $\angle C = 90^\circ$.*

³ Pythagoras (n.580 – 500 eKr)

Seuraavan lauseen Stewartin kaava yleistää Pythagoraan lauseen. Se on käyttökelpoinen tasogeometrian laskennollisissa ongelmissa. Huomaa, että pisteiden A, B, C järjestystä suoralla ei ole kiinnitetty.

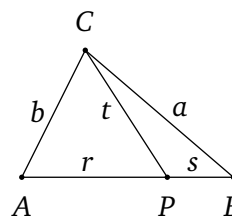
Lause 2.17 (Stewart). Olkoot pisteet A, B, P kollineaariset ja C jokin tason piste. Tällöin

$$CA^2 \cdot \overline{BP} + CB^2 \cdot \overline{PA} + CP^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PA} = 0.$$

eli kuvan merkinnöin

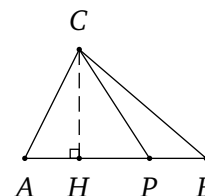
$$c \cdot (t^2 + r \cdot s) = s \cdot a^2 + r \cdot b^2,$$

missä $c = r + s$.



Todistus. (1) Tapaus $C \in \ell(A, B)$ on laskennollinen harjoitus.

(2) Kun $C \notin \ell(A, B)$, piirretään korkeusjana CH , jolloin $CA^2 = AH^2 + HC^2$, $CB^2 = BH^2 + HC^2$, $CP^2 = HP^2 + HC^2$, ja $\overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA} = 0$.



Kaavan vasen puoli antaa nyt

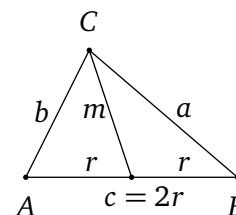
$$\begin{aligned} & (AH^2 \cdot \overline{BP} + HC^2 \cdot \overline{BP}) + (BH^2 \cdot \overline{PA} + HC^2 \cdot \overline{PA}) + \\ & \quad + (PH^2 \cdot \overline{AB} + HC^2 \cdot \overline{AB}) + \overline{AB} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PA} \\ &= AH^2 \cdot \overline{BP} + BH^2 \cdot \overline{PA} + PH^2 \cdot \overline{AB} + HC^2 \cdot (\overline{BP} + \overline{PA} + \overline{AB}) + \overline{AB} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PA} \\ &= AH^2 \cdot \overline{BP} + BH^2 \cdot \overline{PA} + PH^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{PA} = 0, \end{aligned}$$

missä siis $H \in \ell(A, B)$ ja siten väite seuraa kohdasta (1). □

Esimerkki 2.6. Sovelletaan Stewartin kaavaa kolmion $\triangle ABC$ kärkipisteisiin ja mediaanin kantapisteeseen M_C . Olkoon $m = CM_C$. Saadaan

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2}.$$

Näin mediaanin pituus on laskettu sivujen pituuksien avulla. □

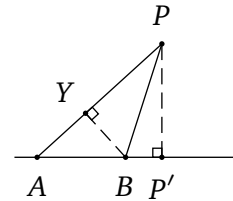


Esimerkki 2.7 (Sylvesterin ongelma). Sylvester⁴ esitti 1893 seuraavan ongelman: *Etsi äärellinen epäkolleaaristen pisteiden joukko \mathcal{P} siten, että kun pisteparit yhdistetään suoriksi, niin kullakin suoralla on ainakin kolme pistettä.* Gallai (1933) ratkaisi ensimmäisenä Sylvesterin ongelman – Sylvesterin joukkoa \mathcal{P} ei ole olemassa.

Lause 2.18 (Sylvester). *Olkoon \mathcal{P} äärellinen epäkolleaarinen pisteiden joukko. Tällöin on ainakin yksi suora, johon kuuluu tarkalleen kaksi joukon \mathcal{P} pistettä.*

Todistus (Kelly). Olkoon $d(P, \ell)$ pisteen P etäisyys suorasta ℓ , eli normaalin PP' pituus.

Jos ℓ kulkee kahden joukon \mathcal{P} pisteen kautta, niin on olemassa piste $P \in \mathcal{P}$, jolle $P \notin \ell$. Tällaisia pareja (P, ℓ) on vain äärellinen määrä, sillä joukko \mathcal{P} on äärellinen. Valitaan pari (P, ℓ) niin, että $d(P, \ell)$ on pienin mahdollinen. Väitetään, että suoralla ℓ on vain kaksi joukon \mathcal{P} pistettä.



Olkoon P' pisteestä $P \in \mathcal{P}$ piirretyn normaalin kantapiste suoralla ℓ . Todetaan, että jos suoralla ℓ on vähintään kolme joukon \mathcal{P} pistettä, on niistä ainakin kaksi, sanokaamme A ja B , samalla puolen pistettä P' . Yhdenmuotoisuudesta saadaan ristiriita $d(B, \ell(A, P)) = BY < PP'$. \square

Olkoon $G_{\mathcal{P}}$ sellaisten suorien lukumäärä, jotka kulkevat tarkalleen kahden joukon \mathcal{P} pisteen kautta, ja olkoon $G(n) = \min\{G_{\mathcal{P}} : \text{joukossa } \mathcal{P} \text{ on } n \text{ pistettä}\}$. Tällöin

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$G(n)$	3	3	4	3	3	4	6	5

Taulukkoa voitaisiin jatkaa lukuun $n = 16$ asti. Tapaus $n = 17$ on ensimmäinen avoimena säilynyt ongelma.

2.3 Konsyklusyyys

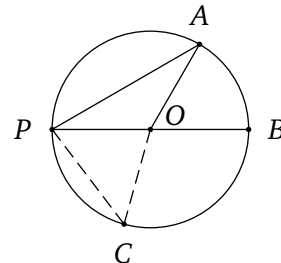
Olkoon $\omega = \omega(O, r)$ ympyrä, ja pisteet $A, P, B \in \omega$ sen kehällä. Kulma $\angle BPA$ on **kehäkulma**. Sitä vastaava **keskuskulma** on $\angle BOA$.

Lause 2.19. *Ympyrän kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta.*

Todistus. Oletetaan ensin, että kehäkulman $\alpha = \angle BPA$ toinen kylki, sanokaamme PB , on ympyrän $\omega(O, r)$ halkaisija, jolloin vastaava keskuskulma on $\beta = \angle BOA$. Kolmio $\triangle OAP$ on tasakylkinen, joten $\angle PAO = \alpha$. Nyt

$$2\alpha = 180^\circ - (180^\circ - \beta) = \beta.$$

Jokainen kehäkulma $\angle CPA$ voidaan esittää kahden kulman summana tai erotuksena, missä apukulmien toiset kyljet ovat halkaisijalla. \square



⁴ Sylvester (1814 – 1897)

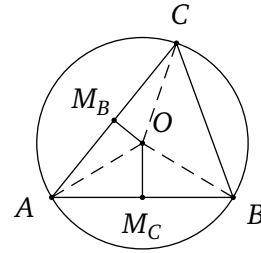
Koska samaa kaarta vastaavilla kehäkulmilla on sama keskuskulma, seuraava lause on voimassa.

Lause 2.20. *Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret.*

Jos ympyrä ω kulkee monikulmion Γ kärkipisteiden kautta, sanotaan sitä kulmion Γ **ympäri piirretyksi ympyräksi**. Tällöin Γ on **konsyklinen**.

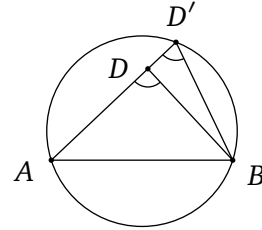
Lause 2.21. *Jokainen kolmio \triangle on konsyklinen, eli $\omega(A, B, C)$ on olemassa.*

Todistus. Olkoon O sivujen AB ja AC keskinormaalien leikkauspiste. Tällöin $OB = OA = OC$ kriteerin (SKS) mukaan, joten O on myös janan BC keskinormaalilla, ja $\omega(O, OA)$ kulkee kolmion kärkipisteiden kautta. \square



Lause 2.22. *Olkoot A, B, C epäkollineaarisia pisteitä, ja D piste samalla puolen suoraa $\ell(A, B)$ kuin C . Tällöin $\angle ACB = \angle ADB$ jos ja vain jos $D \in \omega(A, B, C)$.*

Todistus. Olkoon $D' \in \omega(A, B, C)$ suoralla $\ell(A, D)$ kuten kuvassa. Lauseen 1.10 mukaan $D = D'$, josta väite seuraa. \square



Seuraava lause on nyt selvä.

Lause 2.23. *Olkoot AB ympyrän ω halkaisija ja $P \neq A, B$. Tällöin $P \in \omega$ jos ja vain jos $\angle BPA = 90^\circ$.*

Lause 2.24. *Nelikulmio $\diamond ABCD$ on konsyklinen jos ja vain jos $\angle A + \angle C = 180^\circ$ jos ja vain jos $\angle B + \angle D = 180^\circ$.*

Todistus. Nelikulmion kulmien summa on 360° . (Todetaan jakamalla se kahteen kolmioon lävistäjän avulla.) Täten $\angle A + \angle C = 180^\circ$ jos ja vain jos $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

(\Rightarrow) Kehä- ja keskuskulmia koskevan tuoksen mukaan $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

(\Leftarrow) Piirretään ympyrä $\omega(A, B, C)$. Tällöin jänne AC näkyy pisteen B vastakkaisen kaaren AEC jokaisesta pisteestä kulman $180^\circ - \angle B = \angle D$ suuruisena. Lauseen 2.22 mukaan myös D on kaarella AEC . \square

Lause 2.25. Olkoot P piste, ω ympyrä sekä $\ell(P,A,B)$ ja $\ell(P,C,D)$ suorita, missä $A,B,C,D \in \omega$, niin

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Tässä vakio $PA \cdot PB$ on pisteen P **potenssi** ympyrän ω suhteen.

Todistus. Väite seuraa suoraan yhdenmuotoisuudesta $\triangle APD \sim \triangle CPB$. \square

Huomaa, että jos E on tangenttipiste (eli edellä $E = C = D$ ja $\ell(P,E) \perp \ell(O,E)$), niin tulos on yhä voimassa. Niinpä pisteen potenssi on PE^2 .

Lause 2.26 (Ptolemaios). Jos $\diamond ABCD$ on konsyklinen nelikulmio, niin

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Todistus. Etsitään piste $E \in BD$ niin, että $\angle DAE = \angle CAB$. Tällöin $\triangle DAE \sim \triangle CAB$ ja $\triangle ADC \sim \triangle AEB$. Näin ollen

$$\frac{AD}{CA} = \frac{ED}{BC} \quad \text{ja} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}.$$

Yhdistämällä nämä saadaan väite,

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD. \quad \square$$

Esimerkki 2.8. Ptolemaioksen lause vastaa tuttua trigonometrian kaavaa

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha),$$

joka saadaan valitsemalla $DB = 1$ ympyrän halkaisijaksi, ja $\alpha = \angle BDA$, $\beta = \angle CDB$. \square

2.4 Geometrinen konstruointivuus

Tehtävä 1. (1) Siirrä annettu kulma $\angle ABC$ annetulle suoralle $\ell(R,S)$ sen pisteeseen R .

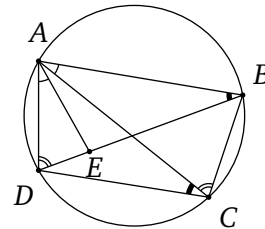
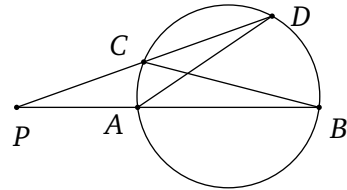
(2) Puolita annettu kulma.

(3) Puolita annettu jana.

(4) Piirrä suoralle normaali sen annettuun pisteeseen.

(5) Piirrä suoralle normaali sen ulkopuolella olevan pisteen kautta.

(6) Piirrä annetun pisteen kautta suora, joka on annetun suoran suuntainen.

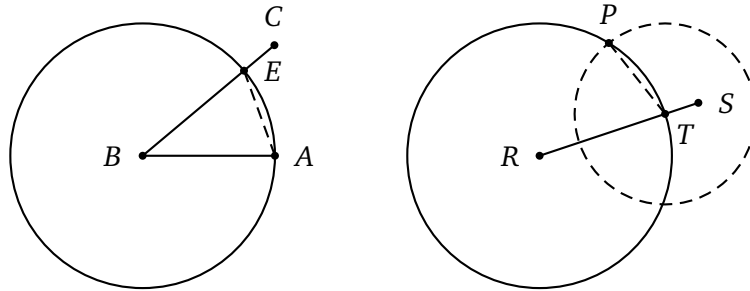


Ratkaisu. Ratkaistaan (1); muut ovat harjoitustehtäviä.

Merkitään $r = AB$.

1. Piirrä ympyrä $\omega_1 = \omega(B, r)$ ja olkoon $E = \omega_1 \cap \ell(B, C)$. Merkitään $s = AE$.
2. Piirrä $\omega_2 = \omega(R, r)$ ja olkoon $T = \omega_2 \cap \ell(R, S)$.
3. Piirrä $\omega_3 = \omega(T, s)$ ja olkoon $P \in \omega_2 \cap \omega_3$.

Tällöin $\angle TRP$ on vaadittu kulma.



Todistus. Kriteerin (SSS) nojalla on $\triangle ABE \cong \triangle TRP$, sillä $BA = BE = r = RP = RT$ ja $AE = TP$. Täten $\angle ABC = \angle TRP$ vastinkulmina. \square

Tehtävä 2. Olkoot janat AB ja CD annettuina (yksikköjanan ohella).

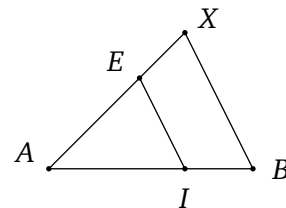
- (1) Etsi pituutta $AB + CD$ oleva jana.
- (2) Etsi pituutta $\frac{AB}{k}$ oleva jana, missä k on luonnollinen luku.
- (3) Etsi pituutta $AB \cdot CD$ oleva jana.
- (4) Etsi pituutta $\frac{AB}{CD}$ oleva jana.
- (5) Etsi pituutta \sqrt{AB} oleva jana.

Ratkaisu (1). Olkoon $E \in \ell(A, B)$, jolle $BE = CD$ ja $B \in AE$. Nyt $AE = AB + CD$.

Todistus. Selvä. \square

Ratkaisu (2). Harjoitus.

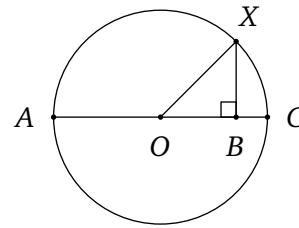
Ratkaisu (3). Olkoon $I \in \ell(A, B)$ niin, että $AI = 1$. (Kuvassa on tapaus $I \in AB$.) Piirretään suora $\ell \neq \ell(A, B)$ niin, että $A \in \ell$. Olkoon $E \in \ell$ piste, jolle $CD = AE$. Piirretään suoran $\ell(I, E)$ suuntainen suora $\ell(B, X)$, missä $X \in \ell$. Tällöin AX on kysytyn pituinen jana.



Todistus. Tässä $\triangle AIE \sim \triangle ABX$, jossa $AI = 1$. Väite seuraa verrannollisuudesta. \square

Ratkaisu (4). Harjoitus. (Muuta hieman edellistä konstruktiota.)

Ratkaisu (5). Olkoot $C \in \ell(A, B)$ niin että $B \in AC$ ja $BC = 1$. Puolita jana AC . Olkoon puolituspiste O . Piirrä $\omega = \omega(O, r)$, missä $r = OA$, ja normaali a suoralle $\ell(A, B)$ sen pisteeseen B . Kun $X \in \omega \cap a$, on BX kysytyn pituinen jana.



Todistus. Sovelletaan Pythagoraan lausetta kolmioon $\triangle OBX$. Tässä $OX = (AB + 1)/2$ on ympyrän ω säde, ja $OB = (AB - 1)/2$. Väite saadaan sitten laskemalla BX . \square

Sanotaan, että reaaliluku x on **konstruoituva**, jos on olemassa geometrisen (harppi-
viivain)-konstruktio, jolla saadaan aikaan pituutta x oleva jana yksikköjanasta lähtien. Kaik-
kia jananpituuksia ei voida konstruoida harpin ja viivaimen avulla.

Edellisiä tehtäviä yhdistelemällä todetaan, että operaatiot summaus, tulo, jako ja neliö-
juurenotto säilyttävät konstruotuvuuden. Esimerkiksi, jos janat AB ja CD ovat annettuina,
voidaan geometrisesti konstruoida jana, jonka pituus on $\frac{2}{3} \cdot \sqrt{AB^2 + CD}$. Seuraava tulos
voidaan todistaa kuntalaajennusten avulla.

Lause 2.27. Luku x on konstruoituva jos ja vain jos se saadaan yksikköjanasta rationaalisin
operaatioin $(+, -, /, *)$ käyttäen juurenottoa.

Näin ollen janaa, jonka pituus on esimerkiksi $\sqrt[3]{2}$ ei voida geometrisesti konstruoida.
Lauseen 2.27 nojalla on myös geometrisesti mahdotonta (1) jakaa mikä tahansa kulma
kolmeen yhtä suureen kulmaan; (2) konstruoida neliö, jonka ala on sama kuin annetun
ympyrän ala.

3 Merkilliset pisteet

3.1 Menelaus ja Ceva

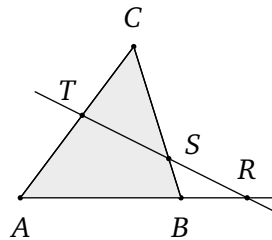
Menelauksen ja Cevan¹ lauseet koskevat kollineaarisuutta ja konkurrensia, eli ongelmaa, milloin kolme pistettä ovat samalla suoralla ja milloin kolme suoraa leikkaavat yhteisessä pisteessä, vastaavasti.

Tässä kappaleessa janat oletetaan yleensä suunnatuiksi.

Sanotaan, että R, S, T ovat kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla, jos $R \in \ell(A, B)$, $S \in \ell(B, C)$, $T \in \ell(C, A)$ mutta ne eivät ole kärkipisteitä A, B, C .

Lause 3.1 (Menelaus). Pisteet R, S, T kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla ovat kollineaariset jos ja vain jos

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT}{TA} = -1.$$



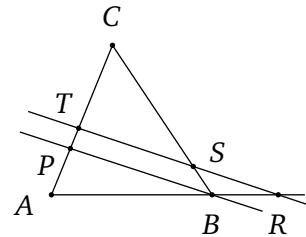
Tässä kolmio $\triangle ABC$ kierretään $A \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow S \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow A$ ja kaavan (suunnatut) janat kerätään matkan varrelta: $\downarrow \nearrow \downarrow \nearrow \downarrow$.

Todistus. (\Rightarrow) Oletetaan ensin, että pisteet R, S, T ovat kollineaariset, ja piirretään suora $b \parallel \ell(R, S, T)$ niin, että $B \in b$. Olkoon $P = \ell(A, C) \cap b$.
Lauseesta 1.5 seuraa, että

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AT}{TP} \quad \text{ja} \quad \frac{BS}{SC} = \frac{PT}{TC},$$

ja siten

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT}{TA} = \frac{AT}{TP} \cdot \frac{PT}{TC} \cdot \frac{CT}{TA} = -1.$$



(\Leftarrow) Oletetaan, että Menelauksen kaava toteutuu pisteille R, S, T . Olkoot $a = \ell(R, S)$ ja $T' = a \cap \ell(A, C)$. Pisteet R, S, T' ovat kollineaariset, joten edeltävän kohdan mukaan

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT'}{T'A} = -1,$$

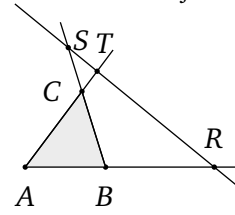
joten oletuksesta saadaan

$$\frac{CT}{TA} = \frac{CT'}{T'A}.$$

Esimerkin 1.3 mukaisesti $T = T'$, ja väite on todistettu. □

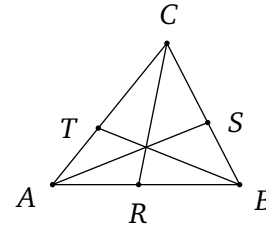
¹ Menelaus n.100; Ceva 1678

Menelauksen lauseessa ainakin yksi kollineaarisista pisteistä R, S, T on kolmion ulkopuolella – mahdollisesti kaikki kolme.



Lause 3.2 (Ceva). *Olkoot pisteet R, S, T kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla. Tällöin suorat $\ell(A, S)$, $\ell(B, T)$, $\ell(C, R)$ ovat konkurrentit jos ja vain jos*

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CT}{TA} = +1.$$

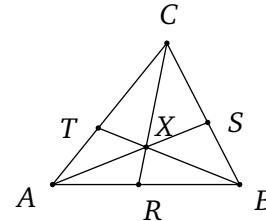


Todistus. (\Rightarrow) Olkoon X kyseisten suorien yhteinen leikkauspiste.

Sovelletaan Menelauksen lausetta tapauksiin $(\triangle ABT, \ell(R, X, C))$ ja $(\triangle BCT, \ell(S, X, A))$:

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BX}{XT} \cdot \frac{TC}{CA} = -1 \tag{3.1}$$

$$\frac{BS}{SC} \cdot \frac{CA}{AT} \cdot \frac{TX}{XB} = -1. \tag{3.2}$$



Kertomalla nämä yhtälöt keskenään saadaan Cevan kaava.

(\Leftarrow) Oletetaan, että Cevan kaava on voimassa. Olkoot $X = \ell(C, R) \cap \ell(B, T)$ ja $S' = \ell(A, X) \cap \ell(B, C)$. Todistuksen alkuosan mukaan

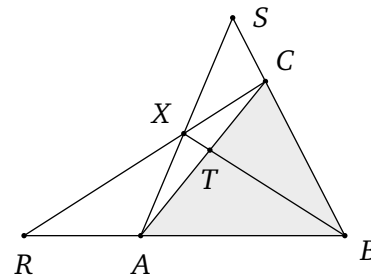
$$\frac{BS'}{S'C} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1,$$

joten oletuksen nojalla

$$\frac{BS'}{S'C} = \frac{BS}{SC}.$$

Esimerkistä 1.3 seuraa väite, eli $S = S'$. □

Huomaa, ettei Cevan lauseessa oleteta, että pisteet R, S, T olisivat kolmion sivujanoilla. Ne saattavat olla sivusuorilla kolmion ulkopuolella.



Jatketaan hieman Cevan lauseen todistusta. Huomaa että lauseessa on nyt summaus.

Lause 3.3 (van Aubel). *Olkoot pisteet R, S, T kolmion $\triangle ABC$ sivusuorilla siten, että $\ell(A, S)$, $\ell(B, T)$, $\ell(C, R)$ ovat konkurrentit leikatun pisteessä X . Tällöin*

$$\frac{BX}{XT} = \frac{BR}{RA} + \frac{BS}{SC}.$$

Todistus. Yhtälöistä (3.1) ja (3.2) seuraa

$$\frac{BX}{XT} \cdot \frac{TC}{AC} = \frac{BR}{RA} \quad \text{ja} \quad \frac{BX}{XT} \cdot \frac{AT}{AC} = \frac{BS}{SC},$$

mistä laskemalla yhteen saadaan

$$\frac{BX}{XT} \cdot \frac{(AT + TC)}{AC} = \frac{BR}{RA} + \frac{BS}{SC},$$

ja näin ollen väite on todistettu. \square

3.2 Kolmion merkilliset pisteet

Lause 3.4 (Painopiste). Kolmion $\triangle ABC$ mediaanit leikkaavat pisteessä G . Tämä **painopiste** toteuttaa ehdon

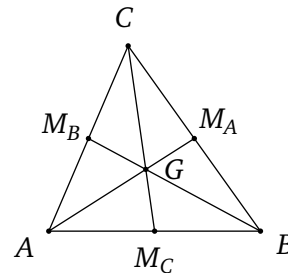
$$AG = 2 \cdot GM_A.$$

Todistus. Konkurrenttisuus seuraa Cevan lauseesta:

$$\frac{BM_A}{M_A C} \cdot \frac{CM_B}{M_B A} \cdot \frac{AM_C}{M_C B} = 1.$$

Tarkennus seuraa van Aubelin lauseesta:

$$\frac{AG}{GM_A} = \frac{AM_C}{M_C B} + \frac{AM_B}{M_B C} = 2.$$



\square

Seuraava tulos on Lause 2.21.

Lause 3.5 (Ympäri piirretty ympyrä). Kolmion \triangle sivujen keskinormaalit leikkaavat pisteessä O , joka on kolmion ympäri piirretyn ympyrän $\triangle(A, B, C)$ keskipiste.

Seuraavan tuloksen tarkennus on peräisin Eulerilta.² Suora $\ell(H, G, O)$ on **Eulerin suora**.

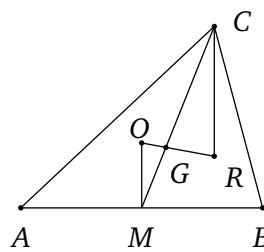
Lause 3.6 (Ortosentri). Kolmion $\triangle ABC$ korkeussuorat leikkaavat pisteessä H . Lisäksi ortosentri H , painopiste G ja ympäri piirretyn ympyrän keskipiste O ovat kollineaariset ja

$$HG = 2 \cdot GO.$$

Todistus. Jos $\triangle ABC$ on tasasivuinen, niin $O = G = H$. Oletetaan siis, että $CA \neq CB$, jolloin $G \neq O$. Merkitään lyhyesti $M = M_C$. Olkoon R piste suoralla $\ell(O, G)$ niin, että $RG = 2 \cdot GO$.

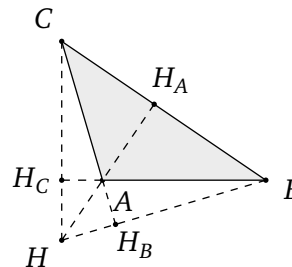
² Euler (1707 – 1783)

Osoitetaan, että $R = H$. Lauseen 3.4 mukaan $G \in CM$ ja $CG = 2 \cdot GM$. Oletuksen mukaan $RG = 2 \cdot GO$, ja siten $\triangle CGR \sim \triangle MGO$, jolloin $\angle CRG = \angle MOG$. Siten $\ell(O, M) \parallel \ell(C, R)$. Koskapa $\ell(O, M) \perp \ell(A, B)$, myös $\ell(C, R) \perp \ell(A, B)$, eli $\ell(C, R)$ on korkeussuora. Aivan samoin muut korkeussuorat kulkevat pisteen R kautta, ja niinpä $R = H$ on kuten vaadittu. \square



Jos kolmio $\triangle ABC$ ei ole teräväkulmainen, on sen ortosentri kolmion ulkopuolella.

Kolmion $\triangle ABC$ **ortokolmio** on $\triangle_O = \triangle H_A H_B H_C$, jonka kärkinä ovat korkeusjanojen kantapisteet.

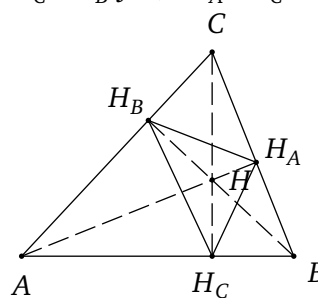


Esimerkki 3.1. Osoitetaan, että teräväkulmaisen kolmion \triangle korkeusjanat ovat ortokolmion \triangle_O kulmien puolittajat. Todetaan ensin, että nelikulmiot $\diamond AH_C H H_B$ ja $\diamond BH_A H H_C$

ovat konsykliset, sillä niissä $\angle H_B + \angle H_C = 180^\circ$ ja $\angle H_C + \angle H_A = 180^\circ$. Samaa kehää vastaavina kehäkulmina

$$\angle HAH_B = \angle HH_C H_B \quad \text{ja} \quad \angle H_A B H = \angle H_A H_C H.$$

Toisaalta kriteerin (KK) mukaan $\triangle A H H_B \sim \triangle B H H_A$, ja siten $\angle HAH_B = \angle H_A B H$, mistä väite seuraa. \square



Sanotaan, että ympyrä ω on monikulmion Γ **sisään piirretty ympyrä**, jos se sivuaa kaikkia kulmion Γ sivujanoja.

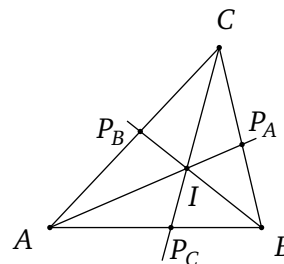
Lause 3.7 (Sisään piirretty ympyrä). *Kolmion kulmien puolittajat leikkaavat pisteessä I , joka on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.*

Todistus. Kulmanpuolittajia koskevan lauseen 2.13 mukaan

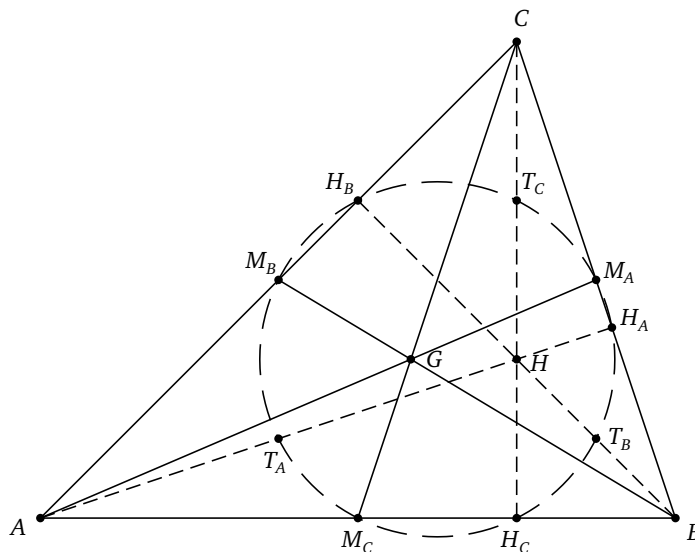
$$\frac{BP_A}{P_A C} \cdot \frac{CP_B}{P_B A} \cdot \frac{AP_C}{P_C B} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1,$$

jolloin konkurrenttisuus seuraa Cevan lauseesta.

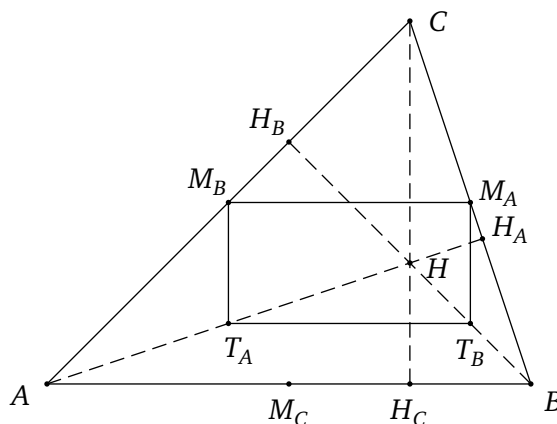
Jokaisen pisteen $X \in \ell(A, P_A)$ etäisyys (kohtisuorasti) suorista $\ell(A, B)$ ja $\ell(A, C)$ on sama. Täten kulmanpuolittajien leikkauspisteen I etäisyys sivuista on sama, eli I on sen ympyrän keskipiste, joka sivuaa kolmion $\triangle ABC$ sivuja. \square



Esimerkki 3.2 (Feuerbach 1822). Ympyrä ω , joka kulkee kolmion $\triangle ABC$ mediaanien kantapisteiden M_A, M_B, M_C kautta, kulkee myös korkeusjanojen kantapisteiden H_A, H_B, H_C ja janojen AH, BH, CH keskipisteiden T_A, T_B, T_C kautta.



Todistetaan tämä. (SKS~)-kriteerin mukaan $\triangle BHC \sim \triangle BT_B M_A$, joten $\ell(M_A, T_B) \perp \ell(A, B)$ ($\perp \ell(C, H_C)$). Aivan samoin $\ell(M_B, T_A) \perp \ell(A, B)$. Toisaalta $\triangle ABH \sim \triangle T_A T_B H$ ja $\triangle ABC \sim \triangle M_B M_A C$, joten $\ell(T_A, T_B) \parallel \ell(A, B)$ ja $\ell(M_B, M_A) \parallel \ell(A, B)$. Näin ollen $\diamond M_B M_A T_B T_A$ on suorakulmio.



Aivan samoin $\diamond M_A M_C T_A T_C$ on suorakulmio. Näillä kahdella suorakulmiolla on yhteinen lävistäjä $M_A T_A$, joten ne kuuluvat sen ympyrän ω kehälle, jonka halkaisijana $M_A T_A$ on. Eri-tyisesti $M_A, M_B, M_C \in \omega$ ja $T_A, T_B, T_C \in \omega$. Lisäksi $\angle H_A = \angle H_B = \angle H_C = 90^\circ$, joten myös $H_A, H_B, H_C \in \omega$, koska $T_A M_A, T_B M_B$ ja $T_C M_C$ ovat ympyrän ω halkaisijoita. Väite on todistettu. \square

3.3 Monikulmioiden aloista

Monikulmion ala määrätään sen suhteessa yksikköalaan, eli neliön alaan, jonka sivut ovat yksikköjanan pituisia. Kolmion Δ ala on

$$\text{ala}(\Delta) = \frac{1}{2}ha,$$

missä a on sivun pituus, ja h sen vastaisen korkeusjanan pituus. Oheinen lause sanoo, että tällainen määrittely käy laatuun.

Lause 3.8. Olkoon $\Delta = \Delta ABC$ kolmio. Tällöin

$$AH_A \cdot BC = BH_B \cdot AC = CH_C \cdot AB.$$

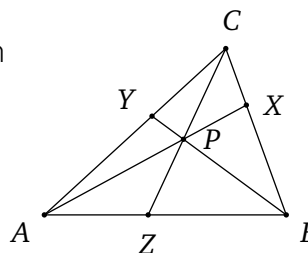
Todistus. Harjoitus. □

Esimerkki 3.3. Yhtenevillä kolmioilla on samansuuruinen ala. Tämän varmistamiseksi riittää todeta, että yhtenevillä kolmioilla $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ on yhtä pitkät vastinkorkeusjanat. (Tässä $\Delta AH_C C \cong \Delta A'H_C' C'$ kriteerin (2K+S) nojalla.) □

Esimerkki 3.4. Aloja voidaan käyttää hyväksi todistettaessa geometrisia tuloksia:

Olkoot P kolmion ΔABC jokin sisäpiste ja $X = \ell(A, P) \cap \ell(B, C)$, $Y = \ell(B, P) \cap \ell(A, C)$, $Z = \ell(C, P) \cap \ell(A, B)$. Tällöin

$$\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1.$$

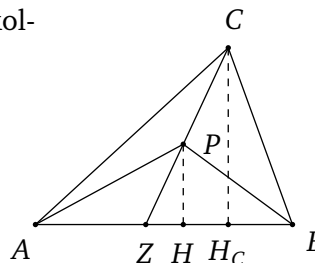


Tämän todistamiseksi merkitään $\Delta = \Delta ABC$. Nyt

$$\frac{\text{ala}(\Delta ABP)}{\text{ala}(\Delta)} = \frac{AB \cdot PH}{AB \cdot CH_C} = \frac{PH}{CH_C} = \frac{PZ}{CZ},$$

sillä $\Delta ZPH \sim \Delta ZCH_C$. Vastaavat lausekkeet saadaan kolmioille ΔAPC ja ΔBCP , ja siten

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\text{ala}(\Delta ABP) + \text{ala}(\Delta APC) + \text{ala}(\Delta BCP)}{\text{ala}(\Delta)} \\ &= \frac{PZ}{CZ} + \frac{PY}{BY} + \frac{PX}{AX}. \quad \square \end{aligned}$$



(SSS)-lauseen nojalla kolmion sivujen pituudet määräävät sen alan (koska yhtenevillä kolmioilla on sama ala). Seuraava tulos³, joka jää harjoitukseksi, kertoo miten.

Lause 3.9 (Heronin kaava). *Olkoot kolmion Δ sivujen pituudet a, b, c ja olkoon $p = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$ puolet sen piirin pituudesta. Tällöin*

$$ala(\Delta) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Esimerkki: Yhteisositettavuus*

Monikulmion Γ **ositus** tarkoittaa äärellistä monikulmioiden joukkoa, jotka peittävät koko kulmion Γ ja joilla ei ole yhteisiä pisteitä mahdollisia sivupisteitä lukuunottamatta. Seuraava tulos⁴ sanoo, että jos monikulmioilla Γ_1 ja Γ_2 on sama ala, ovat ne **yhteisositettavissa**, eli Γ_1 voidaan leikata osiin ja koota uudelleen monikulmioksi Γ_2 .

Lause 3.10 (Wallace–Bolyai–Gerwien). *Jos monikulmioilla Γ_1 ja Γ_2 on sama ala, voidaan ne osittaa yhteneviin monikulmioihin:*

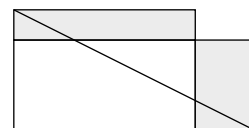
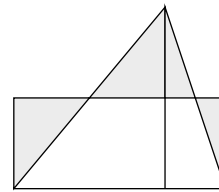
$$\Gamma_i = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_{ij} \quad \text{missä} \quad \Gamma_{1j} \cong \Gamma_{2j} \quad \text{kaikilla } j.$$

Todistuksen ajatus. Osoitetaan, että jokainen monikulmio Γ on yhteisositettavissa sellaisen suorakulmion kanssa, jonka korkeus on 1. Väite seuraa tästä.

Monikulmio Γ voidaan osittaa kolmioihin $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ lävistäjien avulla. Edelleen jokainen kolmio Δ_i voidaan osittaa neljään osaan, ja koota uudelleen suorakulmioksi Γ_i kuten kuvassa.

Oletetaan sitten, että meillä on kaksi sama-alaista suorakulmiota, joiden korkeudet ovat a ja b , missä $b < a \leq 2b$.

Asetetaan nämä suorakulmiot kuten kuvassa. Todetaan, että ne ovat yhteisositettavissa. Toistamalla tätä menettelyä päätteellään, että jokainen suorakulmio Γ_i on yhteisositettavissa suorakulmion Γ'_i kanssa, jonka korkeus on 1.



Liimaamalla kaikki saadut monikulmiot 'nauhaksi' $\Gamma'_1 \Gamma'_2 \dots \Gamma'_n$ on osoitettu, että jokainen monikulmio on yhteisositettavissa tällaisen suorakulmion kanssa. \square

Seuraavan vuodelta 1970 olevan tuloksen todistaminen vaatii yllättävän paljon apuneuvoja. Huomaa, että neliön jakaminen $2n$ kappaleeseen samanlaiseen kolmioon ei tuota liiemmästi vaikeuksia.

Lause 3.11 (Monsky). *Neliötä ei voida osittaa samanlaisiin kolmioihin, joita on pariton lukumäärä.*

³ Heron n.75 jKr. Tulos lienee peräisin Arkhimedeeltä (287 – 212 eKr)

⁴ Wallace 1807, Gerwien 1833; Bolyain (1802 – 1860) esittämä ongelma.

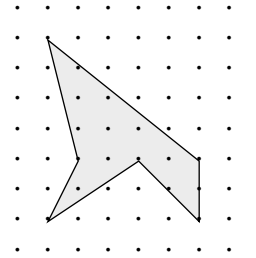
Esimerkki: Pickin lause ja hilapisteet*

Monikulmioiden aloille on myös eräs oikotie, **Pickin metodi** vuodelta 1899, jota voidaan käyttää kun monikulmion kärkipisteet ovat **hilapisteitä**. Konstruoidaan tasoon suorakulmainen koordinaatisto yksikköjanan avulla, jolloin tason piste voidaan esittää muodossa (r,s) , missä r on x -koordinaatti ja s on y -koordinaatti. Pisteet, joiden koordinaatit ovat kokonaislukuja ovat hilapisteitä.

Lause 3.12 (Pick). Olkoon Γ monikulmio, jonka kärkipisteet ovat hilapisteitä. Tällöin

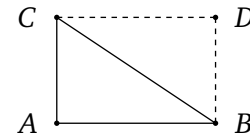
$$\text{ala}(\Gamma) = \frac{1}{2}p + q - 1,$$

missä p (q , vastaavasti) on niiden hilapisteiden lukumäärä, jotka ovat kulmion Γ sivuilla (sisäosassa, vast.).



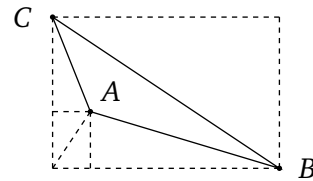
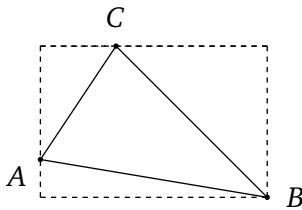
Todistuksen ajatus. Todetaan ensin, että jos kaava pitää paikkansa monikulmiolle Γ_1 ja Γ_2 , joilla on yksi yhteinen sivu, niin se pitää paikkansa näiden yhdelmälle Γ . Koska jokainen monikulmio voidaan jakaa kolmioihin lävistäjien avulla, palautuu todistus kolmioihin.

Oletetaan ensin, että $\triangle ABC$ on suorakulmainen, ja olkoon $\diamond ABDC$ suorakulmio kuten kuvassa. Merkitään $a = AB$ ja $b = AC$. Jos hypotenuusalla BC on $k + 2$ hilapistettä (mukaanlukien B ja C), niin $p = a + b + k + 1$.



Toisaalta kolmion sisällä olevien hilapisteiden lukumäärä on $q = ((a - 1)(b - 1) - k) / 2$, ja siten laskemalla saadaan, että $p/2 + q - 1 = ab/2$ kuten vaadittua.

Tapaukset, joissa $\triangle ABC$ ei ole suorakulmainen palautuvat seuraaviin kahteen tapaukseen, joissa kumpaankin voidaan soveltaa suorakulmaisuuutta.



□

Huomaa, että Pickin lauseen mukaan **primitiivisen kolmion**, joilla vain kärkipisteet ovat hilapisteitä, ala on aina $1/2$ (!).

Esimerkki 3.5. Browkin ja Steinhaus todistivat, että kullekin luonnolliselle luvulle n on olemassa neliö ja ympyrä, joiden sisällä on tarkalleen n hilapistettä. Seuraava Schinzelin tulos on hieman yllättävä: Kullekin luonnolliselle luvulle n on olemassa ympyrä jonka kehällä on tarkalleen n hilapistettä. □

Esimerkki: Pistejoukon peittäminen ympyrällä*

Olkoot $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ tason pistejoukko ja

$$d = \max\{P_i P_j : 0 \leq i, j \leq n\}$$

sen **halkaisija**. Sanotaan, että ympyrä $\omega = \omega(O, r)$ **peittää** pistejoukon \mathcal{P} , jos jokainen P_i on ω :n sisäpiste (mukaanlukien kehäpisteet). Pienintä peittävän ympyrän sädettä kutsutaan joukon \mathcal{P} **peittosäteeksi**.

Esimerkki 3.6. Olkoon d äärellisen pistejoukon \mathcal{P} halkaisija, ja r sen peittosäde. Tällöin

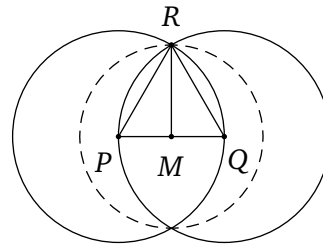
$$\frac{1}{2}d \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}d.$$

Tämän näyttääksemme olkoot P ja Q joukon \mathcal{P} sellaisia pisteitä, että $PQ = d$. Varmastikin $r \geq \frac{1}{2}d$.

Piirretään ympyrät $\omega_P = \omega(P, d)$ ja $\omega_Q = \omega(Q, d)$. Koska d on maksimaalinen pisteiden välinen etäisyys, molemmat ympyrät ω_P ja ω_Q peittävät pistejoukon \mathcal{P} ja siten \mathcal{P} sisältyy ympyröiden leikkausalueeseen. Olkoot R ympyröiden leikkauspiste ja M janan PQ keskipiste. Tällöin $\omega = \omega(M, MR)$ peittää joukon \mathcal{P} , missä

$$MR^2 = d^2 - \left(\frac{1}{2}PM\right)^2 = d^2 - \frac{1}{4}d^2 = \frac{3}{4}d^2$$

ja niinpä $MR = \frac{\sqrt{3}}{2}d$. Siten myös $r \leq \frac{\sqrt{3}}{2}d$.



□

Jung todisti vuonna 1901, että edellistä tulosta voidaan parantaa:

Lause 3.13 (Jung). Olkoon d äärellisen pistejoukon \mathcal{P} halkaisija, ja r sen peittosäde. Tällöin

$$\frac{1}{2}d \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

Tätä ylärajaa ei voida yleisesti parantaa, sillä jos \mathcal{P} koostuu tasasivuisen kolmion kärkipisteistä, niin edeltävään epäyhtälöön saadaan yhtäsuuruus.

Todistus (Ajatus). Olkoon $\omega = \omega(O, r)$ peittävä ympyrä, jonka säde on pienin.

- Vähintään kaksi joukon \mathcal{P} pistettä on ympyrän ω kehällä.

Sanotaan, että peittävän ympyrän ω kaari $P_i P_j$ on **pistevapaa**, jos se ei sisällä muita joukon \mathcal{P} pisteitä kuin pisteet P_i ja P_j .

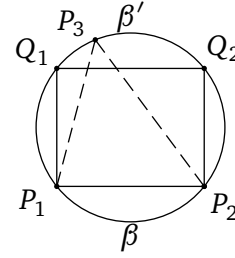
- Olkoot $P, Q \in \mathcal{P}$ ympyrän ω kehällä niin, että kaari PQ on pistevapaa. Tällöin tämän kaaren pituus on korkeintaan puolet ympyrän ω kehän pituudesta.

Näin ollen peittävän ympyrän ω halkaisijan päätepisteet ovat joukossa \mathcal{P} tai kehällä on kolmas joukon \mathcal{P} piste, jonka (joku) halkaisija erottaa pisteiden P, Q toiselle puolen. Tästä huomiosta seuraa, että *pienisäteisin peittävä ympyrä ω on yksikäsitteinen.*

- $r \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot d.$

Jos PQ , missä $P, Q \in \mathcal{P}$, on ympyrän ω halkaisija, niin $PQ = d$ ja siten $r = d/2 \leq (\sqrt{3}/3) \cdot d$. Oletetaan sitten, että halkaisijoiden molemmat päätepisteet eivät ole joukossa \mathcal{P} .

Olkoon $\beta = P_1P_2$ (kuten kuvassa) ympyrän ω pisin pistevapaa kaari. Täten kaaren β pituus on (aidosti) pienempi kuin puolet ympyrän ω kehästä. Piirretään suorakulmio $\diamond P_1Q_1Q_2P_2$ kuten kuvassa. Tällöin $Q_1, Q_2 \notin \mathcal{P}$, sillä P_2Q_1 ja P_1Q_2 ovat ympyrän ω halkaisijoita. Kaaren $\beta' = Q_1Q_2$ (kuva) pituus on sama kuin kaaren β pituus, ja siten oletuksesta seuraa, että β' ei ole pistevapaa. (Muutoin β ei olisi pisin pistevapaa kaari.) Olkoon $P_3 \in \mathcal{P}$ piste kaarella β' .



Kolmion $\triangle P_1P_2P_3$ jotain sivua P_iP_j vastaava kaari on vähintään kolmannes ympyrän kehän pituudesta, mutta korkeintaan puolet siitä. Jos \triangle' on tasasivuinen kolmio, jonka ympäri piirrettynä ympyränä ω on, todetaan laskemalla, että $r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot s$, missä s on kolmion \triangle' sivun pituus. Siten ehdosta $P_iP_j \geq s$ seuraa väite:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}s \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot P_iP_j \leq \frac{\sqrt{3}}{3}d.$$

□

Osa II LIIKE TASOSSA

4 Isometriat

4.1 Transformaatiot

Kuvaus $\alpha: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ on tason **transformaatio** (tai **muunnos**), jos se on bijektio. Transformaatio siis järjestää tason pisteet uudelleen niin, että jokainen piste kuvautuu joksikin pisteeksi ja jokainen piste on tarkalleen yhden pisteen kuva.

Kuvio on mikä tahansa tason pistejoukko, eli $K \subseteq \mathbb{E}$. Kun α on tason transformaatio, on usein selkeämpää kirjoittaa pisteen P ja kuvion K kuvalle

$$\begin{aligned}\alpha(P) &= P^\alpha, \\ \alpha(K) &= K^\alpha = \{P^\alpha : P \in K\}.\end{aligned}$$

Janan PQ kuva transformaatiossa α on $\alpha(PQ) = \{R^\alpha : R \in PQ\}$. Toisaalta, $P^\alpha Q^\alpha$ on (kuva)pisteitä P^α ja Q^α yhdistävä jana, eli $P^\alpha Q^\alpha = \{R : R \in P^\alpha Q^\alpha\}$. Huomattakoon, että yleisesti $P^\alpha Q^\alpha$ ei ole sama asia kuin $\alpha(PQ)$.

Esimerkki 4.1. Olkoon O tason kiinnitetty piste. Ehdosta

$$OP^\alpha = OP^2, \quad P^\alpha \in \vec{\ell}(O, P)$$

määritelty kuvaus α on hyvinmääritelty tason transformaatio, joka siirtää pisteen P (suunnattua) suoraa $\ell(O, P)$ pitkin etäisyydelle OP^2 pisteestä O . Tällainen transformaatio α 'väärinää' geometriset kuviot. Esimerkiksi suoran ℓ kuva $\ell^\alpha (= \alpha(\ell))$ ei ole välttämättä suora. \square

Transformaation α käänteiskuvaus α^{-1} on myös bijektio ja siten transformaatio. Lisäksi, $\alpha\alpha^{-1} = \iota = \alpha^{-1}\alpha$, missä ι on **identiteettikuvaus**, $\iota(P) = P$ kaikille pisteille P . Transformaatioiden yhdisteet $\beta\alpha$ ovat myös transformaatioita, ja koska kuvausten yhdistäminen on assosiativista,

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

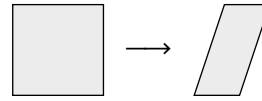
muodostavat transformaatiot ryhmän \mathcal{T} . Eryteisesti, jos \mathcal{G} on perhe transformaatioita $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{T}$, joka on suljettu kuvausten yhdistämiseen ja käänteiskuvauksiin nähden, on \mathcal{G} ryhmän \mathcal{T} aliryhmä.

Ryhmäominaisuudet ovat usein hyödyllisiä käsiteltäessä transformaatioita. Jos \mathcal{G} on ryhmä transformaatioita, niin sen alkioille ovat voimassa esimerkiksi seuraavat säännöt:

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^{-1} &= \iota = \alpha^{-1}\alpha, & \alpha_1\beta &= \alpha_2\beta \implies \alpha_1 = \alpha_2, \\ \beta\alpha_1 &= \beta\alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2, & \alpha = \beta\gamma &\implies \beta = \alpha\gamma^{-1}, \\ \alpha &= \gamma\beta \implies \beta = \gamma^{-1}\alpha, & (\beta\alpha)^{-1} &= \alpha^{-1}\beta^{-1}.\end{aligned}$$

Jos kaksi transformaatiota α ja β toteuttavat ehdon $\beta\alpha = \alpha\beta$, sanotaan, että ne **kommutoivat**. Yleensä transformaatiot eivät kommutoi keskenään.

Transformaatiota, joka kuvaa jokaisen suoran suoraksi, $\ell \mapsto \ell^\alpha$, kutsutaan **affiiniksi kuvaukseksi** (tai **affiiniksi transformaatioksi**). Tällöin siis $\alpha(\ell(P, Q)) = \ell(\alpha(P), \alpha(Q))$.



Lause 4.1. *Affiinin kuvauksen käänteiskuvaus on affiini, ja affiinien kuvausten yhdisteet ovat affiineja. Siten affiinit kuvaukset muodostavat ryhmän.*

Todistus. Olkoon α affiini, ja P, Q kaksi eri pistettä. Tällöin suoran $\ell = \ell(\alpha^{-1}(P), \alpha^{-1}(Q))$ kuva ℓ^α on suora $\ell(P, Q)$. Näin ollen α^{-1} kuvaa suoran $\ell(P, Q)$ suoraksi ℓ . Yhdistämistä koskeva väite on myös selvä. \square

Lause 4.2. *Olkoot α affiini kuvaus ja $a \parallel b$ yhdensuuntaiset suorat. Tällöin myös $a^\alpha \parallel b^\alpha$. Eriyisesti, jos $\diamond ABCD$ on suunnikas, samoin on $\diamond A^\alpha B^\alpha C^\alpha D^\alpha$.*

Todistus. Olkoon $a \neq b$. Jos $a \nparallel b$, sanokaamme $a \cap b = P$, niin selvästi $P^\alpha = a^\alpha \cap b^\alpha$. Samoin, koska α^{-1} on affiini, niin ehdosta $a^\alpha \cap b^\alpha \neq \emptyset$ seuraa, että $a \cap b \neq \emptyset$. \square

4.2 Isometrioiden määritelmä

Transformaatio $\alpha \in \mathcal{T}$ on **isometria**, jos se säilyttää pisteiden väliset etäisyydet, eli jos kaikille P ja Q ,

$$P^\alpha Q^\alpha = PQ.$$

Lause 4.3. *Jokainen isometria kuvaa janan yhtä pitkäksi janaksi. Siten isometria α on affiini kuvaus, jolle on voimassa $\alpha(PQ) = P^\alpha Q^\alpha$.*

Todistus. Lauseen 1.3(5) mukaan, $R \in PQ$ jos ja vain jos $PQ = PR + RQ$, ja siten isometrialle α on voimassa: $P^\alpha Q^\alpha = P^\alpha R^\alpha + R^\alpha Q^\alpha$, mistä seuraa, että $R \in PQ$ jos ja vain jos $R^\alpha \in P^\alpha Q^\alpha$. \square

Lause 4.4. *Transformaatio α on isometria α jos ja vain jos se kuvaa jokaisen kolmion Δ yhteneväksi kolmioksi Δ^α .*

Todistus. Oletetaan ensin, että α on isometria. Ensinnäkin kolmion $\Delta = \triangle ABC$ kuva on kolmio, sillä sivut kuvautuvat janoiksi, jotka leikkaavat toisensa kärkipisteiden kuvapisteissä injektiivisyyden nojalla. Koska isometria säilyttää etäisyydet, niin kolmioiden $\Delta = \triangle ABC$ ja $\Delta^\alpha = \triangle A^\alpha B^\alpha C^\alpha$ vastinsivut ovat yhtä pitkät ja siten (SSS) todistaa tuloksen.

Väitteen todistamiseksi toiseen suuntaan olkoon α vaaditunlainen transformaatio. Olkoot AB jana ja C piste site, että $\Delta = \triangle ABC$ on kolmio. Nyt $\Delta \cong \Delta^\alpha$, ja siten α kuvaa janan AB yhtä pitkäksi janaksi $A^\alpha B^\alpha$, ja niinpä α on isometria. \square

Isometria on kolmioiden yhtenevyyden yleistys. Sanotaan, että kaksi tasokuviota K_1 ja K_2 ovat **yhtenevät** (tai **kongruentit**), jos on olemassa isometria α , jolla $K_2 = K_1^\alpha$. Identiteettikuvaus ι on selvästi isometria, ja samoin on jokaisen isometrian α käänteiskuvaus α^{-1} . Lisäksi kahden isometrian α ja β yhdiste $\beta\alpha$ on jälleen isometria.

Lause 4.5. Tason isometriat muodostavat ryhmän \mathcal{E} .

Seuraavan lauseen mukaan tason jokainen piste P tulee täysin määrättyä etäisyyksistään annetun kolmion kärkipisteisiin.

Lause 4.6 (Kolmen pisteen sääntö). Kolme epäkollineaarista pistettä määräävät isometrian: Olkoon Δ kolmio, ja $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$. Jos $\Delta^\alpha = \Delta^\beta$, niin $\alpha = \beta$.

Todistus. Jos $PA = QA$ ja $PB = QB$, niin A ja B kuuluvat janan PQ keskinormaalille. Siten kun pisteet A, B, C ovat epäkollineaariset, ja $PA = QA$, $PB = QB$ ja $PC = QC$, on välttämättä $P = Q$. Erityisesti, jos $A^\alpha = A' = A^\beta$, $B^\alpha = B' = B^\beta$ ja $C^\alpha = C' = C^\beta$, niin $A'P^\alpha = A'P^\beta$, $B'P^\alpha = B'P^\beta$ ja $C'P^\alpha = C'P^\beta$ ja siten edeltävän mukaan $P^\alpha = P^\beta$. Näin ollen α ja β kuvaavat samoin kaikki tason pisteet. \square

Kiintopisteet ja suunta

Isometrioiden kaksi keskeisintä käsitettä ovat kiintopisteet ja suunnansäilyvyys.

Transformaation α **kiintopisteet** ovat ne pisteet P , joilla $P^\alpha = P$. Sanotaan, että transformaatio α **kiinnittää kuvion K** , jos $K = K^\alpha$. Lisäksi, α **kiinnittää kuvion K pisteittäin**, jos $P^\alpha = P$ kaikilla $P \in K$, eli jos K koostuu vain transformaation α kiintopisteistä.

Esimerkki 4.2. (1) Esimerkin 4.1 kuvauksen α kiintopisteet ovat O ja yksikköympyrän $\omega(O, 1)$ kehäpisteet, eli α kiinnittää ympyrän $\omega(O, 1)$ pisteittäin. Kuvaus α kiinnittää myös kaikki suorat $\ell(O, P)$, missä $P \neq O$, mutta ei pisteittäin.

(2) Transformaatiot, jotka kiinnittävät kuvion K muodostavat ryhmän \mathcal{T} aliryhmän. Samoin muodostavat ne transformaatiot, jotka kiinnittävät kuvion K pisteittäin. \square

Olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kolmio, jonka kärkipisteet luetaan esimerkiksi vastapäivään. Isometria α **säilyttää kolmion Δ suunnan**, jos kuvakolmion Δ^α kärkipisteet vastapäivään luetuna ovat $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha$. Muutoin α **kääntää kolmion Δ suunnan** (eli kuvakolmion pisteet vastapäivään ovat $A^\alpha, C^\alpha, B^\alpha$).

Isometria α on **suunnansäilyttävä**, jos se säilyttää kaikkien kolmioiden suunnan, ja se on **suunnankääntävä**, jos se kääntää kaikkien kolmioiden suunnan. Osoitetaan, että isometria on joko suunnansäilyttävä tai -kääntävä, eli suunnan suhteen isometriat käyttäytyvät samoin kaikkiin kolmioihin nähden: $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^-$, missä

\mathcal{E}^+ = suunnansäilyttävät isometriat,

\mathcal{E}^- = suunnankääntävät isometriat.

Jos isometria α säilyttää suunnan ja β kääntää suunnan, niin niiden yhdiste $\beta\alpha$ kääntää suunnan. Suunnan säilyvyys ja kääntyvyys käyttäytyvät kuten $+1$ ja -1 kertomisen suhteen.

\cdot	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1
-1	-1	$+1$

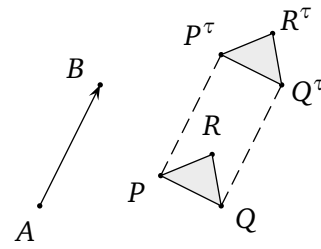
Isometrioiden tyypit

Translaatio (eli yhdensuuntaissiirto): Suunnattu jana \overline{AB} määrää translaation τ , joka siirtää pisteen janan \overline{AB} suuntaisesti sen pituuden verran:

$$PP^\tau = AB \quad \text{ja} \quad \ell(P, P^\tau) \parallel \ell(A, B).$$

Translaation τ **pituus** on $\tau = AB$ ja sen **suunta** $\overline{\tau}$ on janan \overline{AB} suunta. Merkitään myös $\tau = \tau_{AB}$.

Todetaan, että $\diamond PQQ^\tau P^\tau$ on suunnikas, joten $PQ = P^\tau Q^\tau$, ja siis τ on isometria.



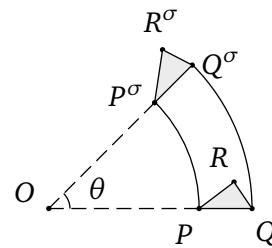
Lause 4.7. Jokainen translaatio on suunnansäilyttävä isometria, jolla ei ole kiintopisteitä. Lisäksi translaation $\tau = \tau_{AB}$ käänteiskuvaus on translaatio $\tau^{-1} = \tau_{BA}$.

Rotaatio (eli kierto): Piste O ja kulma θ määräävät rotaation σ , joka kiertää pisteen O -keskisen ympyrän kehää kulman θ verran. Tässä θ on kuvauksen σ **rotaatiokulma**, ja O on sen **keskus**:

$$OP = OP^\sigma \quad \text{ja} \quad \angle POP^\sigma = \theta.$$

Merkitään myös

$$\sigma = \sigma_{(O, \theta)}.$$



Yhtenevyyskriteerien avulla voidaan osoittaa, että rotaatio on isometria.

Lause 4.8. Jokainen rotaatio on suunnansäilyttävä isometria, jolla on tarkalleen yksi kiintopiste (kun rotaatiokulma $\neq 0^\circ$). Lisäksi rotaation $\sigma = \sigma_{(O, \theta)}$ käänteiskuvaus on rotaatio $\sigma^{-1} = \sigma_{(O, -\theta)}$.

Jos $\theta = 180^\circ$ on rotaatio **puolikierto** pisteen O suhteen, ja tällöin merkitään

$$\delta_O = \sigma_{(O, 180^\circ)}.$$

Puolikiertoa kutsutaan joskus myös ‘peilaukseksi pisteen suhteen’.

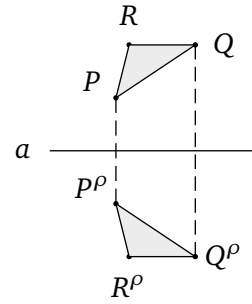
Esimerkki 4.3. Kaksi pelaajaa laittaa vuorotellen kymmensenttisen suorakulmaiselle pöydälle niin, että kolikot eivät mene edes osittain päällekkäin. Pelin voittaa se, joka kykenee laittamaan viimeisen kolikon. Tällöin pelin aloittajalla on voittostrategia. Nimittäin, ensimmäinen pelaaja laittaa ensin kolikon pöydän keskelle (keskipiste O), ja sitten hän laittaa aina kolikon asemaan $\delta_O(P)$, jos toinen pelaaja asetti kolikon pisteeseen P . □

Peilaus (eli **reflektio**): Suora a määrää peilauksen ρ , joka kuvaa pisteen suoran a normaalille ja yhtä etäälle siitä (toiselle puolel): kun $X = a \cap \ell(P, P^\rho)$,

$$\ell(P, P^\rho) \perp a \quad \text{ja} \quad PX = XP^\rho.$$

Suora a on peilauksen **akseli**. Merkitään myös

$$\rho = \rho_a.$$

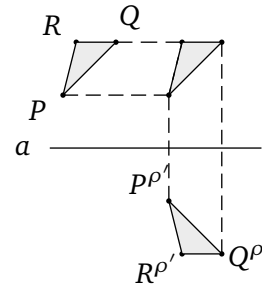


Yhtenevyyskriteerien avulla voidaan osoittaa, että peilaus on isometria.

Lause 4.9. Jokainen peilaus on suunnankääntävä isometria, jonka kiintopisteet ovat sen akselin pisteet. Lisäksi peilauksen ρ_a käänteiskuvaus on se itse $\rho^{-1} = \rho$.

Siirtopeilaus: Olkoon τ translaatio ja $\rho = \rho_a$ peilaus suoran a suhteen, missä $a \parallel \vec{\tau}$. Yhdiste $\rho' = \rho\tau$ on siirtopeilaus, jonka **suunta** on $\vec{\tau}$ ja **pituus** τ . Todetaan, että siirtopeilaukselle

$$\rho' = \rho_a\tau = \tau\rho_a.$$



Koska siirtopeilaus on kahden isometrian yhdiste, on se aina isometria.

Lause 4.10. Jokainen siirtopeilaus on suunnankääntävä isometria, jolla ei ole kiintopisteitä. Lisäksi siirtopeilauksen $\rho' = \rho_a\tau$ käänteiskuvaus on siirtopeilaus $(\rho')^{-1} = \rho_a\tau^{-1}$.

Luonnehdinta

Lause 4.11. (1) Jokainen isometria α voidaan esittää korkeintaan kolmen peilauksen yhdisteenä.

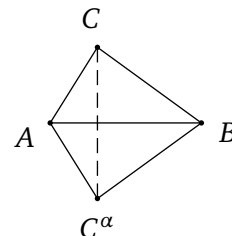
(2) Jokainen isometria on joko suunnansäilyttävä tai suunnankääntävä.

(3) Lisäksi, jos isometrialla α on kiintopiste, on se korkeintaan kahden peilauksen yhdiste.

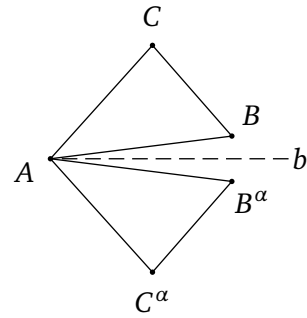
Todistus. Olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kiinnitetty kolmio, ja $\triangle A^\alpha B^\alpha C^\alpha \cong \Delta$ sen kuva. Jaetaan tarkastelu neljään kohtaan.

(a) Jos $A = A^\alpha, B = B^\alpha, C = C^\alpha$, niin $\alpha = \iota$, sillä kolme pistettä määräävät isometrian (lause 4.6).

(b) Jos $A = A^\alpha, B = B^\alpha, C \neq C^\alpha$, niin lauseen 4.6 mukaan α on peilaus: $\alpha = \rho_a$, missä $a = \ell(A, B)$.



(c) Jos $A = A^\alpha$, $B \neq B^\alpha$, $C \neq C^\alpha$, niin olkoon b janan BB^α keskinormaali. Koskapa nyt $AB = AB^\alpha$, on $A \in b$. Isometria $\beta = \rho_b \alpha$ toteuttaa ehdot $A = A^\beta$ ja $B = B^\beta$, joten kohtien (a) ja (b) mukaan β on peilaus tai ι . Koska $\alpha = \rho_b^{-1} \beta = \rho_b \beta$, on α korkeintaan kahden peilauksen yhdiste.



(d) Jos $A \neq A^\alpha$, $B \neq B^\alpha$, $C \neq C^\alpha$, niin olkoon c janan AA^α keskinormaali ja $\gamma = \rho_c \alpha$. Tällöin $A = A^\gamma$, ja siten kohtien (a), (b) ja (c) mukaan γ on korkeintaan kahden peilauksen yhdiste. Koska $\alpha = \rho_c \gamma$, on α korkeintaan kolmen peilauksen yhdiste.

Todetaan vielä lopuksi, että α säilyttää suunnan, jos se on identiteettikuvaus tai kahden peilauksen yhdiste. Muutoin se on yhden tai kolmen peilauksen yhdisteenä suunnankääntävä. □

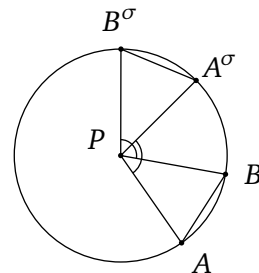
Myös kiintopisteiden $P^\alpha = P$ lukumäärä vaikuttaa isometrian luonteeseen. Translaatiolla $\tau \neq \iota$ ja siirtopeilauksella ei ole kiintopisteitä, rotaatiolla $\sigma \neq \iota$ on tarkalleen yksi kiintopiste (sen keskus) ja peilauksella niitä on äärettömän monta (kaikki sen akselin pisteet).

Lause 4.12. *Olkoon α isometria, jolla on ainakin yksi kiintopiste. Tällöin*

- (1) α on rotaatio, jos se säilyttää suunnan.
- (2) α on peilaus, jos se kääntää suunnan.

Todistus. Olkoon $P^\alpha = P$.

Oletetaan ensin että α säilyttää suunnan, ja katsotaan miten se kuvaa kolmion $\triangle PAB$, missä $PA = PB$. Tällöin pisteet A, A^α, B, B^α ovat ympyrän $\omega(P, PA)$ kehällä. Nyt α kuvaa kolmion kärkipisteet samoin kuin rotaatio $\sigma_{(P,\theta)}$, missä $\theta = \angle APA^\alpha$.



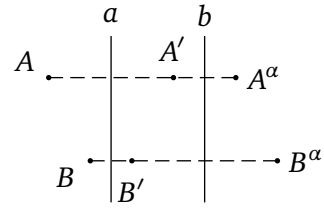
Jos taas α kääntää suunnan, on se lauseen 4.11 mukaan peilaus, koskapa kahden peilauksen yhdiste aina säilyttää suunnan. □

Lause 4.13. *Olkoon α isometria, joka ei kiinnitä yhtään pistettä. Tällöin*

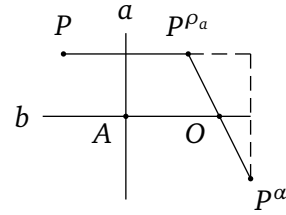
- (1) α on translaatio, jos se säilyttää suunnan.
- (2) α on siirtopeilaus, jos se kääntää suunnan.

Todistus. Oletetaan ensin, että α säilyttää suunnan.

Lauseen 4.11 mukaan α on kahden peilauksen yhdiste, $\alpha = \rho_b \rho_a$. Nyt $a \parallel b$, sillä jos $P = a \cap b$, niin $P = P^\alpha$ vastoin oletusta. Tällöin (kuten kuvassa) lauseesta 4.6 seuraa, että $\alpha = \tau$, missä $\tau \perp a$ ja τ on kaksi kertaa suorien a ja b välinen etäisyys.



Oletetaan sitten, että α kääntää suunnan. Olkoon X jokin piste, ja O janan XX^α keskipiste. Tarkastellaan suunnankäntävää isometriaa $\beta = \delta_O \alpha$, missä δ_O on puolikierto. Koska nyt $X^\beta = X$, on $\beta = \rho_a$ peilaus lauseen 4.12 mukaan (jonkin suoran a suhteen), ja siten $\alpha = \delta_O \rho_a$. Todetaan, että $\alpha = \rho_b \tau$ on siirtopeilaus, missä $b \perp a$, $O \in b$ ja $\tau = 2 \cdot AO$ (kun $A = a \cap b$).



□

Erityisesti seuraava luokittelu on osoitettu:

Lause 4.14. *Isometria on*

- (1) *translaatio, jos se säilyttää suunnan ja sillä ei ole kiintopisteitä,*
- (2) *rotaatio, jos se säilyttää suunnan ja sillä on kiintopiste,*
- (3) *peilaus, jos se kääntää suunnan ja sillä on kiintopiste,*
- (4) *siirtopeilaus, jos se kääntää suunnan ja sillä ei ole kiintopistettä.*

ss \ kp	on	ei
+	rotaatio	translaatio
-	peilaus	siirtopeilaus

Lause 4.15. *Olkoot $\Delta = \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' = \Delta'$ yhtenevät kolmiot. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isometria α , jolle $\Delta' = \Delta^\alpha$.*

Todistus. Jos $\Delta = \Delta'$, on identiteettikuvaus kysytty isometria. Olkoon $\sigma = \sigma_{(A,\theta)}$ rotaatio niin, että $\ell(A^\sigma, B^\sigma) \parallel \ell(A', B')$ ja olkoon τ translaatio, jolle $A' = A^\tau$. Tällöin $\tau\sigma(AB) = A'B'$. Jos myös $\tau\sigma(C) = C'$, on $\alpha = \tau\sigma$, muutoin $\alpha = \rho_a \tau\sigma$, missä $a = \ell(A', B')$. Yksikäsitteisyys seuraa kolmen pisteen säännöstä. □

Esimerkki 4.4. Seuraava **Thomsenin kaava** yhdistää kolme peilausta yhteen kaavaan

$$\rho_a \rho_b \rho_c \rho_a \rho_b \rho_c \rho_b \rho_c \rho_a \rho_b \rho_c \rho_a \rho_c \rho_b \rho_a \rho_c \rho_b \rho_c \rho_b \rho_a \rho_c \rho_b = \iota .$$

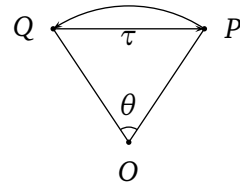
Tämä seuraa siitä, että translaatiot kommutoivat:

$$(\rho_a \rho_b \rho_c)^2 (\rho_b \rho_c \rho_a)^2 = (\rho_b \rho_c \rho_a)^2 (\rho_a \rho_b \rho_c)^2 ,$$

mistä väite saadaan laskemalla. □

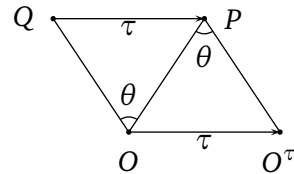
Esimerkki 4.5. (1) Olkoot $\sigma = \sigma_{(O,\theta)}$ rotaatio ja $\tau = \tau_{AB}$ translaatio. Tällöin $\tau\sigma$ on rotaatio, jolla on sama rotaatiokulma θ .

Todistus. Aukaistaan θ -kulma niin, että $QP \parallel AB$ ja $QP = AB$ kuten kuvassa, eli kulman $\angle O$ puolittaja on suoran $\ell(A,B)$ normaali. Tällöin $Q = P^\sigma$ ja siten $P = P^\alpha$ on isometrian α kiintopiste. Siten α on suunnansäilyttävänä rotaatio, ja sen kulma on θ kuten nähdään suunnikkaasta $\diamond OO^\tau PQ$, missä $O^\tau = O^\alpha$. Näin väite (1) on todistettu.



(2) Jos kahdella rotaatiolla $\sigma_1 = \sigma_{(O,\theta_1)}$ ja $\sigma_2 = \sigma_{(O,\theta_2)}$ on yhteinen keskus O , on $\sigma_2\sigma_1$ rotaatio $\sigma_{(O,\theta_1+\theta_2)}$.

Todistus. Helppo harjoitus.



(3) Kahden rotaation $\sigma_1 = \sigma_{(O_1,\theta_1)}$ ja $\sigma_2 = \sigma_{(O_2,\theta_2)}$ yhdiste on rotaatio, jonka rotaatiokulma on $\theta_1 + \theta_2$, jos summa ei ole 360° . (Muutoin yhdiste on translaatio kuten helposti voidaan osoittaa.)

Todistus. Olkoon τ translaatio, jolla $\tau(\sigma_2(O_1)) = O_1$, missä siis $\sigma = \tau\sigma_2$ on väitteen (1) mukaan rotaatio, jonka rotaatiokulma on θ_2 . Rotaatioilla σ_1 ja σ on sama keskus O_1 (joka on kiintopiste), ja siis $\hat{\sigma} = \sigma\sigma_1$ on rotaatio, jonka rotaatiokulma on $\theta_1 + \theta_2$. Vielä $\tau^{-1}\hat{\sigma}$ on väitteen 2 mukaan rotaatio, jonka kulma on $\theta_1 + \theta_2$. Väite seuraa, sillä $\sigma_2\sigma_1 = \tau^{-1}\tau\sigma_2\sigma_1$. □

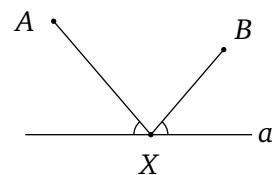
4.3 Sovellutuksia

Heron–Fermat ongelma

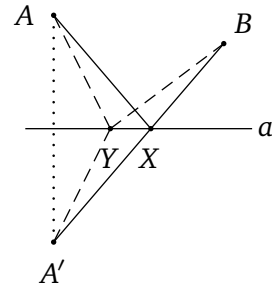
Jos $P_i P_{i+1}$ ovat janoja ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), sanotaan, että $P_1 P_2 \dots P_n$ on **reitti**, jonka pituus on

$$P_1 P_2 \dots P_n = \sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{i+1}.$$

Lause 4.16 (Heron). Olkoot A ja B samalla puolen suoraa a . Olkoon AXB lyhin reitti pisteestä A pisteeseen B , joka vieräilee suoran a jossain pisteessä X . Tällöin suorat $\ell(A,X)$ ja $\ell(B,X)$ muodostavat yhtä suuret kulmat suoran a suhteen.



Todistus. Olkoon $A' = \rho_a(A)$ ja merkitään $X = a \cap \ell(A', B)$. Kun $P = a \cap \ell(A, A')$, niin $\triangle APX \cong \triangle A'PX$. Ristikulmista päätellään, että suorat $\ell(A, X)$ ja $\ell(B, X)$ muodostavat yhtä suuret kulmat suoran a suhteen.

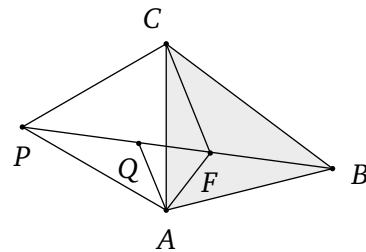


Todetaan vielä, että AXB on haluttu reitti. Olkoon $Y \in a$ jokin piste. Nyt $AY = A'Y$, ja siten $AYB = A'YB = A'Y + YB \geq A'B = A'XB = AXB$ kolmioepäyhtälöä käyttäen. \square

Seuraavan lauseen piste F on **Fermat'n piste**, jota kutsutaan myös **Steinerin pisteeksi**.¹

Lause 4.17 (Fermat–Torricelli). *Olkoot kolmion $\triangle ABC$ kulmat korkeintaan 120° . Tällöin sisäpiste F , jolle $AF + BF + CF$ on mahdollisimman pieni, on piste josta kukin sivu näkyy kulmassa 120° .*

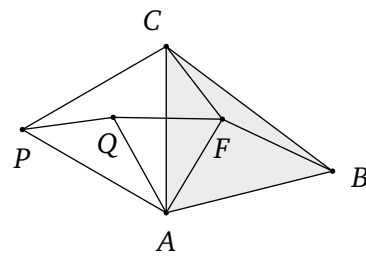
Todistus. Olkoon $\sigma = \sigma_{(A, 60^\circ)}$, ja $P = C^\sigma$, jolloinka $\triangle ACP$ on tasasivuinen. Olkoon F kolmion jokin sisäpiste, ja $Q = F^\sigma$. Todetaan ensin, että jos piste F näkee sivut kulmassa 120° , niin F ja Q kuuluvat suoralle $\ell(B, P)$.



Yleisesti on $\triangle APQ \cong \triangle ACF$. Eritoten siis $QP = FC$. Tasasivuisuuksista saadaan

$$AF + BF + CF = FQ + BF + QP = BFQP,$$

missä oikea puoli on pienin, kun B, F, Q, P ovat kollineaariset (kolmioepäyhtälö), jolloin $\angle AFB = 180^\circ - \angle QFA = 120^\circ$, $\angle CFA = \angle PQA = 180^\circ - \angle AQF = 120^\circ$ ja $\angle BFC = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.



Näin ollen vaadittu F on piste, josta kukin sivu näkyy kulmassa 120° . \square

Geometriset käsitteet

Seuraava lause on hyödyllinen apuväline operoitaessa isometrioilla.

Lause 4.18. *Olkoot $\alpha \in \mathcal{E}$ ja a suora. Tällöin $\rho_{\alpha(a)}\alpha = \alpha\rho_a$, eli $\rho_{\alpha(a)} = \alpha\rho_a\alpha^{-1}$.*

Todistus. Ensinnäkin jokainen isometria on affiini, joten $a^\alpha (= \alpha(a))$ on suora. Olkoon $P \in a^\alpha$, eli $P = \alpha(Q)$ jollain $Q \in a$. Erityisesti $Q = \rho_a(Q)$, ja siten

$$\alpha\rho_a\alpha^{-1}(P) = \alpha\rho_a(Q) = \alpha(Q) = P.$$

Siis $\alpha\rho_a\alpha^{-1}$ kiinnittää suoran a^α pisteittäin, ja se kääntää suunnan, koska ρ kääntää suunnan ja α^{-1} ja α yhdessä toimivat suunnansäilyttävinä: $(\pm 1) \cdot (-1) \cdot (\pm 1) = -1$. Näin ollen $\alpha\rho_a\alpha^{-1}$ on peilaus suoran a^α suhteen. \square

¹ Fermat (1601 – 1665); konstruktio: Torricelli 1640. Täydellinen todistus: Heinen 1834

Esimerkki 4.6. Seuraavassa kaksi geometrista peruskäsitteitä on esitetty isometrioiden avulla. Olkoon $p(a, b)$ toistensa leikkaavien suorien a ja b muodostaman kulman puolittaja, ja olkoon p suora. Tällöin

$$(1) p = p(a, b) \iff \rho_b \rho_p \rho_a \rho_p = \iota \iff \rho_b \rho_p = \rho_p \rho_a.$$

$$(2) a \perp b \iff a \neq b \text{ ja } \rho_a \rho_b = \rho_b \rho_a.$$

Tapaus (1) jää harjoitukseksi. Osoitetaan vain (2).

Todetaan, että jos $a \neq b$, niin

$$a \perp b \iff \rho_b(a) = a \iff \rho_{\rho_b(a)} = \rho_a \iff \rho_b \rho_a \rho_b = \rho_a \iff \rho_a \rho_b = \rho_b \rho_a,$$

missä viimeistä edeltävä yhtäpitävyys on lauseen 4.18 sovelletus tapaukseen $\alpha = \rho_b$, ja viimeinen yhtäpitävyys seuraa siitä että peilauksille on aina $\rho^{-1} = \rho$. \square

Lause 4.19. *Eri suorat a, b, c ovat konkurrentit tai yhdensuuntaiset jos ja vain jos tulo $\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$ on peilaus.*

Todistus. Isometria $\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$ kääntää suunnan, joten se on joko peilaus tai siirtopeilaus. Mikäli suorat a, b ja c leikkaavat pisteessä P , on P kuvauksen α kiintopiste, ja siten α on peilaus. Samoin jos suorat a, b ja c ovat yhdensuuntaiset, on α peilaus, sillä se kiinnittää kaikki suorat (ei kylläkään pisteittäin), jotka ovat kohtisuorassa suoran a kanssa, mutta siirtopeilaus kiinnittää vain yhden suoran, akselinsa kuten helposti voidaan todeta.

Toisinpäin, oletetaan, että $\alpha = \rho_\ell$ on peilaus. Todetaan ensin, että jos $\ell = c$, niin $\rho_c \rho_b \rho_a = \rho_c$, ja tässä tapauksessa $a = b$, ja väite on selviö. Oletetaan sitten, että $\ell \neq c$. Jos $P = a \cap b$, niin $\rho_b \rho_a(P) = P$, ja siten $\rho_\ell(P) = \rho_c(P)$, josta seuraa $P = \ell \cap c$, sillä $\rho_\ell \neq \rho_c$. Siten a, b ja c ovat konkurrentit. Aivan samoin, ehdosta $b \cap c \neq \emptyset$ seuraa, että a, b ja c ovat konkurrentit. Muussa tapauksessa täytyy olla $a \parallel b \parallel c$. \square

Fagnanon ongelma

Seuraavissa todistuksissa $a = \ell(B, C)$, $b = \ell(A, C)$ ja $c = \ell(A, B)$ ovat kolmion $\Delta = \triangle ABC$ sivusuorat. Lauseen 4.19 mukaan isometria $\rho_c \rho_b \rho_a$ on siirtopeilaus.²

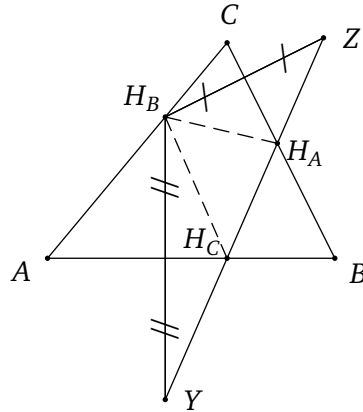
Lause 4.20 (Fagnano). *Olkoon Δ teräväkulmainen kolmio. Tällöin sen sivusuorien suhteen otettujen peilausten tulo $\alpha = \rho_c \rho_b \rho_a$ on siirtopeilaus, jonka akselina on ortokolmion Δ_O sivu ja jonka pituus on kolmion Δ_O piirin pituus.*

Todistus. Olkoot $s_1 = \ell(H_A, H_C)$, $s_2 = \ell(H_A, H_B)$ ja $s_3 = \ell(H_B, H_C)$ ortokolmion sivusuorat. Koskapa $\rho_c \rho_b \rho_a$ on siirtopeilaus, etsitään sen akseli. Esimerkin 3.1 mukaan kolmion Δ korkeusjanat ovat sen ortokolmion Δ_O kulmien puolittajat, mistä seuraa että $\angle H_C H_A B = \angle C H_A H_B$, $\angle H_A H_B C = \angle A H_B H_C$ ja $\angle H_B H_C A = \angle B H_C H_A$, jolloin

$$\alpha(s_1) = \rho_c \rho_b \rho_a(s_1) = \rho_c \rho_b(s_2) = \rho_c(s_3) = s_1$$

² Fagnano 1775

ja siten sivusuora s_1 on siirtopeilauksen akseli. Pituutta koskeva väite päätellään kuten kuvassa, missä $\alpha(Z) = \rho_c \rho_b(H_B) = \rho_c(H_B) = Y$, ja pisteet Z ja Y ovat akselilla s_1 . Janan ZY pituus on ortokolmion piirin pituus. \square



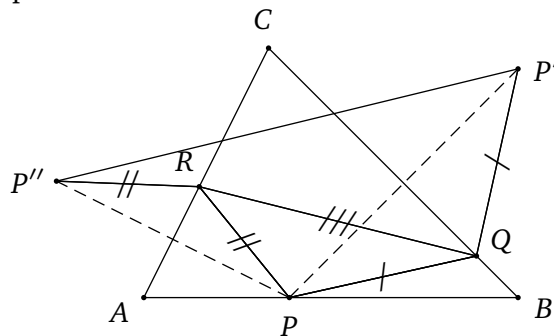
Kolmio $\triangle DEF$ on kolmion $\triangle ABC$ **sisäkolmio**, jos pisteet D, E, F ovat kolmion $\triangle ABC$ eri sivuilla.

Lause 4.21. Olkoon $\Delta = \triangle ABC$ teräväkulmainen kolmio. Ortokolmiolla Δ_O on pienin piiri kolmion Δ sisäkolmioista.

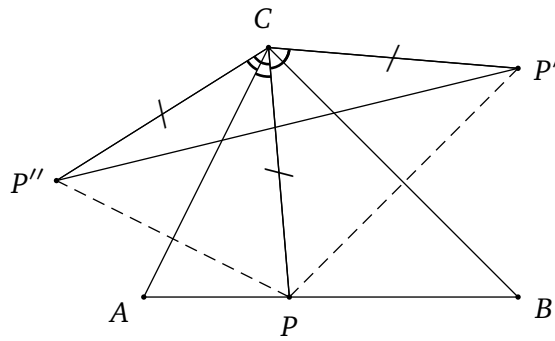
Todistus. Olkoot $a = \ell(B, C)$ ja $b = \ell(A, C)$ kolmion Δ sivusuoria. Ajatellaan ensin, että piste $P \in AB$ on kiinnitetty sivulta AB . Olkoon $\triangle PQR$ kolmion Δ sisäkolmio, missä $Q \in AC$ ja $R \in BC$. Merkitään

$$P' = P^{\rho_a} \quad \text{ja} \quad P'' = P^{\rho_b}$$

Tällöin $PQ = QP'$ ja $RP = RP''$, joten sisäkolmion piirin pituus on reitin $P'QRP''$ pituus. Näin ollen tämä pituus on pienin kun $Q = \ell(P', P'') \cap AC$ ja $R = \ell(P', P'') \cap BC$, jolloin reitin pituus on janan $P'P''$ pituus.



Etsitään sitten pisteen P paras paikka sivulla AB . Koska peilaukset ρ_a ja ρ_b kiinnittävät pisteen C , niin $CP' = CP = CP''$, ja siten CA puolittaa kulman $\angle P''CP$ ja CB puolittaa kulman $\angle PCP'$. Siis $\angle P''CP' = 2 \cdot \angle C$ on pisteestä P riippumaton vakio.

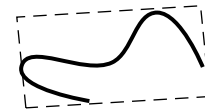


Nyt janan $P'P''$ pituus on pienimmillään kun $CP' = CP''$ on pienin, eli kun CP on pienin. Tämä tapahtuu kun CP on normaali, eli kun $P = H_C$. Samoin täytyy olla, että sisäkolmion muutkin kärjet ovat korkeusjanojen kantapisteet. \square

Peittävät ikkunat*

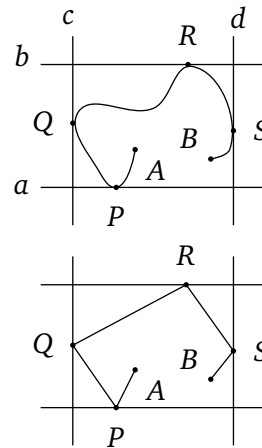
Sanotaan, että suorakulmio Γ on tason jatkuvan käyrän **ikkuna**, jos γ on kokonaan sen sisällä. Tällöin Γ **peittää** käyrän γ .

Lause 4.22. Olkoon γ pituutta 1 oleva jatkuva tasokäyrä, ja Γ sen pienialaisin ikkuna. Tällöin $\text{ala}(\Gamma) \leq 1/4$.



Todistus. Sopivaa rotaatiota käyttämällä voidaan olettaa, että kuvassa A ja B ovat “samassa tasossa”.

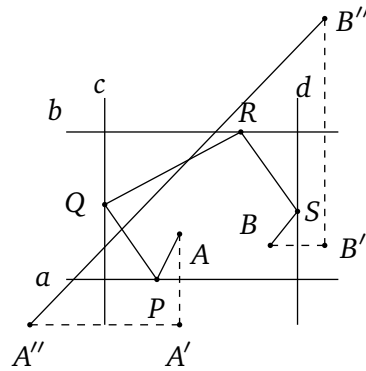
Olkoon Γ peittävä suorakulmio, jonka sivut ovat $a \parallel b$ ja $c \parallel d$ niin, että $a \parallel \ell(A, B)$, ja nämä suorat sivuavat käyrää γ . Lisäksi olkoot P, Q, R ja S käyrän γ ensimmäiset sivuamispaikat näillä suorilla kuljettaessa käyrä γ pisteestä A pisteeseen B. Tällöin reitin APQRSB pituus on korkeintaan käyrän γ pituus, ja siis se on korkeintaan 1.



(Huomaa, että reitti voi olla hieman erinäköinen.) Olkoot $A' = \rho_a(A)$, $A'' = \rho_c(A')$, $B' = \rho_b(B)$ ja $B'' = \rho_d(B')$. Tällöin janan $A''B''$ pituus on korkeintaan reitin APQRSB pituus ja siten $A''B'' \leq 1$, sillä

$$\begin{aligned} A''B'' &\leq A''Q + QR + RB'' = A'Q + QR + RB' \\ &= AP + PQ + QR + RS + SB = AQRSB \leq 1. \end{aligned}$$

Olkoon $z = AB$, ja merkitään suorakulmion sivujen pituuksia kirjaimilla x ja y , jolloin Pythagoraan lauseen nojalla on $(A''B'')^2 = (2x - z)^2 + (2y)^2$. Lisäksi todetaan, että yhtälöstä $(x - 2y)^2 + (x - z)^2 + 2x(x - z) \geq 0$ seuraa, että $(2x - z)^2 + (2y)^2 \geq 4xy$, ja siten $1 \geq (A''B'')^2 \geq 4 \cdot \text{ala}(\Gamma)$. \square



Huomio. Olkoon $\gamma = ABC$, missä $\triangle ABC$ on tasakylkinen kolmio, $AB = 1/2 = AC$ (niin että $\gamma = ABC$). Todetaan, että jos $\angle A < 90^\circ$, on peittävän suorakulmion ala pienempi kuin $1/4$, ja jos $\angle A = 90^\circ$, on ala tarkalleen $1/4$, eli lauseen 4.22 raja on tarkka.

Hieman yllättäen ongelman ratkaiseminen suljetuille käyrille on vaikeampaa.

Lause 4.23. Olkoon γ pituutta 1 oleva jatkuva ja suljettu tasokäyrä, ja Γ sen pienialaisin ikkuna. Tällöin $\text{ala}(\Gamma) \leq 1/\pi^2$, ja tämä raja saavutetaan kun γ on ympyrä.

Todistus vaatii Cauchyn kaavan suljetun konveksin käyrän pituudelle:

$$L(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} w(\theta) d\theta \quad (= \tilde{w}\pi),$$

missä $w(\theta)$ on käyrän leveys (eli ikkunan korkeus) suunnassa θ (ja \tilde{w} on käyrän keskimääräinen leveys).

5 Yleisemmät kuvaukset

5.1 Similaarisuus

Transformaatio α on **kutistava**, jos on olemassa vakio $0 < c < 1$ niin, että kaikilla $P, Q \in E$, $P^\alpha Q^\alpha \leq c \cdot PQ$. Vastaavasti, α on **laajentava** transformaatio, jos on vakio $c > 1$ niin, että kaikilla $P, Q \in E$, $P^\alpha Q^\alpha \geq c \cdot PQ$.

Sanotaan, että transformaatio α on **similaarikuvaus** eli **yhdenmuotoisuuskuvaus**, jos on olemassa **laajennusvakio** c niin, että $P^\alpha Q^\alpha = c \cdot PQ$ kaikilla P, Q .

Kolmioepäytälön avulla todetaan helposti:

Lause 5.1. *Similaarikuvaus α on affiini ja kuvaa janan janaksi: $\alpha(PQ) = P^\alpha Q^\alpha$.*

Todistus. Harjoitus. □

Lause 5.2. *Transformaatio α on similaarikuvaus jos ja vain jos se kuvaa kolmiot yhdenmuotoisiksi kolmioiksi.*

Todistus. Jos α on similaarikuvaus, niin kaikille kolmioille $\Delta \sim \Delta^\alpha$ verrannollisuuskriteerin (SSS \sim) nojalla.

Toisaalta, oletetaan että α on kuvaus, joka kuvaa jokaisen kolmion yhdenmuotoiseksi kolmioksi. Olkoot AB ja PQ kaksi janaa. Yhdenmuotoisuuden $\triangle ABP \sim \triangle A^\alpha B^\alpha P^\alpha$ mukaan

$$\frac{A^\alpha B^\alpha}{AB} = \frac{B^\alpha P^\alpha}{BP}.$$

Samoin $\triangle BPQ \sim \triangle B^\alpha P^\alpha Q^\alpha$, jolloin

$$\frac{B^\alpha P^\alpha}{BP} = \frac{P^\alpha Q^\alpha}{PQ}.$$

Saadaan että $A^\alpha B^\alpha / AB = P^\alpha Q^\alpha / PQ$, mistä seuraa, että α on similaarikuvaus, jonka laajennusvakio on kyseinen suhde. □

Kaksi tason kuviota F_1 ja F_2 ovat **similaareja** (eli **yhdenmuotoisia**), jos on olemassa similaarikuvaus α , jolla $\alpha(F_1) = F_2$. Similaarisuus siis yleistää monikulmioita koskevan yhdenmuotoisuuden kaikille tasokuviolle.

Aivan samoin kuin isometrioille voidaan nyt todistaa similaarikuvauksille:

Lause 5.3 (Kolmen pisteen sääntö). *Kolme epäkolleaarista pistettä määräävät similaarikuvauksen.*

Todistus. Harjoitus. □

Jotta myös yhdenmuotoisuus saataisiin esitettyä konkreettisten transformaatioiden avulla, tarvitaan uudenlainen kuvaus, joka pystyy muuttamaan janojen pituuksia. Tällainen kuvaus on homotetia, joka on puolikierron yleistys.

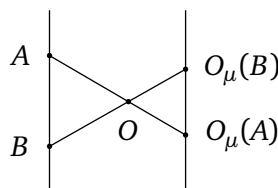
Piste O ja reaalivakio $\mu \neq 0$ määräävät **homotetian** O_μ , joka kuvaa pisteen A pisteeksi $B \in \ell(O, A)$ siten, että $OB = \mu \cdot OA$. Tässä, jos $\mu > 0$, niin homotetia kuvaa pisteen A samalle puolelle pistettä O ja jos $\mu < 0$, niin homotetia kuvaa pisteen A vastakkaiselle puolelle keskus pistettä O .

Lause 5.4. Homotetia O_μ on suunnansäilyttävä similaarikuvaus.

(1) Jos $\mu = 1$, niin $O_\mu = \iota$ ja jos $\mu = -1$, niin $O_\mu = \delta_O$.

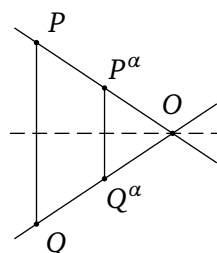
(2) Homotetialla $O_\mu \neq \iota$ on tarkalleen yksi kiintopiste O .

Todistus. Harjoitus. □



Lause 5.5. Homotetia α kuvaa suoran ℓ yhdensuuntaiseksi suoraksi, eli $\ell \parallel \alpha(\ell)$.

Todistus. Olkoon $\alpha = O_\mu$, ja $\ell = \ell(P, Q)$ suora. Jos $O \in \ell$, niin selvästi $\alpha(\ell) = \ell$. Jos O, P ja Q ovat epäkolleaariset, niin $\triangle OPQ \sim \triangle OP^\alpha Q^\alpha$, koska homotetia säilyttää sivujen pituuksien suhteet. Väite seuraa, kun huomataan, että $P^\alpha \in \ell(O, P)$ ja $Q^\alpha \in \ell(O, Q)$. □



Homotetia on suunnansäilyttävä, joten pelkästään homotetioiden avulla ei saada aikaan kaikkia kuvauksia, jotka säilyttävät yhdenmuotoisuuden.

Lause 5.6. Jokainen similaarikuvaus α on isometrioiden ja homotetioiden yhdiste: $\alpha = \beta h$, missä h on homotetia ja β on isometria.

Todistus. Olkoon α similaarikuvaus, jonka laajennusvakio on μ , ja olkoon $\Delta = \triangle ABC$ kolmio. Tällöin kun $h = A_\mu$, on $\Delta^\alpha \cong \Delta^h$ (SSS). Lauseen 4.15 mukaan on isometria β , jolle $\Delta^\alpha = \beta(\Delta^h)$, ja siten βh on kysytynlainen kuvaus. □

Lause 5.7. Jos similaarikuvauksella α ei ole kiintopisteitä, on se isometria.

Todistus. Oletetaan, että similaarikuvaus α ei ole isometria. Jos α kuvaa suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi, on helppo todeta että sillä on kiintopiste tarkastelemalla jotain janaa AB ja sen eripituista kuvaa $A^\alpha B^\alpha$. Olkoon $\ell \parallel \ell^\alpha$, sanokaamme $P = \ell \cap \ell^\alpha$. Oletetaan, että $P^\alpha \neq P$. Olkoon a suora, jolle $a \parallel \ell$ ja $P^\alpha \in a$. Nyt $a^\alpha \parallel \ell^\alpha$ lauseen 4.2 mukaisesti. Merkitään $Q = a \cap a^\alpha$. Tässä $PQ \parallel P^\alpha Q^\alpha$, sillä muutoin α olisi isometria. Olkoon $X = PQ \cap P^\alpha Q^\alpha$, jolloinka

$$\frac{P^\alpha X^\alpha}{X^\alpha Q^\alpha} = \frac{PX}{XQ} = \frac{P^\alpha X}{XQ^\alpha},$$

sillä $\triangle PP^\alpha X \sim \triangle QQ^\alpha X$. Päättellään tästä, että $X = X^\alpha$. □

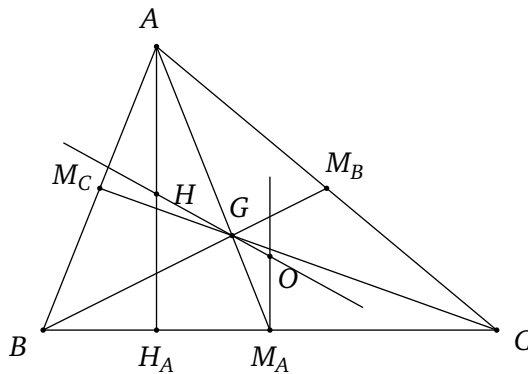
Oheinen Eulerin lause seuraa edellisestä, koska on aina similaarikuvaus, joka kuvaa annetun janan toiseksi annetuksi janaksi

Lause 5.8 (Euler). *Olkoot AB ja PQ kaksi janaa, jotka eivät ole samalla suoralla. On olemassa piste X niin, että kolmiot $\triangle ABX$ ja $\triangle PQX$ ovat yhdenmuotoiset.*

Todistetaan seuraavaksi kolmion merkillisiä pisteitä koskeva merkillinen tulos uudelleen homotetioita käyttäen.

Esimerkki 5.1 (Eulerin suora). Kolmion $\triangle ABC$ ortosentri H , painopiste G ja ympäripiirretyn ympyrän keskipiste O ovat kollineaariset. Erityisesti homotetia $\alpha = G_{-1/2}$ kuvaa korkeusjanan sivun keskinormaaliksi, ja siten $H^\alpha = O$.

Todistusta varten todetaan ensin, että $AG/GM_A = 2$ ja siten $A^\alpha = M_A$. Samoin $B^\alpha = M_B$ ja $C^\alpha = M_C$. Olkoon ℓ korkeussuora pisteestä A . Tällöin $\alpha(\ell) \parallel \ell$ ja $M_A \in \alpha(\ell)$. Näin ollen $\alpha(\ell) \perp \ell(B, C)$, ja $\alpha(\ell)$ on sivun BC keskinormaali. Samoin käy muille korkeusjanoille. Koska H on korkeusjanojen leikkauspiste, niin H^α on keskinormaalien leikkauspiste, eli $H^\alpha = O$. Erityisesti H, G ja $O(=H^\alpha)$ ovat samalla suoralla. □

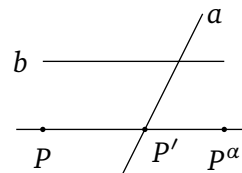


5.2 Affiinit kuvaukset

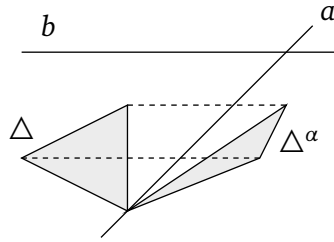
Isometriat ja homotetiat ovat affiineja, ja niin muodoin myös similaarikuvaukset, mutta yleisesti affiinius ei säilytä yhdenmuotoisuutta.

Esimerkki 5.2. Olkoot a ja b kaksi suoraa, $a \nparallel b$ ja $\mu \neq 0$ vakio.

Kun P on piste, piirretään $\ell(P, P') \parallel b$, missä $P' \in a$ kuten kuvassa. Olkoon $P^\alpha \in \ell(P', P)$ niin että $P^\alpha P = \mu \cdot PP'$. (Eryityisesti, jos $P \in a$, niin $P^\alpha = P$). Tällöin α on affiini kuvaus, **vinodilaatio** (eli **perspektiivinen affiinikuvaus**) suoralle a suuntaisesti.



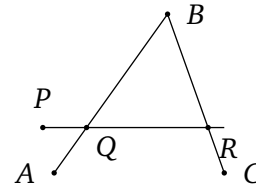
Jos lisäksi β on vinodilaatio suoralle b suoran a suuntaisesti, jonka kertoimena on $\frac{1}{\mu}$, niin saadaan affiini kuvaus $\beta\alpha$. Tämä on **hyperbolinen rotaatio**. □



Lause 5.9. Affiini kuvaus α kuvaa epäkollineariset pisteet epäkollinearisiksi.

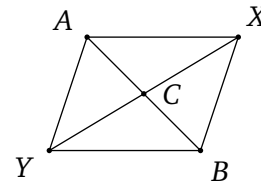
Todistus. Tehdään vasta oletus, että pisteet A, B ja C ovat epäkollineariset, mutta $A^\alpha, B^\alpha, C^\alpha \in \ell$. Olkoon P piste niin, että $P^\alpha \notin \ell$.

Olkoon $a = \ell(P, Q, R) \neq \ell(P, A)$ kuten kuvassa. Tällöin $Q^\alpha \in \ell(A^\alpha, B^\alpha) = \ell$ ja $R^\alpha \in \ell(B^\alpha, C^\alpha) = \ell$, ja siten $Q^\alpha, R^\alpha \in \ell$. Näin muodoin $a^\alpha = \ell(Q^\alpha, R^\alpha) = \ell$, ja erityisesti $P^\alpha \in \ell$, mikä on vastoin pisteen P valintaa. □



Lause 5.10. Olkoon α affiini kuvaus ja C janan AB keskipiste. Tällöin C^α on janan $A^\alpha B^\alpha$ keskipiste.

Todistus. Muodostetaan suunnikas $\diamond AXBY$, jolloin lävistäjien leikkauspiste (puolituspiste) on C . Lauseen 4.2 mukaan myös $\diamond' = \diamond A^\alpha X^\alpha B^\alpha Y^\alpha$ on suunnikas. Koska $C = \ell(A, B) \cap \ell(X, Y)$, niin $C^\alpha = \ell(A^\alpha, B^\alpha) \cap \ell(X^\alpha, Y^\alpha)$, ja siten C^α suunnikkaan \diamond' lävistäjien leikkauspisteenä puolittaa janan $A^\alpha B^\alpha$. □



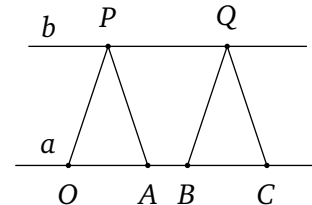
Lause 5.11. Jos tason affiini kuvaus α kiinnittää suoran a kaksi pistettä, niin se kiinnittää suoran a kaikki pisteet.

Todistus. Olkoon α affiini kuvaus, joka kiinnittää (suunnatun) suoran a , eli $a^\alpha = a$, ja kaksi sen pistettä $O, I \in a$, eli $O^\alpha = O$ ja $I^\alpha = I$. Nyt suora a voidaan ajatella reaaliakselina, jonka origona on O ja jonka yksikköjana OI on, eli jokainen piste $X \in a$ ajatellaan reaalilukuna OX . Olkoot A ja B suoralla a .

Kahden pisteen A ja B **summa** $C = A + B$ määrätään geometrisesti kuten kuvassa, missä $a \parallel b$, $\ell(O, P) \parallel \ell(B, Q)$, ja $\ell(A, P) \parallel \ell(C, Q)$. Selvästi, $OA + OB = OC$.

Koska α kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi, on kaikille $A, B \in a$ voimassa

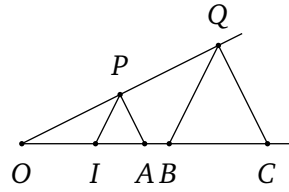
$$A^\alpha + B^\alpha = (A + B)^\alpha. \tag{5.1}$$



Pisteiden A ja B tulo $C = A \cdot B$ määrätään oheisesta kuvios-
ta, missä $\ell(P, I) \parallel \ell(Q, B)$ ja $\ell(P, A) \parallel \ell(Q, C)$. Yhdenmuotoisista
kolmioista saadaan, että $OC = OA \cdot OB$.

Kuten edellä päätellään, että kaikille $A, B \in a$ on voimassa

$$A^\alpha \cdot B^\alpha = (A \cdot B)^\alpha. \quad (5.2)$$



Yhtälöistä (5.1) ja (5.2) seuraa, että α on reaalikunnan \mathbb{R} automorfismi. Mutta kunnalla
 \mathbb{R} on vain yksi automorfismi, identiteettikuvaus ι (algebran harjoitus) ja siten $P^\alpha = P$ kai-
kille $P \in a$. □

Huomaa, että edellä ei todistettu että $\alpha = \iota$, vaan vain että α kiinnittää suoran a pisteit-
tään.

Lause 5.12. *Affiini kuvaus β kuvaa janan janaksi, eli $\beta(PQ) = P^\beta Q^\beta$. Lisäksi kun $R \in PQ$,
niin*

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{P^\beta R^\beta}{R^\beta Q^\beta}.$$

Edelleen, kolme epäkollineaarista pistettä määräävät affiinin kuvauksen.

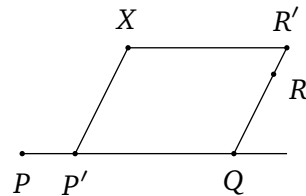
Todistus. Olkoot P, Q kaksi eri pistettä, ja olkoon γ jokin similaarikuvaus, jolle $P^\gamma = P^\beta$
ja $Q^\gamma = Q^\beta$. Tällöin affiini kuvaus $\alpha = \gamma^{-1}\beta$ kiinnittää pisteet P ja Q . Edeltävän lauseen
mukaan α kiinnittää suoran $a = \ell(P, Q)$ pisteittäin. Koska γ on similaarikuvaus, niin $\gamma(a) =$
 $\ell(P^\beta, Q^\beta)$, ja kun $R \in PQ$, niin

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{P^\gamma R^\gamma}{R^\gamma Q^\gamma}.$$

Nyt $R^\beta = \gamma\alpha(R) = R^\gamma$ ja siten β kuvaa janan PQ janaksi $P^\beta Q^\beta$ suhteet säilyttäen.

Toisen väitteen osoittamiseksi riittää (taas) osoittaa, että jos affiini β kiinnittää kolmion
 $\triangle PQR$ kärjet, niin $\beta = \iota$. Olkoon X tason jokin piste.

Lauseen 5.11 mukaan β kiinnittää suorat $\ell(P, Q)$ ja $\ell(Q, R)$
pisteittäin. Piirretään oheinen suunnikas $\diamond = \diamond XR'QP'$, mis-
sä $R' \in \ell(Q, R)$. Nyt β kiinnittää pisteet R', Q, P' . Koska affiini
 β kuvaa yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi, niin kuva
 $\beta(\diamond)$ on myös suunnikas, ja siten sen neljäs kärki on välttä-
mättä X , joka sekin siis kiinnittyy. □



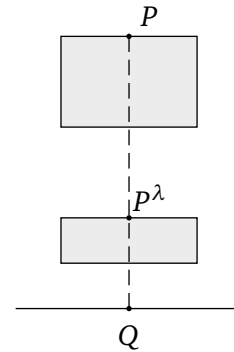
Affiini kuvaus α on **affiniteetti**, jos se kiinnittää yhden suoran pisteittäin. Edeltävän to-
distuksen mukaan:

Lause 5.13. *Jokainen affiini kuvaus α on similaarikuvauksen ja affiniteetin yhdiste: $\alpha = \gamma\beta$.*

Esimerkki 5.3. Edeltävien tulosten mukaan affiinit kuvaukset tuntuvat muistuttavan simi-
laarikuvauksia. Kaikesta huolimatta yhtäläisyydet ovat melko rajoitetut. Voidaan nimittäin
osoittaa, että jos Δ ja Δ' ovat mitä tahansa kolmioita, on olemassa yksikäsitteinen affiini
kuvaus α , jolla $\Delta' = \Delta^\alpha$. □

Esimerkki 5.4. Olkoot $k > 0$ vakio ja ℓ annettu suora. Transformaatio λ , joka kuvaa pisteen P suoran ℓ normaalille $\ell(P, Q)$ ($Q \in \ell$) siten, että $P^\lambda Q = k \cdot PQ$, on **litistys (venytys)** suoran ℓ ja vakion k suhteen.

Litistys on aina affiniteetti, ja voidaan osoittaa että jokainen affiini kuvaus α voidaan esittää simulaarikuvauksen β ja litistyksen λ yhdisteenä: $\alpha = \lambda\beta$ \square



5.3 Inversio

Inversio on erityislaatuinen kuvaus, joka vaihtaa ympyrän ulkopuolisen alueen ja sisäpuolisen alueen keskenään. Samoin inversio tuottaa tasoon dualiteetin, missä piste ja suora ovat samanarvoisia käsitteitä.

Olkoon $\omega = \omega(O, r)$ annettu ympyrä. Määritellään **inversio** $I = I_\omega$ niin että se kuvaa pisteen $P \neq O$ pisteeksi $I(P) = P'$, jolle

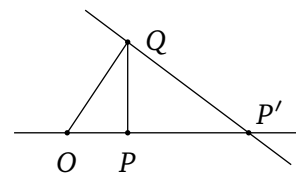
$$P' \in \ell(O, P) \text{ ja } OP \cdot OP' = r^2.$$

Tarkasti ottaen inversio $I = I_\omega$ (annetun ympyrän ω suhteen) ei ole tason transformaatio, sillä se ei ole määritelty erikoispisteelle O , mutta I on bijektio $\mathbb{E} \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{E} \setminus \{O\}$. Kuten myöhemmin tehdään, voidaan pisteen O kuva ajatella olevan äärettömyydessä. Lisäksi, I kiinnittää jokaisen pisteen ympyrän ω kehältä.

Esimerkki 5.5. Etsi $I_\omega(P)$.

Ratkaisu. Jos P on ympyrän ω sisällä, piirretään janalle OP normaali pisteeseen P , jolloin sen ja ympyrän ω leikkauspisteeseen Q piirretty tangentti leikkaa suoran $\ell(O, P)$ inversio-pisteessä P' .

Todistus. $\triangle OPQ \sim \triangle OQP'$ ja siten $OP/OQ = OQ/OP'$, mistä väite seuraa. \square



Jos P on ympyrän ulkopuolella, niin tehdään operaatiot käännetyssä järjestyksessä.

Sanotaan, että ℓ_O on **O-suora**, jos se saadaan suorasta $O \in \ell$ poistamalla siitä piste O . Vastaavasti **O-ympyrä** saadaan ympyrästä $O \in \omega$ poistamalla siitä piste O .

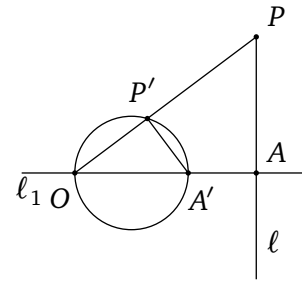
Lause 5.14. Olkoon inversioympyrä $\omega = \omega(O, r)$ annettuna, ja merkitään $I = I_\omega$.

(1) Olkoon ℓ suora, $O \notin \ell$. Suoran ℓ inversio on O -ympyrä.

(2) Olkoon ω' O -ympyrä. Tällöin $I(\omega')$ on suora, joka on kohtisuorassa ympyrän ω' halkaisijaa vasten.

Todistus. Olkoot $\ell_1 \perp \ell$ siten, että $O \in \ell_1$ ja olkoon $A = \ell_1 \cap \ell$. Kun $P \in \ell$, niin $\triangle OPA \sim \triangle OA'P'$, missä $A' = I(A)$ ja $P' = I(P)$. Täten P' on sen ympyrän kehällä, jonka halkaisijana OA' on.

Toisaalta, jos P on tuon ympyrän kehällä, niin vastaavasti päätellen todetaan, että sen inversio P' on vaaditulla suoralla. \square



Lause 5.15. *Inversiossa seuraavat kuvautuvat itselleen: inversioympyrä ω ; ne suorat, jotka kulkevat inversion keskuksen O kautta; ja ympyrät, jotka leikkaavat ympyrän ω kohtisuorasti.*

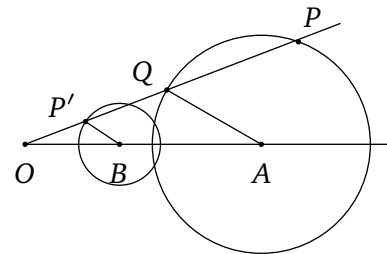
Todistus. Harjoitus. \square

Ensimmäisestä lauseesta saadaan (tässä kaksi O -ympyrää sivuavat toisiaan, jos täydennetyt ympyrät sivuavat pisteessä O):

Lause 5.16. *Jos ℓ_1 ja ℓ_2 ovat yhdensuuntaisia suoria, jotka eivät kulje pisteen O kautta, niin ne kuvautuvat inversiossa O -ympyröiksi, jotka sivuavat toisiaan.*

Lause 5.17. *Olkoon ω_1 ympyrä, $O \notin \omega_1$. Tällöin $I_\omega(\omega_1)$ on ympyrä, $O \notin I_\omega(\omega_1)$.*

Todistus. Olkoot A ympyrän ω_1 keskipiste, $P \in \omega_1$ ja $Q \in \ell(O, P) \cap \omega_1$ toinen leikkauspiste. Piirretään pisteen P inversion P' kautta suoran $\ell(A, Q)$ kanssa yhdensuuntainen suora, ja olkoon B näin saadun suoran ja suoran $\ell(O, A)$ leikkaus. Nyt $OP \cdot OP' = r^2$ ja $OP'/OQ = BP'/AQ$. Laskemalla todetaan, että $BP' = AQ \cdot r^2 / OP \cdot OQ$, missä AQ on ympyrän ω_1 säde ja $OP \cdot OP'$ on ympyrän potenssina pisteen P valinnasta riippumaton vakio. Täten BP' on pisteen P valinnasta riippumaton vakio ja siis ympyrän säde. \square



Lause 5.18 (Ptolemaios). *Olkoot A, B, C ja D tason E pisteitä. Tällöin*

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD.$$

Lisäksi yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin kun $ABCD$ on konsyklinen.

Todistus. Olkoon ω r -säteinen ympyrä piste A keskuksena, ja merkitään $X' = I_\omega(X)$ pisteille X . Tällöin

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AC'},$$

ja siten $\triangle ABC \sim \triangle AC'B'$, eli $BC/AC = B'C'/AB'$, mistä saadaan, että

$$B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC}.$$

Kolmioepäyhtälön mukaan $B'C' + C'D' \geq B'D'$, josta siirtymällä edelleen pisteisiin A, B, C ja D saadaan

$$BC \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AC} + CD \cdot \frac{r^2}{AC \cdot AD} \geq BD \cdot \frac{r^2}{AB \cdot AD}.$$

Yhtäsuuruus on voimassa vain jos $C' \in B'D'$, eli kun C on ympyrän $\omega_1 = \omega(A, B, D)$ kaarella BD , joka on vastapäätä pistettä A . Kertomalla edellinen yhtälö puolittain luvulla $AB \cdot AC \cdot AD/r^2$ saadaan Ptolemaioksen tulos. \square

Huolimatta siitä, että inversio vääristää kuvioita, se säilyttää kulman suuruuden. Seuraava tulos jää harjoitukseksi.

Lause 5.19. Niiden pisteiden P ura, joiden etäisyydet kahdesta annetusta pisteestä A ja B ovat annetussa suhteessa r :

$$BP = r \cdot AP$$

on Apolloniuksen ympyrä, joka invertoi pisteen A pisteeksi B .

Inversiotaso

Inversiossa ympyrän ω suhteen keskipiste O on erikoisasemassa. Tästä voidaan päästä eroon laajentamalla tasoa \mathbb{E} **ideaalipisteellä** ∞ . Merkitään $\mathbb{E}_\infty = \mathbb{E} \cup \infty$, ja määritellään pisteet O ja ∞ toistensa inversiopisteiksi ympyrän ω suhteen.

Inversiotulosten ja Apolloniuksen lauseen mukaisesti voidaan suoraa pitää ympyränä, jonka säde on äärettömän suuri. Kun tämä samaistus on tehty, kutsutaan tasoa \mathbb{E}_∞ **inversiotasoksi**. Tässä tasossa siis 'suorat' ovat ympyröitä.

Inversio (saman ympyrän ω suhteen) on tason \mathbb{E}_∞ transformaatio ja

Lause 5.20. Inversio kuvaa ympyrän ympyräksi.

Huomaa, että kaksi yhdensuuntaista suoraa kuvautuvat inversiossa ympyröiksi, jotka sivuavat toisiaan. Näin ollen yhdensuuntaisuus inversiotasossa on ajateltava ympyröiden sivuamisena.

Esimerkki 5.6. Olkoon ω_1 ympyrä tasossa \mathbb{E} ja P, Q sen sisällä olevia pisteitä. On olemassa tarkalleen kaksi ympyrää, jotka kulkevat pisteiden P, Q kautta ja jotka sivuavat ympyrää ω_1 .

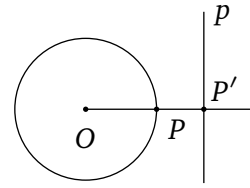
Todistus. Olkoon ω (äärellissäteinen) ympyrä P keskipisteenä. Tällöin inversiossa tämän ympyrän suhteen: $I(P) = \infty$, $I(Q) = Q'$ ja $I(\omega_1) = \omega'_1$. Piste Q' on ympyrän ω'_1 ulkopuolella (koska ∞ on ulkopuolella). Piirretään tangentit pisteestä Q' ympyrälle ω'_1 . Nämä kulkevat pisteen ∞ kautta, ja niiden kuvat inversiossa (ympyrän ω suhteen) ovat vaaditut ympyrät. \square

Polari

Olkoon ω ympyrä O keskipisteenä ja k säteenä. Piste $P \neq O$ **polari** ympyrän ω suhteen on suora p , jolla $p \perp \ell(O, P)$ ja $I(P) \in p$.

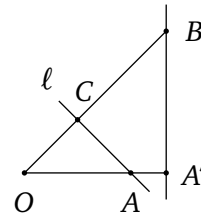
Olkoon p suora, $O \notin p$. Tällöin P on suoran p **napa**, jos p on pisteen P polari.

Jäljempänä pisteiden polareja merkitään vastaavilla pienillä kirjaimilla.



Lause 5.21. Piste A on suoralla b jos ja vain jos a kulkee pisteen B kautta.

Todistus. Olkoon $\ell = \ell(A, C)$ suora, jolla $\ell \perp \ell(O, B)$. Nyt $\triangle OAC \cong \triangle OBA'$ (KK) ja siten $OB/OA = OA'/OC$, mistä $OB \cdot OC = OA \cdot OA' = k^2$. Näin ollen $C = B'$, eli pisteen B inversio, ja siten $\ell(A, B')$ on pisteen B polari. Toisinpäin todistus on vastaavanlainen. \square



Tämä lause on duaalisuustulos. Pisteet ja suorat vaihtavat paikkaansa: Jos F on pisteistä ja suorista koostuva tasokuvio, missä tietyt pisteet sijaitsevat tietyillä suorilla, niin sen duaalisessa kuviossa tietyt suorat kulkevat tiettyjen pisteiden kautta.

Esimerkki 5.7. Nelikulmio $ABCD$ lävistäjineen muuntuu duaaliseksi kuvioksi, jossa on neljä suoraa ja kuusi pistettä. \square

Polari tarjoaa uuden mallin Euklidiselle geometrialle. Sanakirja on seuraava:

- piste – suora
- piste suoralla – suora kulkee pisteen kautta
- kollineaariset pisteet – konkurrentit suorat
- napa – polari
- tangentti – sivuamispiste
- ympyrä – ympyrä

(Edellä ympyrä katsotaan tangenttiensa kokoelmaksi.)

Polaria käsiteltäessä piste O on jälleen erikoinen: sillä ei ole polaria. Tämä erikoisuus paikataan lisäämällä tasoon **ideaalisuora**, ℓ_∞ , ja sopimalla, että tämä suora on pisteen O polari. Näin laajennettua tasoa kutsutaan **projektiiviseksi tasoksi**.

Projektiivinen taso kuvastaa perspektiivistä näkemystä: Kaksi suoraa leikkaavat aina toisensa (tasossa tai ideaalisuoralla). Tämä on duaalinen versio postulaatista: Kahden pisteen kautta kulkee tarkalleen yksi suora. Niinpä projektiivinen geometria on duaalinen, eli piste ja suora ovat käsitteinä samanarvoisia duaalisia käsitteitä; jos projektiivisen geometrian tuloksessa 'piste' ja 'suora' vaihtavat paikkaansa, saadaan duaalinen tulos. (Euklidinen geometria ei ole duaalinen, sillä kaksi suoraa eivät määrää yksikäsitteistä pistettä – silloin kun ne ovat yhdensuuntaiset).

Liite 1: Isometriat ja ryhmät*

Matriisiesitykset

Tason isometriat voidaan *reaalitasossa* esittää matriisien avulla. Nämä esitykset ovat erityisen mielekkäitä ohjelmoinnin kannalta. Reaalitasossa kukin piste esitetään koordinaattiansa avulla $P = (x, y)$. Yleisesti, tason lineaarimuunnos määräytyy annetusta 2×2 -matriisista ja vakiovektorista:

$$T(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (p, q).$$

Esimerkki 5.8. (1) Identiteettimatriisi $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ kuvaa jokaisen pisteen itselleen.

(2) Kaikki translaatiot $P \mapsto P'$ voidaan esittää muodossa $(x', y') = (x, y)I + (a, b)$.

(3) Rotaatio origon ympäri kulman θ verran voidaan esittää matriisina

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(4) Peilaus origon kautta kulkevan suoran ℓ suhteen, joka muodostaa kulman θ x -akselin suhteen, voidaan esittää matriisina

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Toisaalta, jos ρ on peilaus suoran ℓ suhteen, joka ei kulje origon kautta, voidaan se esittää aina muodossa $\tau^{-1}\rho_1\tau$, missä τ on translaatio, jolle ℓ^τ kulkee origon kautta ja ρ_1 on peilaus suoran ℓ^τ suhteen. \square

Seuraavan lauseen mukaan jokainen isometria säilyttää pistejoukon painopisteen. Tätä varten määritellään pistejoukon $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ painopiste ehdosta

$$G(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i,$$

(kyseessä on vektorien summaus). Merkitään myös $\alpha(\mathcal{P}) = \{\alpha(P_1), \alpha(P_2), \dots, \alpha(P_n)\}$.

Lause 5.22. Olkoot α isometria, ja \mathcal{P} tason äärellinen pistejoukko. Tällöin $\alpha(G(\mathcal{P})) = G(\alpha(\mathcal{P}))$.

Tästä lauseesta ja ryhmien perusominaisuuksista saadaan

Lause 5.23. Jos \mathcal{G} on äärellinen ryhmä isometrioita, niin on olemassa piste jonka kaikki $\alpha \in \mathcal{G}$ kiinnittävät.

Itseasiassa, voidaan osoittaa, että jokainen äärellinen isometrioiden ryhmä on joko syklinen tai dihedraalinen.

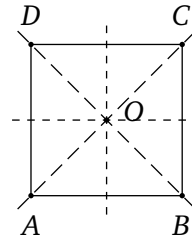
Tason symmetriat

Olkoon K tason kuvio (eli pistejoukko). Tällöin sen **symmetriaryhmä** $\text{Sym}(K)$ koostuu kaikista isometrioista, jotka kiinnittävät K :n pisteittäin. On helppo todeta, että $\text{Sym}(K)$ on ryhmä.

Esimerkki 5.9. Neliön $\diamond ABCD$ symmetriaryhmä koostuu

- (1) rotaatioista $\sigma_{O,\theta}$, missä $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ ja O on neliön keskipiste (mukaanlukien identiteettikuvaus), ja
- (2) peilauksista diagonaalien $\ell(A, C)$ ja $\ell(B, D)$ suhteen,
- (3) peilauksista sivujen keskinormaalien $\ell(X, Z)$ ja $\ell(y, R)$ suhteen.

Selvästi jokainen symmetriaryhmän alkio permutoi kärkipisteet. Symmetriaryhmään kuuluu siis 8 isometriaa. \square



Jos kuvio K on rajoitettu (eli se voidaan piirtää jonkun ympyrän sisään), on sen symmetriaryhmä äärellinen, ja siten kuviolla on aina 'keskipiste', jonka jokainen isometria $\alpha \in \text{Sym}(K)$ kiinnittää. Toki $\text{Sym}(K)$ voi olla triviaali eli $\text{Sym}(K) = \{\iota\}$, jolloin kaikki pisteet ovat 'keskipisteitä'. Kuten tiedämme, jos kuviolla on vähintään kolme 'keskipistettä', on sen symmetriaryhmä triviaali.

Olkoon \mathcal{T}_t on tason kaikkien translaatioiden muodostama ryhmä. Jos \mathcal{G} on jokin isometrioiden ryhmä, samoin on siinä esiintyvien translaatioiden muodostama joukko, jota kutsutaan \mathcal{G} :n **translaatioryhmäksi**:

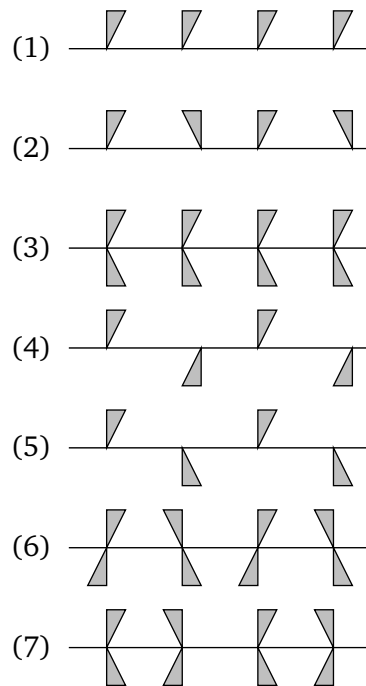
$$T_{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cap \mathcal{T}_t.$$

(1) Mikäli ryhmä $T_{\mathcal{G}}$ on syklinen eli $T_{\mathcal{G}} = \{\dots, \tau^{-1}, \iota, \tau, \tau^2, \dots\}$ on \mathcal{G} **friisiryhmä** (eli **ornamenttir ryhmä**). Friisiryhmä on jonkin ornamentin symmetriaryhmä, eli sellaisen kuvion, jossa osakuvio toistuu tasavälein suoran suunnassa.

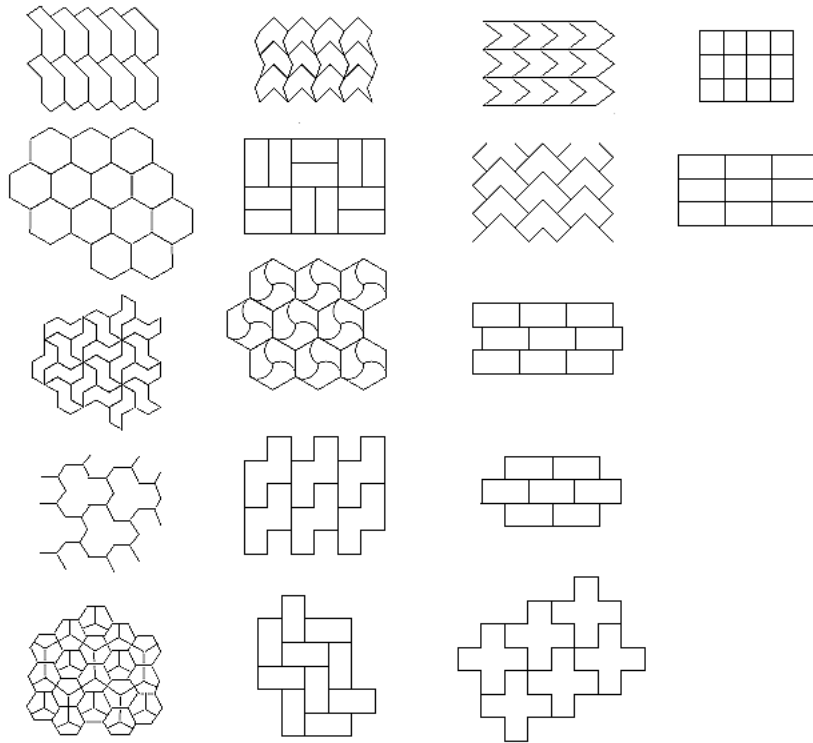
Lause 5.24. Jokainen friisiryhmä \mathcal{G} on yhtä seuraavista tyypeistä. Ryhmän \mathcal{G} generoi

- (1) translaatio,
- (2) translaatio $\overline{\tau} \parallel a$ ja peilaus ρ_b , missä $b \perp a$,
- (3) translaatio $\overline{\tau} \parallel a$ ja peilaus ρ_a ,
- (4) translaatio $\overline{\tau} \parallel a$ ja puolikierto δ_P , missä $P \in a$,
- (5) siirtopeilaus,
- (6) siirtopeilaus $\overline{\rho'} \parallel a$ ja puolikierto δ_P , missä $P \in a$,
- (7) siirtopeilaus $\rho' \parallel a$, peilaus ρ_b ja puolikierto δ_P , missä $b \perp \tau$ ja $P \in a$.

Friisiryhmien symmetriat voidaan esittää oheisten ornamenttikuvien avulla.



(2) Kideryhmä (eli **tapettiryhmä**) on isometrioiden ryhmä, jonka generoijajoukkoon kuuluu tarkalleen kaksi translaatiota, joiden suunnat eivät ole yhdensuuntaisia. Näiden ryhmien kiinnittämät kuvat toistavat itseään tasossa, jonka ne täyttävät periodisesti peruskuvion avulla. Peruskuvio on monikulmio (jonka sisälle voidaan piirtää symmetriaa rajoittava kuvio). Kideryhmiä on 17 eri tyyppistä riippuen niiden (muiden) generaattorien luonteesta. Tällaisessa ryhmässä voi olla vain sellaisia rotaatioita, joiden rotaatiokulmat ovat $360^\circ/n$, missä $n = 2, 3, 4$ tai 6 .



Kuvat Bar-Natanin kotisivulta:

www.math.toronto.edu/~drorbn/Gallery/Symmetry/Tilings

(3) Mikäli translaatioryhmä $T_{\mathcal{G}}$ sisältää vähintään kolme riippumatonta translaatiota, on ryhmä \mathcal{G} **jatkuva**: jokaiselle reaaliluvulle $r > 0$ ja tason pisteelle P on olemassa $\alpha \in \mathcal{G}$, jolle $PP^\alpha < r$, eli piste kuvautuu mielivaltaisen lähelle annettua pistettä ryhmän \mathcal{G} translaatioita käyttäen.

Liite 2: Fraktaaleista*

Fraktaali on äärimmäisen hienorakenteinen epäsäännöllinen kuvio, jossa on (likimääräisesti) itseään toistavia kuvioita. Usein fraktaali saadaan aikaiseksi toistamalla loputtomiin annettua laskukaavaa. Fraktaaleja voidaan saada aikaan hyvin monella iteratiivisella tavalla. Esimerkiksi **Mandelbrotin joukko ja Julia-joukot** syntyvät kompleksitasoon toistamalla kuvausta

$$z \mapsto z^2 + c.$$

Samoin Newtonin metodi polynomien juurien etsimiseksi voidaan muokata tuottamaan fraktaaleja. Toisaalta Lindenmayer suunnitteli 1960-luvun lopulla kuvaamaan biologisia kasvuprosesseja. Nämä L-systeemit tuottavat (usein 'kasvustollisia') fraktaaleja toistamalla tiettyjä formaalisia sääntöjä. Myös äärelliset automaattit ja soluautoomaattit generoivat fraktaaleja.

Esimerkki 5.10 (Mandelbrotin joukko). Tarkastellaan kompleksilukujen jonoa

$$z_1, z_2, \dots,$$

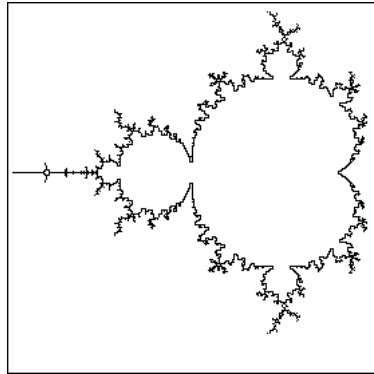
joka määritellään rekursiivisesti alkuarvosta $c \in \mathbb{C}$ lähtien: $z_1 = c$ ja

$$z_{n+1} = z_n^2 + c. \tag{5.3}$$

Mandelbrotin joukko M koostuu niistä kompleksitason pisteistä $c \in \mathbb{C}$, joilla jono (5.3) pysyy rajoitettuna $|z_n| \leq d$ jollain vakiolla d .

Esimerkki 5.11. • Kun $c = 1$, on jono nopeasti kasvava: $z_1 = 1$, $z_2 = z_1 z_1 + c = 2$, $z_3 = z_2 z_2 + c = 5$, $z_4 = z_3 z_3 + c = 26$, $z_5 = z_4 z_4 + c = 677$, $z_6 = z_5 z_5 + c = 458330$. Tässä tapauksessa z_n etäännyy origosta, $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \rightarrow \infty$, eli $1 \notin M$.

- Kun $c = i$, niin $z_1 = i$, $z_2 = i \cdot i + i = -1 + i$, $z_3 = (-1 + i)(-1 + i) + i = -i$, $z_4 = (-i)(-i) + i = -1 + i$, ja jono on (**lopulta**) **periodinen**: joka toinen jonon jäsen on $-i$ ja joka toinen $-1 + i$. Erityisesti jono $\{z_n\}$ pysyy rajoitettuna: $|z| \leq \sqrt{2}$.
- Myös kun $c = -2$ saadaan periodinen jono, sillä nyt $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = 2$, \dots
- Kun $c = -0.5 + 0.5i$, niin $z_2 = -0.5$, $z_3 = 0.25 + i$, $z_4 = -0.6875 + 0.25i$, ja nyt on hieman vaikeampaa sanoa miten jono $\{z_n\}$ käyttäytyy. Kun iterointia jatketaan voidaan aavistaa, että jono z_n suppenee tässä tapauksessa kohti raja-arvoa, joka on likimääräisesti $-0.41 + 0.28i$. □



Invariantit kuvat

Olkoot $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ kutistavia kuvauksia,

$$P^{\alpha_i} Q^{\alpha_i} \leq c_i \cdot PQ, \quad (i = 1, 2, \dots, m; c_i < 1).$$

Tason kuvio F on **invariantti** näiden kuvausten suhteen, jos

$$F = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(F).$$

Näin ollen F on invariantti kuvausten α_i suhteen, jos joukot $\alpha_i(F)$ peittävät kuvion F tarkalleen kuitenkin sallien päällekkäisyyden.

Tason kuvio F on **itsesimilaari**, jos se on invariantti joidenkin kutistavien *similaarikuvausten* $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ suhteen. Itsesimilaari kuvio on siten omien pienennöstensä, $\alpha_1(F), \dots, \alpha_m(F)$, yhdiste. Tällöin $F \sim \alpha_i(F) \sim \alpha^2(F) \sim \dots$, missä kukin pienennöksen pienennös $\alpha^j(F)$ on osa kuviota F . Näin ollen itsesimilaari F sisältää itsensä toiston äärettömän monta kertaa. Myöhemmin fraktaaleja käsitellään invariantteina kuvioina.

Esimerkki 5.12 (Von Kochin käyrä). Tämä käyrä K on neljän kutistavan similaarikuvauksen unioni. Käyrä K kuvautuu α_i :n avulla similaariksi käyräksi välille $A_i - A_{i+1}$.



Kochin käyrä saadaan iteroimalla seuraavaa muunnosta: kuvion jokainen jana jaetaan kolmeen yhtä pitkään osaan, ja keskimäinen korvataan tasasivuisen kolmion kahdella muulla

kyljellä. Von Kochin käyrä K on raja-arvo tästä iteraatiosta K_0, K_1, K_2, \dots , missä murtoviivan K_i pituus on $(\frac{4}{3})^i$ kertaa alkuperäisen janan K_0 pituudesta. Niinpä *Kochin käyrän pituus on ääretön*, vaikka se kulkee rajoitetulla alueella. Fraktaalien teoriassa tällaisille käyrille löydetään dimensio. Kochin käyrän fraktaalinen dimensio on

$$\frac{\log(4)}{\log(3)}. \quad \square$$

Tason topologiaa

Fraktaalien teoriaa varten tarvitaan muutama topologinen käsite: Kullekin $r > 0$

$$B_r(P) = \{Q : PQ < r\}$$

on P -keskinen *avoin r -ympäristö*. Kuvio F on *avoin*, jos sen jokaisella pisteellä on avoin ympäristö F :ssä, $B_r(P) \subseteq F$ jollain $r > 0$. Kuvio F on *suljettu*, jos sen jokainen reunapiste kuuluu F :ään. Todetaan, että kuvio F on suljettu jos ja vain jos sen komplementti $\mathbb{E} \setminus F$ on avoin.

Kaikki kuviot eivät käyttäydy tarpeeksi siististi, jotta niille voitaisiin määritellä dimensio. Siksi kompaktit kuviot näyttävät keskeistä osaa fraktaalien maailmassa. Kuvio F on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite: Jos $F \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, missä kukin A_i ($i \in I$) on avoin joukko, niin on olemassa äärellinen osaperhe $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ siten, että $F \subseteq \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$. Tasossa kompaktit kuviot voidaan luonnehtia helposti:

Lause 5.25. *Tason kuvio F on kompakti jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.*

Kuvio F on *rajoitettu*, jos on olemassa $r > 0$ ja piste P , joilla $F \subseteq B_r(P)$. (Vertaa edellistä tulosta Heine-Borel lauseeseen).

Lause 5.26. (1) *Jos $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ on pienenevä jono kompakteja kuvioita, niin $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ on epätühjä kompakti kuvio.*

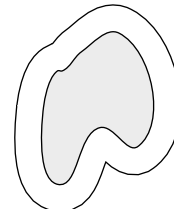
(2) *Jos α on kutistava kuvaus ja F on kompakti kuvio, niin myös $\alpha(F)$ on kompakti.*

Määritellään vielä kullekin kuviolle F sen avoin ja suljettu r -ympäristö:

$$B_r(F) = \{Q : PQ < r \text{ jollain } P \in F\} \text{ ja } \bar{B}_r(F) = \{Q : PQ \leq r \text{ jollain } P \in F\}.$$

Pisteiden välinen etäisyys PQ ei määrittele kompaktien kuvioiden välistä etäisyyttä suoraviivaisesti vaan tarvitaan hieman erilainen määrittely: Kun F ja G ovat kompakteja, määritellään niiden **Hausdorff-etäisyys** seuraavasti

$$d_H(F, G) = \inf\{r : F \subset \bar{B}_r(G) \text{ ja } G \subset \bar{B}_r(F)\}.$$



Lause 5.27. d_H on hyvin määritelty etäisyys: kaikille kompakteille F, G, K

$$(1) d_H(F, G) \geq 0, \text{ ja } d_H(F, G) = 0 \text{ vain jos } F = G,$$

$$(2) d_H(F, G) = d_H(G, F),$$

$$(3) d_H(F, G) \leq d_H(F, K) + d_H(K, G).$$

Siten kompaktit kuviot muodostavat metrisen avaruuden Hausdorff-etäisyyden suhteen.

Invarianttien kuvioiden ominaisuuksia

Seuraava lause sanoo, että kutistavat kuvaukset määräävät aina yksikäsitteisen invariantin joukon (fraktaalien).

Lause 5.28. Olkoot $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$, kutistavia kuvauksia,

$$P^{\alpha_i} Q^{\alpha_i} \leq c_i \cdot PQ \quad (c_i < 1).$$

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen kompakti kuvio F , joka on invariantti näiden kuvausten suhteen:

$$F = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(F).$$

Todistus. Olkoon K jokin kompakti kuvio, jolle $\alpha_i(K) \subset K$. (Tällaisia kuvioita on olemassa, esimerkiksi $\bar{B}_r(\{P\})$ jollain P ja r .) Koska kukin α_i on kutistava, myös $\alpha_i(K)$ on kompakti, ja siten $\alpha_i^k(K)$ on kompakti kaikilla i ja k . Merkitään

$$\alpha(K) = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K).$$

Oletuksen nojalla, $\alpha(K) \subset K$, ja edeltävän perusteella $\alpha^k(K)$ on kompakti kaikilla k . Siten $\alpha^{k+1}(K) \subset \alpha^k(K)$ kaikilla k , ja näin ollen $K, \alpha(K), \alpha^2(K), \dots$ on pienenevä jono kompakteja kuvioita. Niiden leikkaus

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha^k(K)$$

on epätyhjä kompakti kuvio. Koska edellinen jono on pienenevä, niin selvästi $\alpha(F) = F$, eli F on invariantti kuvausten α_i suhteen.

Yksikäsitteisyyttä varten huomataan, että jos K ja G ovat kompakteja, niin

$$d_H(\alpha(K), \alpha(G)) \leq \max\{d_H(\alpha_i(K), \alpha_i(G)) : i = 1, 2, \dots, m\},$$

(miksi?), ja siten

$$d_H(\alpha(K), \alpha(G)) \leq \max\{c_i : i = 1, 2, \dots, m\} \cdot d_H(K, G),$$

mistä seuraa, että jos $\alpha(K) = K$ ja $\alpha(G) = G$, niin $d_H(K, G) = 0$, eli $K = G$. □

Lause 5.29. Olkoot α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) kutistavia kuvauksia kuten edellä, K kompakti kuvio, jolla $\alpha_i(K) \subseteq K$. Merkitään

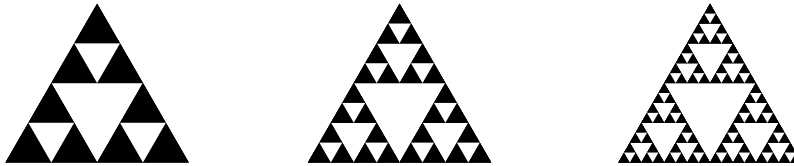
$$\alpha(K) = \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K).$$

Tällöin

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} \alpha^k(K).$$

Todistus kertoo vielä enemmän: *Olkoon K mikä tahansa kompakti joukko. Tällöin $\alpha^k(K)$ lähenee invarianttia joukkoa F , kun k kasvaa, eli $d_H(\alpha^k(K), F) \rightarrow 0$ kun $k \rightarrow \infty$. Tämä voidaan helposti johtaa todistuksen viimeisestä epäyhtälöstä.*

Esimerkki 5.13. Sierpinskiin kolmio saadaan poistamalla tasasivuisen kolmion ‘keskuskolmio’ ja toistamalla tätä loputtomiin kaikkiin jäljellä oleviin kolmioihin. Tämä tarkoittaa, että on käytetty kolmea similaarikuvausta α_i ($i = 1, 2, 3$), joista kukin kuvaa tasasivuisen kolmion yhdeksi ‘kärkikolmioksi’. Edeltävän lauseen nojalla alkukuvioksi olisi voitu valita vaikkapa yksi piste (koko kolmion asemesta) ja silti päädytään samaan lopputulokseen. \square



Seuraavaksi nyt että annetuilla kutistavilla kuvauksilla on sama kutistusvakio c . Tällä edellytyksellä johdetaan kollaasilause, joka sanoo, että miten hyvä (kompakti) arvio K on invariantista kuvioista F .

Lause 5.30 (Kollaasilause). *Olkoot α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) kutistavia kuvauksia ja F niiden invariantti kuvio siten, että $P^{\alpha_i}Q^{\alpha_i} \leq c \cdot PQ$, missä $c < 1$. Tällöin*

$$d_H(K, F) \leq d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) \cdot \frac{1}{1-c},$$

missä K on kompakti kuvio.

Todistus. Kolmioepäyhtälöä käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} d_H(K, F) &\leq d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) + d_H(\bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K), F) \\ &= d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) + d_H(\bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K), \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(F)) \\ &\leq d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) + c \cdot d_H(K, F) \end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa edeltävän todistuksen viimeisestä epäyhtälöstä. \square

Lause 5.31. *Olkoot K epätyhjä kompakti kuvio ja ϵ positiivinen. Tällöin on olemassa invariantti kuvio F kutistavien similaarikuvausten suhteen, jolla $d_H(K, F) < \epsilon$*

Todistus. Olkoot $B_i = B_r(P_i)$ pisteiden P_i ($i \in I$) ympäristöjoukko, jolla $r \leq \frac{1}{4}\epsilon$ ja joka peittää K :n, $K \subset \cup_{i \in I} B_i$. Koska K on kompakti, niin näistä ympäristöistä löydetään äärellinen osapeite, sanokaamme $K \subset \cup_{i=1}^m B_i$. Tällöin r :n valinnan nojalla,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_i \subset B_{\frac{1}{4}\epsilon}(K).$$

Olkoon α_i kutistava similaarikuvaus, joka kuvaa K :n B_i :hin ja jonka kutistusvakio on korkeintaan $\frac{1}{2}$. Näin ollen $\alpha_i(K) \subset B_i \subset B_{\frac{1}{2}\epsilon}(\alpha_i(K))$, ja siten

$$\bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K) \cup B_{\frac{1}{4}\epsilon}(K) \quad \text{ja} \quad K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\frac{1}{2}\epsilon}(\alpha_i(K)),$$

mistä saadaan, että

$$d_H(K, \bigcup_{i=1}^m \alpha_i(K)) < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Tästä edeltävän lauseen nojalla johdetaan vaadittu tulos: $d_H(K, F) < \epsilon$, missä F on kutistavien similaarikuvausten α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) invarianttikuvio. \square

Kollaasilause tarjoaa käytännöllisen tavan esittää kuvioita: Piirretään ensin F likimääräisesti ja peitetään se sitten mahdollisimman tarkasti similaareilla kopioilla. Nämä similaarit kuviot määräävät invariantin kuvion K , joka on hyvä arvio alkuperäisestä kuvioista F kollaasilauseen mukaan.

Jokainen tasokuvio voidaan esittää mielivaltaisen tarkasti kutistavien similaarikuvausten invarianttina joukkona, ja siten saada tämä kuvio aikaan iteroimalla similaarikuvauksia jostain kompaktista kuvioista lähtien. Tällä on käytännöllisiä sovellutuksia, sillä esittämällä kuvio (valokuva, tietokonegrafiikka ja niin edelleen) pisteittäin (kuten tietokoneen tiedostot normaalisti tekevät), vaaditaan suuria tiedostoja, mutta esittämällä sama kuvio luettelamalla vain iteraatioon tarvittavat kuvaukset, päästään usein huomattavasti vähemmällä tietomäärällä. Tämän pakkauksen varjopuolena on se, että käytettävät kutistavat kuvaukset välttämättä luovat jonkinverran symmetrisyyttä tuloksena olevaan kuvioon, vaikkei moista symmetrisyyttä esiintyisikään alkuperäisessä kuviossa.

Kirjallisuutta valikoidusti

Coxeter, S. M., Introduction to Geometry, Wiley, 1969.

Coxeter, S. M., Greitzer, S. L., Geometry Revisited, Math. Assoc. America, 1967.

Dodge, C. W., Euclidean Geometry and Transformations, Dower, 1972.

Perfect, H., Topics in Geometry, Pergamon, 1963.

Smart, J. R., Modern Geometries, Brooks/Cole, 1988.

Martin, G. E. Transformation Geometry. Springer-Verlag, 1982.

Millman, Parker, Axiomatic geometry: A Metric Approach, Springer Verlag, 1986.

Nevanlinna, R., Geometrian perusteet, WSOY, 1973.

Guggenheimer, H. W., Plane Geometry and its Groups, Holden-Day, 1967.

Modenov, P. S., Parkhomenko, A. S., Geometric Transformations, Vol. I, Academic Press, 1965. (Transformaatioiden yleisyyttä).

Lyndon, R. C., Groups and Geometry, Cambridge, 1985.

Silvester, J. R. Geometry. Ancient & Modern. Oxford Univ. Press, 2001.

Weyl, H., Symmetry, Princeton, 1952.

Barnsley, M.F., Fractals Everywhere, Academic Press, 1988.

Falconer, K.J., Fractal Geometry, Wiley, 1990.

Mandelbrot, B.B., The Fractal Geometry of Nature, Freeman, 1982.

Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A., The Algorithmic Beauty of Plants, Springer, 1990. (Biologisesti motivoitua fraktaalien teoriaa).

Eukleideen Alkeista voi nauttia englanniksi myös internetissä:

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>