Abc-konjektuuri

Marko Lamminsalo

Itä-Suomen yliopisto

29. elokuuta 2011

Sisältö

Fermat'n suuri lause

Lause (Fermat 1637, Wiles 1995)

Kun $n \geq 3$ on luonnollinen luku, yhtälöllä

$$x^n + y^n = z^n$$

ei ole epätriviaaleja kokonaislukuratkaisuja.

Polynomeista

Määritelmä

Olkoon f ei-vakio polynomi. Tällöin

$$\mathrm{n}_0(f) = \text{polynomin } f \text{ erillisten nollakohtien lukumäärä.}$$

Esimerkki

Olkoot $f(x) = x^2 - 1$ ja $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Tällöin

$$\mathrm{n}_0(f) = \mathrm{n}_0([x-1][x+1]) = 2$$
$$\mathrm{n}_0(g) = \mathrm{n}_0([x+1]^2) = 1$$

Mason-Stothersin lause

Lause (Stothers 1981, Mason 1983)

Olkoot $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ keskenään jaottomia polynomeja, jotka toteuttavat yhtälön $f + g = h$ ja joista ainakin yksi on vakiosta eroava. Tällöin

$$\max\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} \leq \mathrm{n}_0(fgh) - 1.$$

Esimerkki

Olkoot $f(x) = x$ ja $g(x) = x + 1$. Tällöin

$$h(x) = 2x + 1,$$

joten $\max\{\deg(f), \deg(g), \deg(h)\} = 1$. Edelleen

$$fgh = (x - 0)(x + 1)2(x + \frac{1}{2}),$$

joten Mason-Stothersin lauseen nojalla saadaan epäyhtälö

$$1 \leq 3 - 1 = 2.$$

Radikaali

Määritelmä

Luvun $n \in \mathbb{N}$ *radikaali* määritellään tulona

$$\mathrm{rad}(n) = \prod_{p|n} p,$$

missä luvut p ovat alkulukuja ja $\mathrm{rad}(1) = 1$.

Esimerkki

Koska $1000000 = 10^6 = (2 \cdot 5)^6 = 2^6 5^6$, niin

$$\mathrm{rad}(10^6) = 2 \cdot 5 = 10.$$

Abc-konjektuuri

Abc-konjektuuri I (Oesterle, Masser 1985)

Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa luku $K(\varepsilon)$ siten, että kaikille nollasta eroaville suhteellisille alkuluvuille a, b ja c, joille $a + b = c$, pätee

$$\max(|a|, |b|, |c|) \leq K(\varepsilon)\mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Abc-konjektuuri

Abc-konjektuuri II

Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa äärellinen määrä suhteellisia alkulukuja a, b ja c, joille $a + b = c$, pätee

$$\max(|a|, |b|, |c|) > \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Abc-osuma

Määritelmä

Kolmikkoa $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ kutsutaan *abc*-osumaksi, mikäli seuraavat kolme ehtoa täyttyvät:

- $a + b = c$;
- $\mathrm{syt}(a, b, c) = 1$;
- $c > \mathrm{rad}(abc)$.

Esimerkki

Kolmikko $(1, 8, 9)$ muodostaa *abc*-osuman.

No.	a	b	c	$\mathrm{rad}(abc)$
1	$1=1$	$8=2^3$	$9=3^2$	6
2	$5=5$	$27=3^3$	$32=2^5$	30
3	$1=1$	$48=2^4 3$	$49=7^2$	42
4	$1=1$	$63=3^2 7$	$64=2^6$	42
5	$1=1$	$80=2^4 5$	$81=3^4$	30
6	$32=2^5$	$49=7^2$	$81=3^4$	42

Lause

Abc-osumia on äärettömästi.

Todistus.

Konsturoidaan ääretön jono kolmikoita (a_n, b_n, c_n) asettamalla jokaisella $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = 1, \quad b_n = 9^n - 1, \quad c_n = 9^n,$$

jolloin $a_n + b_n = c_n$ ja $\mathrm{syt}(a_n, b_n, c_n) = 1$. Induktiolla voidaan osoittaa, että luku b_n on jaollinen luvulla 8 kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Luku b_n voidaan siis kirjoittaa muodossa $b_n = 2^3 j$, jolloin

$$\mathrm{rad}(b_n) \leq 2j$$

jollekin $j \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\mathrm{rad}(a_n b_n c_n) \leq 2j \cdot 3 = 6j < 8j + 1 = c_n,$$

Näin ollen kolmikko (a_n, b_n, c_n) on *abc*-osuma kaikilla $n \in \mathbb{N}$. □

Merkintä

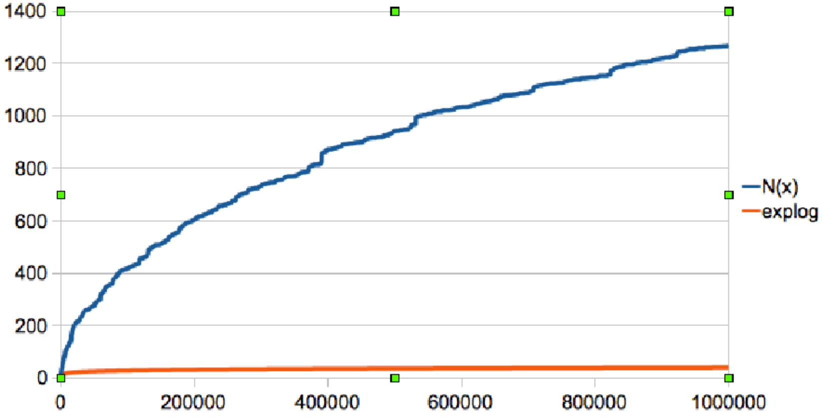
Merkitään

$$N(X) = \{Abc - osuma(a, b, c) | \; c \leq X\}$$

Lause (Dahmen, 2008)

Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $X_0 > 0$ siten, että kaikilla $X \geq X_0$ pätee

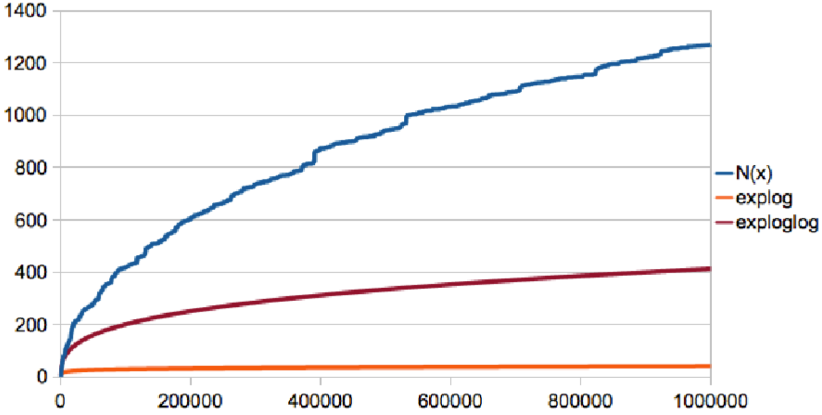
$$N(X) \geq \exp\left((\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$


1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
200000
400000
600000
800000
1000000
N(x)
explog

Propositio

Jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $X_0 > 0$ siten, että kaikilla $X \geq X_0$ pätee

$$N(X) \geq \exp\left((\log X)^{\frac{1}{2}}(\log\log X)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right).$$


1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
200000
400000
600000
800000
1000000
N(x)
explog
exploglog

Abc-konjektuuri

Abc-konjektuuri II

Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohden on olemassa äärellinen määrä suhteellisia alkulukuja a, b ja c, joille $a + b = c$, pätee

$$\max(|a|, |b|, |c|) > \text{rad}(abc)^{1+\varepsilon}.$$

Esimerkki

Olkoon $(a, b, c) = (2, 3^{10}109, 23^5)$. Nyt

$$\mathrm{rad}(abc) = 2 \cdot 3 \cdot 109 \cdot 23 = 15042$$

Arvolla $\varepsilon = 0,6299$ saadaan

$$23^5 - \mathrm{rad}(abc)^{1,6299} \approx 720 > 0$$

mutta arvolla $\varepsilon = 0,63$

$$23^5 - \mathrm{rad}(abc)^{1,63} \approx -5500 < 0.$$

No.	$1+\varepsilon$	a	b	c	vuosi
1	1.6299	2	$3^{10}109$	23^5	1987
2	1.6260	11^2	$3^2 5^6 7^3$	$2^{21}23$	1985
3	1.6235	$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 31^8$	$2^8 3^{22} 5^4$	1994
4	1.5808	283	$5^{11}13^2$	$2^8 3^8 17^3$	1993
5	1.5679	1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 7$	1988
6	1.5471	7^3	$3^1 0$	$2^{11}29$	1988

Asymptoottinen Fermat'n suuri lause

Lause

Abc-konjektuurin nojalla on olemassa positiivinen kokonaisluku n_0 siten, että yhtälöllä

$$x^n + y^n = z^n$$

ei ole suhteellisia alkulukuratkaisuja millään eksponentilla $n \geq n_0$.

Todistus.

Olkoot x, y ja z positiivisia suhteellisia alkulukuja siten, että

$$x^n + y^n = z^n.$$

Tällöin

$$\mathrm{rad}(x^n y^n z^n) = \mathrm{rad}(xyz) \leq xyz < z^3.$$

Jos nyt $n \geq 2$, niin $z \geq 3$. Soveltamalla abc-konjektuuria arvoilla $\varepsilon = 1$ ja $K_1 = \max\{1, K(1)\}$ saadaan

$$z^n = \max\{x^n, y^n, z^n\} \leq K_1 \mathrm{rad}(x^n y^n z^n)^2 < K_1 z^6,$$

josta edelleen

$$n < 6 + \frac{\log K_1}{\log z} \leq 6 + \frac{\log K_1}{\log 3}.$$

Väite seuraa. $\square$