Argumentin periaate

Kandidaatintutkielma
Marko Lamminsalo
180897
Itä-Suomen yliopisto
9. huhtikuuta 2011

Sisältö

1 Johdanto

Argumentin periaate on askel eteenpäin kompleksianalyysin peruskurssilla esitetystä teoriasta; nyt vain lisätään jälleen yksi sovellus jo entuudestaan hyvin käyttökelpoiselle Residylauseelle. Sen avulla saadaan yhdistettyä analyyttisen funktion logaritminen integraali, nollakohtien ja napojen välinen erotus ja kuvakäyrän kierrosluku origon suhteen. Se on siis hyvin monipuolinen ja helposti sovellettava sekä yleistettävä tulos. Tässä tutkielmassa keskitytään sovellusten osalta tarkastelemaan erityisesti Argumentin periaatteen seurauksena saatavaa Rouchén lausetta, jonka avulla voidaan verrata kahden analyyttisen funktion nollakohtien määrää tietyssä alueessa. Rouchén lauseen avulla pystytään edelleen todistamaan muita merkittäviä tuloksia.

Vaikka tutkielman lukijalta odotetaankin pohjatietoina vähintään kompleksianalyysin peruskurssia, annetaan suurin osa tarvittavista lähtötiedoista (joskin ilman perustelua) tiiviissä paketissa luvussa 2. Luku 3 koostuu pelkästään Argumentin periaatteeseen johtavasta päättelystä sekä itse väittämästä ja luku 4 keskittyy enemmälti saadun lauseen sovelluksiin. Sovellusosuuden pääpaino on edellä mainitun mukaisesti Rouchén lauseella.

Pääasiallisina lähteinä on luvussa 2 käytetty Fulksin kirjaa *Complex Variables, An Introduction* [3], luvussa 3 Flaniganin kirjaa *Complex Variables, Harmonic And Analytic Function* [2] ja luvussa 4 Ponnusamyn ja Silvermanin kirjaa *Complex Variables With Applications* [7]. Muita lähteitä on kuitenkin käytetty tarkistuksessa sekä esityksen moninaistamisessa.

2 Peruskäsitteitä

Tässä luvussa palautetaan mieleen todistamatta muutamia tutkielman kannalta oleellisia kompleksianalyysin peruskäsitteitä. Aloitetaan analyyttisyydestä ja tarkastellaan kompleksiarvoisia käyriä.

Määritelmä 2.1. Olkoon f kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäristössä. Funktio f on *analyyttinen* pisteessä a, jos se on derivoituva pisteessä a, ts. jos raja-arvo

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

on olemassa äärellisenä kompleksilukuna. Edelleen funktiota f, joka on määritelty kompleksitason $\mathbb{C}$ avoimessa joukossa U, sanotaan *analyyttiseksi joukossa* U, jos se on derivoituva kaikissa pisteissä $a \in U$. Mikäli funktio f, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$, sanotaan sitä *kokonaiseksi*.

Määritelmä 2.2. Kompleksitason *jatkuva käyrä* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ määritellään parametrien avulla muodossa

$$\Gamma : z(t) = x(t) + iy(t), \quad (t \in [a, b], a < b)$$

missä x ja y ovat reaalimuuttujan t reaaliarvoisia jatkuvia funktioita. Pistettä $z(a)$ sanotaan *alkupisteeksi* ja pistettä $z(b)$ *loppupisteeksi*. Käyrän Γ sanotaan olevan

- *suljettu*, mikäli alkupiste on sama kuin loppupiste, ts. $z(a) = z(b)$
- *yksinkertainen*, mikäli se ei leikkaa itseään, ts. $z(t_1) \neq z(t_2)$ aina kun $t_1 \neq t_2$, mutta hyväksytään kuitenkin mahdollisuus $z(a) = z(b)$
- *sileä*, jos funktio z on jatkuvasti derivoituva muuttujan $t \in [a, b]$ suhteen, ts. funktiot z ja z' ovat jatkuvia välillä $[a, b]$
- *polku*, jos se on paloittain sileä.

Yksinkertaista suljettua käyrää kutsutaan myös *Jordanin käyräksi* ja yksinkertaista, suljettua sekä paloittain sileää käyrää *ääriviivaksi.*

Määritelmä 2.3. Avointa yhtenäistä joukkoa $D \subset \mathbb{C}$ kutsutaan *alueeksi.* Mikäli alueen D jokaisen Jordanin käyrän rajaama kompleksitason rajoitettu osa sisältää vain alueen D pisteitä, on alue yhdesti yhtenäinen.

Lause 2.4. (Jordanin käyrälause) *Olkoon* $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *Jordanin käyrä. Tällöin käyrän* Γ *komplementti koostuu kahdesta pistevieraasta alueesta, rajoitetusta ja rajoittamattomasta, joilla kummallakin on reunanaan käyrä* Γ.

Määritelmä 2.5. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja ∂D alueen reuna. Reunalla ∂D on *positiivinen suunnistus*, mikäli kuljettaessa reunaa pitkin alue D jää vasemmalle puolelle.

Lause 2.6. *Olkoon funktio f analyyttinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$. Tällöin kaikki derivaatat $f^{(n)}$ ovat olemassa ja funktiot f sekä $f^{(n)}$ ovat jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi kaikille ääriviivan $\Gamma \subset D$ rajoittaman alueen sisäpisteille z pätee*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Lause 2.7. (Taylorin sarja) *Olkoon funktio f analyyttinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$ ja olkoon $z_0 \in D$. Merkitään $\delta = \{\inf |z_0 - z| : z \in \partial D\}$ pisteen z_0 ja alueen D reunan ∂D välistä lyhintä etäisyyttä. Tällöin kaikilla $z \in D$, $|z - z_0| < \delta$, funktiolla f on yksikäsitteinen suppeneva sarjakehitelmä*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Siirrytään tarkastelemaan analyyttisen funktion nollakohtia. Erityisesti yksikäsitteisyyslauseesta nähdään, että ei-vakion analyyttisen funktion nollakohtien täytyy olla eristettyjä ja jos niitä on ääretön määrä, niiden täytyy supeta kohti reunapistettä.

Määritelmä 2.8. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on funktion f *m-kertainen nollakohta*, jos funktio f on analyyttinen pisteessä z_0 ja $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$, mutta $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Lause 2.9. *Olkoon funktio f analyyttinen pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$. Tällöin piste z_0 on funktion f m-kertainen nollakohta, jos ja vain jos funktio f voidaan esittää muodossa*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

missä funktio g on analyyttinen pisteessä z_0 ja $g(z_0) \neq 0$.

Lause 2.10. (Yksikäsitteisyyslause) *Olkoon f alueessa D analyyttinen funktio ja olkoon $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono alueen D eri pisteitä supeten kohti pistettä $z_0 \in D$. Jos $f(z_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f(z) \equiv 0$ kaikilla $z \in D$.*

Lause 2.11. *Olkoon $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio alueessa $D \subset \mathbb{C}$ ja oletetaan, että on olemassa piste $z_0 \in D$ siten, että $f(z_0) = 0$. Tällöin joko $f \equiv 0$ alueessa D tai on olemassa reaaliluku $r > 0$ siten, että $f(z) \neq 0$ punkteeratussa ympäristössä $0 < |z - z_0| < r$.*

Tasaisesti suppenevalle analyyttiselle funktiojonolle on voimassa seuraava tulos:

Lause 2.12. *Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono analyyttisiä funktioita, jotka suppenevat tasaisesti kohti rajafunktiota f kaikissa alueen $D \subset \mathbb{C}$ kompakteissa osajoukoissa. Tällöin rajafunktio f on analyyttinen alueessa D.*

Tarkastellaan vielä lopuksi Residy-teoriaa, jossa käsitellään funktion käyttäytymistä lähellä eristettyjä erikoispisteitä, ts. pisteitä, joissa se ei ole analyyttinen.

Määritelmä 2.13. Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on *eristetty erikoispiste*, jos funktio f on analyyttinen joukossa $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ jollekin $r > 0$, mutta ei ole analyyttinen pisteessä z_0.

Lause 2.14. *Oletetaan, että funktiolla f on eristetty erikoispiste $z = z_0 \in \mathbb{C}$ ja että funktio f on rajoitettu joukossa $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ jollekin $r > 0$. Tällöin funktio f voidaan uudelleenmääritellä pisteessä z_0 siten, että funktio f on analyyttinen pisteessä z_0.*

Lause 2.15. *Jos funktiolla f on eristetty erikoispiste pisteessä $z = z_0 \in \mathbb{C}$ ja $f(z) \to \infty$, kun $z \to z_0$, niin funktiolla f on napa pisteessä $z = z_0$. Funktio f voidaan edelleen esittää muodossa*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m},$$

missä $m \in \mathbb{N}$ on navan kertaluku ja funktio g on analyyttinen pisteessä z_0 siten, että $g(z_0) \neq 0$.

Lause 2.16. *Jos funktiolla f on oleellinen erikoispiste pisteessä $z = z_0$, niin funktio f saa jokaisen kompleksiarvon mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuunottamatta jokaisessa pisteen z_0 ympäristössä.*

Eristetyn erikoispisteen läheisyydessä ei analyyttistä funktiota voida esittää Taylorin sarjana, mutta seuraava Laurentin sarjakehitelmä on mahdollinen. Laurentin sarjalla on tärkeä osa Residylauseessa, jota jatkossa tullaan käyttämään.

Lause 2.17. (Laurentin sarja) *Olkoot $0 \leq a < b \leq \infty$ ja olkoon funktio f analyyttinen ympyrärenkaassa $A = \{z \in \mathbb{C} : a < |z - z_0| < b\}$, missä z_0 on jokin kompleksitason kiinnitetty piste. Silloin funktiolla f on joukossa A yksikäsitteinen* Laurentin sarjaesitys

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

kaikille $k \in \mathbb{Z}$. Kertoimet a_k saadaan integraalista

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

missä $\Gamma \subset A$ on mikä tahansa ääriviiva, jonka rajoittaman alueen sisällä piste z_0 on.

Määritelmä 2.18. Jos funktiolla f on eristetty erikoispiste z_0, niin sen Laurentin sarjan termin $\frac{1}{z-z_0}$ kerrointa a_{-1} kutsutaan *funktion f residyksi pisteessä z_0* ja sitä merkitään $Res(f; z_0)$ tai $Res(z_0)$.

Lause 2.19. (Residylause) *Jos Γ on yksinkertainen suljettu positiivisesti suunnistettu polku ja funktio f on analyyttinen polulla Γ ja sen sisällä lukuunottamatta pisteitä $z_1, z_2, ..., z_n$, niin*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f; z_j).$$

3 Argumentin periaate

Luvun 2 viimeisenä tuloksena esitettiin hyvin käyttökelpoinen Residylause, joka helpottaa monien äärettömien tai trigonometristen reaalisten integraalien laskemista. Sovellettaessa lausetta kompleksiarvoisiin funktioihin vaikeuksia aiheuttaa usein moniarvoisuus, jolloin joudutaan valitsemaan jokin kyseisen funktion haara. Tarkastellaan seuraavanlaista tilannetta:

Olkoon Γ positiivisesti suunnistettu ääriviiva ja olkoon funktio f analyyttinen ääriviivalla Γ sekä sen sisällä lukuunottamatta äärellistä määrää napoja. Oletetaan, että funktiolla f ei ole nollakohtia ääriviivalla Γ. Tarkastellaan seuraavia lukuja:

(i) intergaalin
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
arvoa;

(ii) funktion f nollakohtien ja napojen lukumäärän erotusta ääriviivan Γ sisällä;

(iii) monta kertaa kuvakäyrä $f(\Gamma)$ kiertää origon kuvatasossa.

Luvut (ii) ja (iii) ovat selvästi kokonaislukuja. Osoitetaan, että kaikki kolme ovat itse asiassa yhtä suuria. Tätä tulosta kutsutaan Argumentin periaatteeksi.

3.1 Nollakohtien ja napojen lukumääristä

Aloitetaan tarkastelu ottamalla käyttöön seuraava merkintä.

Merkintä 3.1. Olkoon Γ suljettu käyrä ja olkoon funktio f analyyttinen käyrällä Γ ja sen sisällä lukuunottamatta äärellistä määrää napoja. Oletetaan lisäksi, että funktiolla f ei ole nollakohtia käyrällä Γ. Merkitään

$$\begin{aligned} N_0(\Gamma) &= \text{ funktion } f \text{ nollakohtien lukumäärä käyrän } \Gamma \text{ sisällä.} \\ N_\infty(\Gamma) &= \text{ funktion } f \text{ napojen lukumäärä käyrän } \Gamma \text{ sisällä.} \end{aligned}$$

Lukumäärät lasketaan kertalukujen mukaan eli yksinkertainen nollakohta lasketaan yhdesti, kaksinkertainen nollakohta kahdesti ja k-kertainen nollakohta k kertaa. Navat lasketaan vastaavasti.

Merkintää käytetään jatkossa ilman eri mainintaa. Osoitetaan Argumentin periaatteen ensimmäinen puolisko.

Lemma 3.2. *Olkoon Γ positiivisesti suunnistettu ääriviiva ja olkoon funktio f käyrällä Γ ja sen sisällä analyyttinen lukuunottamatta äärellistä määrää napoja käyrän Γ sisällä. Oletetaan lisäksi, että funktiolla f ei ole napoja tai nollakohtia käyrällä Γ. Tällöin*

$$N_0(\Gamma) - N_\infty(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz. \tag{3.1}$$

Todistus. Määritellään funktio F siten, että $F = f'/f$. Residylauseen nojalla yhtälön (3.1) oikea puoli on yhtäsuuri kuin funktion F residyjen summa käyrän Γ sisällä. Etsitään funktion F residyt tarkastelemalla nimittäjää.

Mikäli funktiolla f on käyrän Γ sisällä h-kertainen nollakohta pisteessä z_0, voidaan se ja sen derivaatta kirjoittaa Lauseen 2.9 nojalla muodossa

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^h f_1(z) \\ f'(z) &= h(z - z_0)^{h-1} f_1(z) + (z - z_0)^h f_1'(z), \end{aligned}$$

missä $h \in \mathbb{N}$ ja $f_1(z_0) \neq 0$. Tällöin funktio F saa muodon

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{h(z - z_0)^{h-1} f_1(z) + (z - z_0)^h f_1'(z)}{(z - z_0)^h f_1(z)} \\ &= \frac{h(z - z_0)^{h-1} f_1(z)}{(z - z_0)^h f_1(z)} + \frac{(z - z_0)^h f_1'(z)}{(z - z_0)^h f_1(z)} \\ &= \frac{h}{(z - z_0)} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} \end{aligned}$$

Koska funktio f_1 on analyyttinen ja nollasta eroava jossain pisteen z_0 avoimessa ympäristössä, on funktion F residy pisteessä z_0 määritelmän nojalla funktion f nollakohdan monikerta h. Tarkastelemalla näin jokainen funktion f nollakohta käyrän Γ sisällä saadaan nollakohtien kokonaismäärä $N_0(\Gamma)$ monikerrat mukaanlukien.

Mikäli funktiolla f on käyrän Γ sisällä k-kertainen napa pisteessä z_1, voidaan se Lauseen 2.15 nojalla kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_1)^{-k} f_2(z) \\ f'(z) &= -k(z - z_1)^{-k-1} f_2(z) + (z - z_1)^{-k} f_2'(z), \end{aligned}$$

missä $k \in \mathbb{N}$ ja $f_2(z_1) \neq 0$. Tällöin funktio F saa vastaavasti muodon

$$\begin{aligned} F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k(z - z_1)^{-k-1} f_2(z) + (z - z_1)^{-k} f_2'(z)}{(z - z_1)^{-k} f_2(z)} \\ &= \frac{-k(z - z_1)^{-k-1} f_2(z)}{(z - z_1)^{-k} f_2(z)} + \frac{(z - z_1)^{-k} f_2'(z)}{(z - z_1)^{-k} f_2(z)} \\ &= \frac{-k}{(z - z_1)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} \end{aligned}$$

Näin ollen funktion F residy pisteessä z_1 on $-k$. Tarkastelemalla jokainen funktion f napa käyrän Γ sisällä saadaan napojen residyjen summaksi $-N_\infty(\Gamma)$.

Koska kaikki funktion F erikoispisteet on käyty läpi, väite seuraa suoraan Residylauseesta. $\square$

Huomautus 3.3. Monissa lähteissä Lemmaa 3.2 nimitetään Argumentin periaatteeksi.

Havainnollistetaan saatua tulosta esimerkin avulla.

Esimerkki 3.4. Olkoon $f(z) = z^2$ ja olkoon Γ yksikköympyrä. Tällöin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{2z}{z^2}dz = \frac{2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z}dz = 2$$

Residy-lauseen nojalla. Saatu tulos yhtyy Lemman 3.2 tulokseen, sillä funktiolla $f(z) = z^2$ on kaksinkertainen nollakohta origossa eikä napoja missään.

Lemma 3.2 voidaan yleistää seuraavalla tavalla.

Lause 3.5. *Olkoon funktio f analyyttinen Jordanin käyrällä Γ ja sen sisällä lukuunottamatta äärellistä määrää napoja. Oletetaan, että funktiolla f ei ole nollakohtia tai napoja käyrällä Γ. Olkoot $z_1, \dots, z_n$ funktion f nollakohdat monikertoineen $h_1, \dots, h_n$ ja $w_1, \dots, w_m$ funktion f navat monikertoineen $k_1, \dots, k_m$ käyrän Γ sisällä. Jos funktio g on analyyttinen käyrällä Γ ja sen sisällä, niin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} h_j g(z_j) - \sum_{i=1}^{m} k_i g(w_i).$$

Todistus. Sovelletaan jälleen Residylausetta kuten Lemman 3.2 todistuksessakin. Tarkastellaan integroitavan funktion $F = gf'/f$ nimittäjän nollakohtia ja napoja.

Mikäli funktiolla f on h-kertainen nollakohta pisteessä z_j, voidaan Lemman 3.2 todistuksen nojalla funktio F kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} F(z) = g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z)\left(\frac{h}{(z-z_0)} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\right) \\ &= \frac{g(z)h}{(z-z_0)} + \frac{g(z)f_1'(z)}{f_1(z)}, \end{aligned}$$

missä $h \in \mathbb{N}$. Koska funktio g on analyyttinen sekä f_1 on analyyttinen ja nollasta eroava jossain pisteen z_j avoimessa ympäristössä, on funktion F residy pisteessä z_j määritelmän nojalla $g(z_j)h$. Käymällä samalla tavalla läpi kaikki nollakohdat saadaan kertaluvuilla painotettu residyjen summa $\sum_{j=1}^{n} h_j g(z_j)$.

Mikäli funktiolla f on puolestaan k-kertainen napa pisteessä w_i, voidaan Lemman 3.2 todistuksen nojalla kirjoittaa funktio F muodossa

$$\begin{aligned} F(z) = g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} &= g(z)\left(\frac{-k}{(z-z_0)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)}\right) \\ &= \frac{-g(z)k}{(z-z_0)} + \frac{g(z)f_2'(z)}{f_2(z)}, \end{aligned}$$

missä $k \in \mathbb{N}$. Vastaavalla päättelyllä kuin yllä saadaan funktion F residyksi pisteessä w_i määritelmän nojalla $-g(w_i)k$. Edelleen käymällä läpi kaikki navat w_i saadaan kertaluvuilla painotettu residyjen summa $-\sum_{i=1}^{m} k_i g(w_i)$.

Väite seuraa Residy-lauseesta yhdistämällä saadut tulokset. $\square$

3.2 Kierrosluku

Tarkastellaan suljettua käyrää Γ ja pistettä $z_0 \notin \Gamma$. Haluamme määrittää luvun $n(\Gamma; z_0)$, joka kertoo kuinka monta kertaa käyrä Γ kiertää pisteen z_0. Yleistääksemme määritelmän mielivaltaisille suljetuille käyrille, jotka voivat leikata itseään tai olla negatiivisesti suunnistettuja, tarvitsemme seuraavaa lemmaa.

Lemma 3.6. *Olkoon Γ suljettu polku, joka ei kulje pisteen z_0 kautta. Tällöin integraalin*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

arvo on kokonaisluku.

Todistus. Kirjoitetaan polku Γ parametrien avulla muodossa $\gamma : [a,b] \to \Gamma$. Tällöin kaikilla pisteillä $z \in \Gamma$ pätee $z = \gamma(t)$ jollekin $t \in [a,b] \subset \mathbb{R}$ ja lisäksi $dz = \gamma'(t)dt$. Määritellään funktio $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(\tau) = \int_a^\tau \frac{\gamma\,'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt.$$

Tällöin $\varphi(b)$ on väitteen integraali $2\pi i$-kertaisena. Lasketaan $\varphi(b)$.

Koska φ on integraali, se on jatkuva välillä $a \le \tau \le b$. Soveltamalla Analyysin peruslausetta erikseen integroitavan funktion reaali- ja kompleksiosiin saadaan

$$\varphi'(\tau) = \frac{\gamma\,'(\tau)}{\gamma(\tau)-z_0}$$

kaikkialla, missä integroitava funktio on jatkuva, ts. kaikkialla missä $\gamma\,'(\tau)$ on jatkuva.

Määritellään apufunktio $\Phi : [a,b] \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(t) = (\gamma(t)-z_0)e^{-\varphi(t)}.$$

Tällöin Φ on jatkuva kaikilla $a \le t \le b$, ja

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \gamma\,'(t)e^{-\varphi(t)} - (\gamma(t)-z_0)e^{-\varphi(t)}\varphi'(t)\\ &= \gamma\,'(t)e^{-\varphi(t)} - (\gamma(t)-z_0)e^{-\varphi(t)}\frac{\gamma\,'(t)}{\gamma(t)-z_0}\\ &= \gamma\,'(t)e^{-\varphi(t)} - \gamma\,'(t)e^{-\varphi(t)} = 0\end{aligned}$$

kaikissa pisteissä, joissa derivaatta on olemassa, ts. kaikissa pisteissä lukuunottamatta äärellistä määrää välin $[a,b]$ pisteitä. Näin ollen Φ on vakiofunktio ja

$$\Phi(t) = \Phi(a) = (\gamma(a)-z_0)e^{-\varphi(a)} = \gamma(a)-z_0,$$

sillä $\varphi(a) = 0$. Tämä osoittaa, että

$$e^{\varphi(t)} = \frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(a)-z_0}$$

kaikilla $t \in [a, b]$, ja erityisesti arvolla $t = b$

$$e^{\varphi(b)} = \frac{\gamma(b) - z_0}{\gamma(a) - z_0}.$$

Mutta koska Γ on suljettu käyrä, $\gamma(b) = \gamma(a)$ ja siten $e^{\varphi(b)} = 1$.

Tiedetään kuitenkin, että eksponenttifunktiolle pätee $e^z = 1$ jos ja vain jos z on $2\pi i$:n jokin monikerta. Näin ollen $\varphi(b) = k \cdot 2\pi i$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. □

Huomautus 3.7. Lemmassa 3.6 integroidaan itse asiassa funktion $\log(z-z_0)$ derivaattaa. Kompleksinen logaritmi on kuitenkin moniarvoinen funktio. Integroitaessa esitystä

$$\log(z - z_0) = \log|z - z_0| + i \arg(z - z_0)$$

ei saatu tulos ole yksikäsitteinen, kulma $\arg(z - z_0)$ voidaan nimittäin määrittää vain luvun 2π monikertaa vaille yksikäsitteisesti. Pitämällä integroitava muodossa $1/(z - z_0)$ saadaan integraalin tuloksena luku, jota voidaan tulkita geometrisesti.

Lemman 3.6 tuloksen avulla määritellään kierrosluku seuraavasti.

Määritelmä 3.8. Olkoon Γ suljettu polku, joka ei kulje pisteen z_0 kautta. Tällöin polun Γ *kierrosluku* pisteen z_0 suhteen on kokonaisluku

$$n(\Gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Tarkastellaan kierroslukua pisteen $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ kokonaislukuarvoisena funktiona. Mitä tapahtuu, jos muutetaan hieman pistettä z_0 Lemmassa 3.6?

Lemma 3.9. *Jos Γ on suljettu polku ja pisteet z_0 ja z_1 ovat samassa polun Γ rajaamassa kompleksitason osassa $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, niillä on sama kierrosluku, ts.*

$$n(\Gamma; z_0) = n(\Gamma; z_1).$$

Jos piste z_0 on käyrän Γ rajaaman alueen ulkopuolella, niin $n(\Gamma; z_0) = 0$.

Todistus. Jos käyrä Γ on yksinkertainen, niin Jordanin käyrälauseen nojalla käyrä Γ jakaa kompleksitason kahteen alueeseen. Jos käyrä Γ ei ole yksinkertainen, voidaan käyrä edelleen jakaa leikkauskohtien mukaan äärellisen moneksi Jordanin käyräksi, jotka kukin jakavat kompleksitason kahteen alueeseen. Soveltamalla Jordanin käyrälausetta jokaiseen käyrään erikseen havaitaan, että joukon $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ erilliset osat ovat kaikki alueita.

Osoitetaan, että kierrosluku $n(\Gamma, z)$ on erikseen vakio kaikissa käyrän Γ rajoittamissa joukon $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ osissa. Edellä olleen nojalla tiedetään, että kaikki suljetun käyrän Γ rajaamat kompleksitason osat ovat alueita, ts. avoimia yhtenäisiä joukkoja. Näin ollen joukko

$$Y_k = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma : n(\Gamma; z) = k\}$$

on alueiden äärellisenä yhdisteenä avoin kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Tässä on huomioitava, että myös tyhjä joukko $\emptyset$ on määritelmän nojalla avoin. Lisäksi kierrosluku on yksikäsitteisesti määritelty funktio jokaisessa kompleksitason pisteessä $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, joten piste z kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon Y_k.

Olkoon sitten $D \subset Y_k$ mielivaltainen epätyhjä alue ja $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mielivaltainen alueen D eri pisteistä koostuva jono, joka suppenee kohti pistettä $z_0 \in D$. Tällöin kierroslukufunktiosta muodostettu funktio $f : D \to \mathbb{Z}$,

$$f(z_j) = n(\Gamma; z_j) - k,$$

on vakiofunktiona analyyttinen alueessa D. Edelleen $f(z_j) = 0$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$, sillä jonon pisteille $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset D \subset Y_k$ pätee $n(\Gamma; z_j) = k$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$ joukon Y_k määritelmän nojalla. Näin ollen yksikäsitteisyyslauseen (Lause 2.10) nojalla funktio $f \equiv 0$ alueessa D, siis kierrosluku on sama kaikille alueen D pisteille.

Koska yllä olevassa päättelyssä alue D oli mielivaltainen, kaikissa joukon Y_k alueissa on sama kierrosluku. Vastaava päättely voidaan suorittaa kaikille joukoille $Y_k, k \in \mathbb{Z}$.

Osoitetaan vielä, että käyrän Γ ulkopuolella olevan pisteen suhteen kierrosluku on nolla. Olkoon piste $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ käyrän Γ määräämässä rajoittamattomassa alueessa. Tällöin funktio $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0},$$

on analyyttinen tasossa $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Edelleen Residy-lauseen nojalla $\int_\Gamma f dz = 0$, sillä funktion f napa z_0 ei ole käyrän Γ rajaaman alueen sisäpuolella. Sijoittamalla saatu tulos kierrosluvun määritelmään saadaan $n(\Gamma; z_0) = 0$. $\square$

3.3 Koko väittämä

Laajennetaan aliluvussa 3.1 esitettyä merkintää.

Merkintä 3.10. Olkoon Γ suljettu käyrä ja olkoon funktio f analyyttinen käyrällä Γ ja sen sisällä lukuunottamatta äärellistä määrää napoja. Oletetaan lisäksi, että funktiolla f ei ole nollakohtia käyrällä Γ. Merkitään

$N_{w_0} =$ niiden käyrän Γ sisäpisteiden lukumäärä, jotka funktio f kuvaa pisteelle w_0

Lukumäärä lasketaan kertalukujen mukaan, kuten edellä.

Yhdistämällä edellä olleet tulokset saadaan viimein:

Lause 3.11. (Argumentin periaate) *Olkoon Γ positiivisesti suunnistettu ääriviiva ja olkoon f analyyttinen ja ei-vakio funktio ääriviivalla Γ ja sen rajaaman alueen sisällä lukuunottamatta äärellistä määrää napoja. Olkoon $w_0 \notin f(\Gamma)$ piste kuvatasossa. Tällöin*

$$N_{w_0}(\Gamma) - N_\infty(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = n(f(\Gamma); w_0).$$

Todistus. Soveltamalla kierrosluvun määritelmää käyrään $f(\Gamma)$ saadaan

$$n(f(\Gamma); w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\Gamma)} \frac{dw}{w - w_0},$$

missä muuttuja $w \in f(\Gamma)$. Mutta koska $w = f(z)$, $dw = f'(z)dz$, yhtälö saa muodon

$$n(f(\Gamma); w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)dz}{f(z) - w_0}, \tag{3.2}$$

missä muuttaja z on alkuperäisellä käyrällä Γ.

Tarkastelemalla integraalia havaitaan, että integroitava funktio on funktion $f(z) - w_0$ logaritminen derivaatta, sillä piste w_0 on vakio. Merkitään $F(z) = f(z) - w_0$, jolloin $F'(z) = f'(z)$ ja Lemman 3.2 nojalla

$$N_0(\Gamma) - N_\infty(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F'(z)}{F(z)} dz. \tag{3.3}$$

Siis yhtälö (3.3) kertoo funktion F nollakohtien ja napojen lukumäärien erotuksen ääriviivan Γ sisällä. Nyt kuitenkin $F(z) = 0$, jos ja vain jos $f(z) - w_0 = 0$, josta edelleen $f(z) = w_0$. Lisäksi koska w_0 on vakio, funktiolla $F = f - w_0$ on napa jossain pisteessä, jos ja vain jos funktiolla f on napa kyseisessä pisteessä. Näin ollen yhtälö (3.3) voidaan esittää muodossa

$$N_{w_0}(\Gamma) - N_\infty(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz. \tag{3.4}$$

Väite seuraa yhdistämällä yhtälöt (3.2) ja (3.4). □

Huomautus 3.12. Yleensä lausetta käytetään muodossa, jossa $w_0 = 0$. Nimi Argumentin periaate tulee siitä, että lauseen avulla voidaan tarkastella positiivisesti suunnistetun ääriviivan Γ pisteen z kuvapisteen $f(z)$ argumentin (kulman) $\arg f(z)$ muutosta, kun käydään läpi kaikki käyrän pisteet $z \in \Gamma$. Tämä *argumentin lisäys pitkin käyrää* Γ on sama, kuin kuvakäyrän $f(\Gamma)$ kierrosluku origon suhteen kerrottuna luvulla $2\pi i$.

Havainnollistetaan Argumentin periaatetta seuraavilla kahdella esimerkillä.

Esimerkki 3.13. Olkoon Γ yksikköympyrä ja $f(z) = z^k$, missä k on positiivinen kokonaisluku. Olkoon $w_0 = 0$. Tällöin funktiolla f on k-kertainen nollakohta origossa eikä napoja missään, joten

$$N_0(\Gamma) = k \quad \text{ja} \quad N_\infty(\Gamma) = 0.$$

Kierroslukua tarkasteltaessa havaitaan, että muuttujan z kiertäessä kerran yksikköympyrän, kuvapiste $w = z^k$ kiertää yksikköympyrän w-tasossa k kertaa ja näin ollen kiertää pisteen $w_0 = 0$ yhtämonta kertaa. Saatu tulos on yhtenevä Argumentin periaatteen kanssa:

$$N_0(\Gamma) = k = n(f(\Gamma); 0).$$

Esimerkki 3.14. Olkoon Γ jälleen yksikköympyrä ja olkoon $f(z) = 1/z$. Olkoon $w_0 = 0$. Tällöin $N_0(\Gamma) = 0$ ja $N_\infty(\Gamma) = 1$. Tällöin Argumentin periaatteen nojalla

$$n(f(\Gamma); 0) = 0 - 1 = -1.$$

Miinusmerkin geometrinen tulkinta on, että muuttujan z kiertäessä kerran yksikköympyrän kehän vastapäivään kuvapiste

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \overline{z}$$

kiertää yksikköympyrän $|w| = 1$ myötäpäivään. Kuvaus f kääntää siis yksikkökiekon $|z| \leq 1$ nurinpäin, sillä kaikille kuvapisteille pätee $|1/z| \geq 1$.

4 Sovelluksia

Tarkastellaan luvun 3 päätteeksi esitetyn Argumentin periaatteen muutamia sovelluksia. Argumentin periaate on läheisesti yhteydessä Rouchén lauseeseen, joten tarkastellaan luvun lopuksi myös muutamaa Rouchén lauseeseen liittyvää sovellusta. Aloitetaan ilmeisimmästä sovellustavasta.

4.1 Logaritmiset integraalit

Argumentin periaatetta voidaan hyvin suoraviivaisesti soveltaa logaritmisten integraalien tapauksessa integraalien arvoa laskettaessa.

Esimerkki 4.1. Tarkastellaan funktiota f,

$$f(z) = \frac{z^2(z-1)^3(z+7)^5(z-i)^2e^z}{15(z^2-2z+2)^4(z+2)^8(z-5i)^8},$$

ja ympyrää $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$. Osoittajaa tarkastelemalla nähdään, että funktiolla f on ympyrän C sisällä kaksinkertainen nollakohta pisteessä $z = 0$, kolminkertainen nollakohta pisteessä $z = 1$ ja kaksinkertainen nollakohta pisteessä $z = i$. Näin ollen

$$N_0(C) = 2 + 3 + 2 = 7.$$

Vastaavanlainen tarkastelu nimittäjän kohdalla osoittaa, että ympyrän C sisällä funktiolla f on 8-kertainen napa pisteessä $z = -2$ ja 4-kertaiset navat pisteissä $z = 1 + i$ ja $z = 1 - i$, sillä yhtälöstä

$$z^2 - 2z + 2 = (z-1)^2 + 1 = 0$$

seuraa $z = 1 \pm i$. Siis funktion f napojen lukumäärä ympyrän C sisällä on

$$N_\infty(C) = 8 + 4 + 4 = 16.$$

Argumentin periaatteen nojalla saadaan siten

$$\int_{|z|=3} \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i[N_0(C) - N_\infty(C)] = -18\pi i.$$

Kierrosluku $n(f(C); 0) = -9$, eli kuvakäyrä $f(C)$ kiertää origon yhdeksän kertaa myötäpäivään.

Esimerkki 4.2. Lasketaan arvo integraalille

$$I = \int_{|z|=2} \frac{z+2}{z(z+1)}.$$

Integraali voidaan esittää logaritmisessa muodossa

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3}}{\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}} dz = -\int_{|z|=2} \frac{-(\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3})}{\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}} dz = -\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)},$$

missä

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = \frac{z+1}{z^2}.$$

Koska funktiolla f on ympyrän $|z| = 2$ kaksinkertainen napa pisteessä $z = 0$ ja yksinkertainen nollakohta pisteessä $z = -1$, saadaan Argumentin periaatteen nojalla

$$I = -2\pi i[N_0(C) - N_\infty(C)] = -2\pi i[1 - 2] = 2\pi i.$$

Tässä tapaukseksi kuvakäyrän $f(C)$ kierrosluvuksi kuvatason origon suhteen saadaan 1.

4.2 Nollakohtien arvioinnista

Argumentin periaatetta voidaan käyttää analyyttisten funktioiden nollakohtien lukumäärän ja sijainnin arvioinnissa. Mikäli erityisesti voidaan esittää graafisesti aluetta rajoittavanääriviivan kuvakäyrä, voidaan kierrosluvusta origon suhteen tehdä tarkasteltavan funktion nollakohtia koskevaa päättelyä.

Tarkastellaan seuraavassa muutamia polynomien nollakohtiin liittyviä tuloksia. Polynomeille voidaan todistaa seuraavasti tuttu Algebran peruslause, joskin hieman täydellisemmässä muodossa.

Lause 4.3. (Algebran peruslause) *Muuttujan z n:nnen asteen polynomin $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{4.1}$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n \neq 0$, nollakohtien kertalukujen summa on n.

Todistus. Kirjoitetaan polynomi P muodossa

$$P(z) = a_n z^n [1 + f(z)], \tag{4.2}$$

missä

$$f(z) = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n}.$$

Tällöin funktio f lähenee raja-arvonaan nollaa, kun $|z| \to \infty$. Raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa luku $R > 0$ siten, että

$$|f(z)| < 1, \tag{4.3}$$

kun $|z| \geq R$. Logaritmiseksi derivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{P'(z)}{P(z)} &= \frac{n a_n z^{n-1}[1 + f(z)] + a_n z^n f'(z)}{a_n z^n [1 + f(z)]} \\
&= \frac{n a_n z^{n-1}[1 + f(z)]}{a_n z^n [1 + f(z)]} + \frac{a_n z^n f'(z)}{a_n z^n [1 + f(z)]} \\
&= \frac{n}{z} + \frac{f'(z)}{1 + f(z)}
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{P'(z)}{P(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\left(\frac{n}{z}+\frac{f'(z)}{1+f(z)}\right)dz \\ &= \frac{n}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{1}{z}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{1+f(z)}dz\end{aligned} \tag{4.4}$$

Soveltamalla Argumentin periaatetta yhtälön (4.4) oikean puolen toiseen termiin saadaan, että se vastaa kierroslukua $n(f(|z|=R);-1)$. Nyt kuitenkin R on valittu siten, että epäyhtälö (4.3) toteutuu, ts. funktion f kuvapisteet ovat origokeskisen 1-säteisen ympyrän sisällä, joten piste -1 on kuvakäyrän ulkopuolella ja kierrosluku sen suhteen on nolla.

Soveltamalla edelleen Argumentin periaatetta yhtälön (4.4) oikean puolen ensimmäiseen termiin saadaan yhtälö (4.4) muotoon

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{P'(z)}{P(z)}dz = \frac{n}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{1}{z}dz + n(f(|z|=R);-1) = n.$$

Siis polynomin P nollakohtien ja napojen lukumäärän erotus on n. Mutta koska polynomilla P ei ole napoja kompleksitasossa $\mathbb{C}$, väite seuraa. $\square$

Huomautus 4.4. Edellä siis osoitettiin, että n:nnen asteen polynomilla on täsmälleen n nollakohtaa monikerrat mukaanlukien tavallisen väitteen "ainakin yksi nollakohta" sijaan. Lisäksi todistuksen avulla voidaan määrittää reaaliluku $R > 0$ siten, että kaikki polynomin nollakohdat sijaitsevat kiekossa $|z| \leq R$.

Polynomin nollakohtien summalle pätee seuraava tulos.

Esimerkki 4.5. Olkoon $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polynomi, $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Tällöin integraalin

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{zP'(z)}{P(z)}dz$$

arvo on polynomin P juurien summa, kun $R > 0$ on tarpeeksi suuri. Nimittäin polynomilla P ei ole napoja ja suurilla R:n arvoilla kaikki polynomin P nollakohdat ovat ympyrän $|z| = R$ sisällä. Soveltamalla Lausetta 3.5 saadaan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{zP'(z)}{P(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} h_j z_j,$$

missä z_j on nollakohta ja h_j on nollakohdan kertaluku.

Myöhemmin esiteltävän Rouchén lauseen avulla voidaan arvioida polynomin juurien sijaintia vieläkin tehokkaammin. Rouchén lauseen avulla saadaan myös toisenlainen todistus Algebran peruslauseelle. Tarkastellaan vielä lopuksi sovellettua esimerkkiä säätötekniikan puolelta. Tässä ei rajoituta enää pelkkiin polynomeihin.

Esimerkki 4.6. Takaisinkytketyn säätöjärjestelmän stabiiliuden takaamiseksi täytyy varmistaa, että muotoa $F = 1+P$ olevalla analyyttisellä funktiolla (funktio P on analyyttinen) on kaikki nollakohdat vasemmassa puolitasossa. Tämä ns. *Nyquistin stabiillisuus kriteeri* etenee seuraavasti:

Tarkastellaan ääriviivan $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\Gamma(t) = \begin{cases} re^{i(\pi/2 - t)}, & \text{kun } t \in [0, \pi] \\ \big(\frac{2}{\pi}(t - \pi) - 1\big)ir, & \text{kun } t \in]\pi, 2\pi] \end{cases}$$

rajaamaa aluetta $D \subset \mathbb{C}$, missä $r > 0$. Merkitään luvulla $m \in Z$ kuinka monta kertaa kuvakäyrä $P(\Gamma)$ kiertää pisteen $w_0 = -1$ vastapäivään. Olkoon sitten $n \in \mathbb{Z}$ funktion P sellaisten napojen määrä, joilla on positiiviset reaaliosat. Osoitetaan, että jos suurilla $r > 0$ arvoilla pätee yhtäsuuruus kierrosten m ja napojen n suhteen (ts. residyjen avulla ilmaistuna $m = -n$), niin funktion F nollakohdat ovat vasemmassa puolitasossa. Tällöin järjestelmä on vakaa.

Funktiolla $F = 1 + P$ on nollakohta pisteessä z, jos ja vain jos

$$P(z) = -1.$$

Soveltamalla Argumentin periaatetta esimerkin merkinnöillä ($w_0 = -1$) saadaan

$$N_{-1} - n = m,$$

josta edelleen $N_{-1} = 0$.

Näin ollen funktion F nollakohtien määrä alueen D sisällä on nolla, jolloin kaikki nollakohdat ovat vasemmanpuoleisessa puolitasossa. Järjestelmä on siis vakaa.

Mikäli kuitenkin suurilla arvoilla $r > 0$ käyrä $P(\Gamma)$ kulkee pisteen $w_0 = -1$ kautta, on funktiolla F nollakohta imaginaariakselilla eikä järjestelmän stabiilisuutta sellaisessa tapauksessa voida taata.

4.3 Lokaaleja kuvauksia koskevia tuloksia

Seuraavat tulokset ovat tärkeitä konformikuvausten teoriassa, jonka käsittely tässä kuitenkin sivuutetaan.

Lause 4.7. (Käänteisfunktiolause) *Olkoon funktio f analyyttinen alueessa $D \subset \mathbb{C}$ ja olkoon piste z_0 alueen D piste. Jos funktiolla f on yksinkertainen nollakohta pisteessä z_0, niin on olemassa analyyttinen funktio g, jolle $g(f(z)) = z$ jossain pisteen z_0 ympäristössä.*

Todistus. Olkoot $E = \{z_0 \in D : |z - z_0| < r\}$ ja $C = \partial E = \{z_0 \in D : |z - z_0| = r\}$ jollekin $r > 0$ siten, että

(i) sulkeuma $\overline{E}$ kuuluu alueeseen D, ts. $\overline{E} \subset D$.

(ii) $\overline{E}$ ei sisällä pisteen z_0 lisäksi muita pisteitä z, joille $f(z) = f(z_0)$. Tämä on mahdollista, sillä pisteet z, $f(z) = f(z_0)$ ovat eristettyjä.

Ehdosta (ii) seuraa, että käyrä $f(C)$ ei kulje pisteen $f(z_0) = w_0$ kautta. Olkoon D' se kuvakäyrän rajaaman alueen $\mathbb{C} \setminus f(C)$ komponentti, joka sisältää pisteen w_0. Tällöin kaikille pisteille $w \in D'$ pätee

$$N_w(C) = n(f(C), w) = n(f(C), w_0) = N_{w_0}(C) = 1.$$

Tässä ensimmäinen ja kolmas yhtäsuuruus seuraa Argumentin periaatteesta, toinen Lemmasta 3.9 ja neljäs ehdosta (ii). Siis jokaiselle alueen D' pistelle w kuvautuu täsmälleen yksi alkio.

Tarkastellaan sitten joukkoa $f^{-1}(D') \cap D$, joka on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin. Joukko $f^{-1}(D')$ on nimittäin avoin jatkuvan funktion f avoimen kuvajoukon alkukuvana. Erityisesti piste z_0 kuuluu joukkoon $f^{-1}(D') \cap D$ ja funktio f kuvaa joukon bijektiivisesti alueelle D'. Valitsemalla lähtöjoukoksi joukko $D_0 = f^{-1}(D') \cap D$ saadaan bijektio $f : D_0 \to D'$.

Osoitetaan vielä, että käänteisfunktio $g = f^{-1}$ on analyyttinen. Oletuksen nojalla funktiolla f on yksinkertainen nollakohta pistessä z_0, joten $f'(z_0) \neq 0$. Edelleen, funktio f' ei saavuta arvoa nolla alueessa D_0, sillä tällöin funktiolla f on m-kertainen nollakohta kyseisessä pisteessä, $m > 1$, eikä se enää ole bijektio. Olkoon jono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alueen $D_0\backslash\{a_0\}$ pisteitä supeten kohti pistettä a_0. Tällöin

$$\frac{g(a_n) - g(a_0)}{a_n - a_0} = \frac{g(a_n) - g(a_0)}{f(g(a_n)) - f(g(a_0))} = \left[\frac{f(g(a_n)) - f(g(a_0))}{g(a_n) - g(a_0)}\right]^{-1}. \tag{4.5}$$

Tässä $g(a_n) \neq g(a_0)$, sillä funktio g on bijektio ja $a_n \neq a_0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kuvaus g on jatkuva pisteessä a_0, joten yhtälön (4.5) sulkulauseke lähenee derivaattaa $f'(g(a_0))$, kun $n \to \infty$. Koska kuitenkin $f'(g(a_0)) \neq 0$, funktio $g = f^{-1}$ on analyyttinen alueessa D'. □

Huomautus 4.8. Itse asiassa voidaan osoittaa, että käänteisfunktio on muotoa

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz,$$

missä $C_0 \subset D_0$ on pisteen z sisältävä ääriviiva ja piste w on alueen D' piste [4, ss. 233-234].

Hyvin pitkälti samalla tavalla voidaan todistaa myös seuraava tulos.

Lause 4.9. *Olkoon f alueessa $D \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja olkoon z_0 alueen D piste. Jos funktiolla f on k-kertainen nollakohta pisteessä z_0, $k > 1$, niin funktio f kuvaa k pistettä yhdelle pisteelle pisteen z_0 ympäristössä.*

Todistus. Valitaan joukot E ja C kuten Lauseen 4.7 todistuksessa siten, että $\overline{E}$ ei sisällä pisteen z_0 lisäksi muita pisteitä z, joille $f(z) = f(z_0)$ tai joilla on m-kertainen nollakohta jossakin alueen $\overline{E}$ pisteessä, $m > 1$. Määritellään lisäksi alue $D' \subset \mathbb{C}$ kuten Lauseen 4.7 todistuksessa. Tällöin kaikille pisteille $w \in D'$ pätee

$$N_w(C) = n(f(C), w) = n(f(C), w_0) = N_{w_0}(C) = k, \tag{4.6}$$

sillä piste $z = z_0$ on k-kertainen ratkaisu yhtälölle

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^k f_1(z) = 0,$$

missä f_1 on analyyttinen funktio ja $f_1(z_0) \neq 0$.Tässä jälleen yhtälön (4.6) ensimmäinen ja kolmas yhtäsuuruus seuraa Argumentin periaatteesta, toinen Lemmasta 3.9 ja neljäs ehdosta (ii). Siis jokaiselle alueen D' pistelle w kuvautuu k alkiota.

Tarkastellaan sitten joukkoa $f^{-1}(D') \cap D$, joka on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin. Joukko $f^{-1}(D')$ on nimittäin avoin jatkuvan funktion f avoimen kuvajoukon alkukuvana. Erityisesti piste z_0 kuuluu joukkoon $f^{-1}(D') \cap D$. Valitaan lähtöjoukoksi jälleen joukko $D_0 = f^{-1}(D') \cap D$ ja tarkastellaan sitä tarkemmin.

Jos pisteelle $z \in D_0$ pätee $f(z) = f(z_0)$, niin tällöin $z = z_0$ joukon E valinnasta johtuen. Olkoon sitten piste $w \in f(D_0) \subset D'$. Tällöin yhtälön (4.6) nojalla $N_w(C) = k$, jolloin on olemassa pisteet $z_j \in D_0$, joille $f(z_j) = w$ kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Lisäksi kyseiset pisteet ovat eri pisteitä. Jos nimittäin $z_m = z_n$ joillekin $m, n \in \{1, \ldots, k\}$, niin silloin yhtälöstä

$$f(z) - w = (z - z_m)^2 f_1(z),$$

missä f_1 on analyyttinen, seuraa että kyseisellä funktiolla on kaksinkertainen nollakohta pisteessä z_m. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä alue D valittiin siten, että siinä funktiolla f on ainoastaan yksi moninkertainen nollakohta ja se on pisteessä z_0. □

Lauseen 4.7 todistusta mukaillen voidaan osoittaa myös

Lause 4.10. (Avoimen kuvauksen lause) *Ei-vakio analyyttinen funktio kuvaa avoimen joukon avoimelle joukolle.*

Todistus. Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ avoin ja olkoon f joukossa D analyyttinen funktio. Olkoon lisäksi $z_0 \in D$ siten, että $f(z_0) = w_0 \in f(D)$. Koska f ei ole vakiofunktio, voidaan valita pisteen z_0 avoin ympäristö E ja sen reuna C sekä kuvajoukko D' kuten Lauseessa 4.7. Tällöin joukko D' on pisteen w_0 avoin ympäristö ja $D' \subset f(E) \subset f(D)$. Siis piste w_0 on joukon $f(D)$ sisäpiste, joten $f(D)$ on avoin. □

Seuraavassa kappaleessa avoimen kuvauksen lause todistetaan Rouchén lauseen avulla. Tarkastellaan tällöin myös avoimen kuvauksen lauseen seurauksia.

4.4 Rouchén lause

Tarkastellaan seuraavaksi "pienen häiriön" aiheuttamaa muutosta annetussa analyyttisessä kuvauksessa f, toisin sanoen muotoa $F = f + h$ olevia analyyttisiä funktioita. Osoittautuu, että jos "häiriöfunktio" h on tarpeeksi pieni tietyssä mielessä, niin funktioilla F ja f on sama määrä nollakohtia suljetun käyrän Γ sisäpuolella. Näin päädymme hyvin käyttökelpoiseen Rouchén lauseeseen.

Lause 4.11. (Rouchén lause) *Olkoon $D \subset \mathbb{C}$ alue ja olkoon Γ alueen D Jordanin käyrä siten, että käyrän sisäosa kuuluu alueeseen D. Olkoon funktio f analyyttinen alueessa D sekä nollasta eroava käyrällä Γ ja olkoon funktio h analyyttinen alueessa D siten, että*

$$|h(\xi)| < |f(\xi)| \quad \textit{kaikilla } \xi \in \Gamma.$$

Tällöin funktioilla f ja $F = f + h$ on yhtä monta nollakohtaa käyrän Γ sisällä.

Todistus. Kirjoitetaan funktio F muodossa

$$F(z) = f(z) + h(z) = f(z)\left[1 + \frac{h(z)}{f(z)}\right] = f(z)g(z),$$

missä funktio g on analyyttinen alueessa D lukuunottamatta mahdollisia napoja, jotka ovat funktion f nollakohdissa. Edelleen funktio g on nollasta eroava käyrällä Γ. Nimittäin oletuksen nojalla kaikilla $\xi \in \Gamma$ pätee epäyhtälö

$$\left|\frac{h(\xi)}{f(\xi)}\right| < 1,$$

joka edelleen voidaan esittää muodossa

$$\left|\frac{h(\xi)}{f(\xi)} + 1 - 1\right| < 1.$$

Ottamalla nyt käyttöön funktion g merkintä saadaan

$$|g(\xi) - 1| < 1. \tag{4.7}$$

Kuvapisteet $g(\xi)$ ovat siis 1-säteisessä 1-keskisessä avoimessa kiekossa, johon origo ei kuulu. Tällöin myöskään funktiolla $F = fg$ ei ole nollakohtia käyrällä Γ.

Argumentin periaatteen nojalla funktion F nollakohtien lukumäärä käyrän Γ sisällä saadaan yhtälöstä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F'(\xi)}{F(\xi)}d\xi &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi)}{f(\xi)g(\xi)}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'(\xi)}{g(\xi)}d\xi \end{aligned} \tag{4.8}$$

Koska yhtälön (4.8) oikean puolen ensimmäinen termi kertoo funktion f nollakohtien lukumäärän käyrän Γ sisäpuolella, riittää lauseen todistamiseksi osoittaa että toinen termi häviää.

Yhtälön toinen termi vastaa määritelmän mukaan kierroslukua $n(g(\Gamma); 0)$. Epäyhtälön (4.7) nojalla kuvapisteet $g(\xi)$ ovat 1-säteisessä 1-keskisessä avoimessa pallossa, johon origo ei kuulu. Näin ollen käyrä $g(\Gamma)$ ei kierrä origoa w-tasossa, jolloin $n(g(\Gamma); 0) = 0$ ja Argumentin periaatteen nojalla termi häviää. $\square$

Huomautus 4.12. Rouchén lauseen oletuksessa $|h(\xi)| < |f(\xi)|$ kaikilla $\xi \in \Gamma$ epäyhtälön täytyy olla aito. Nimittäin ehdolla $|h(\xi)| \leq |f(\xi)|$ voidaan valita $h = -f$, jolloin

$$F = f + h = f + (-f) \equiv 0$$

käyrän Γ rajaaman alueen sisällä riippumatta funktion f nollakohdista.

Rouchén lauseen avulla saadaan välittömästi uusi todistus Algebran peruslauseelle. Tarkastellaan polynomia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

missä $n \in \mathbb{N}$ ja $a_n \neq 0$. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 + \frac{1}{a_n} \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right),$$

kun z on nollasta eroava. Ympyrällä $|z| = r > 1$ saadaan siten arvio

$$\begin{aligned} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| &= \frac{1}{|a_n|} \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{1}{|a_n|} \left(\left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \\ &= \frac{1}{|a_n|} \left(\frac{|a_{n-1}|}{r} + \cdots + \frac{|a_0|}{r^n} \right) \leq \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_n| r} < 1, \end{aligned}$$

kun valitaan

$$r > \max \left\{ \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_n|}, 1 \right\}.$$

Toisin sanoen ympyrällä $|z| = r$ pätee

$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \frac{P(z) - a_n z^n}{a_n z^n} \right| < 1,$$

josta edelleen

$$|P(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|.$$

Koska funktiolla $a_n z^n$ on n nollakohtaa (kaikki origossa) ympyrän $|z| = r$ sisällä, Rouchén lauseen perusteella myös funktiolla

$$\big(P(z) - a_n z^n \big) + a_n z^n = P(z)$$

on n nollakohtaa ympyrän $|z| = r$ sisällä.

Huomautus 4.13. Tämä Algebran peruslauseen todistus on Lauseen 4.3 todistuksen lailla hyvin informatiivinen, sillä se osoittaa, että n:nnen asteen polynomilla on n nollakohtaa eikä "ainakin yksi nollakohta". Lisäksi polynomin juurien moduleille saadaan yläraja polynomin kertoimien avulla, kaikki juuret nimittäin sijaitsevat kiekossa

$$|z| \leq \frac{|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|a_n|} \quad (|z| > 1).$$

Toinen Rouchén lauseen sovellus on polynomien nollakohtien sijainnin arvioiminen. Havainnollistetaan tilannetta kahden esimerkin avulla.

Esimerkki 4.14. Tarkastellaan polynomin $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$p(z) = 6z^4 + z^3 - 2z^2 + z - 1,$$

nollakohtien lukumäärää yksikköympyrän $|z| = 1$ sisällä. Kirjoitetaan polynomi p muodossa

$$p(z) = f(z) + h(z),$$

missä $f(z) = 6z^4$ ja $h(z) = z^3 - 2z^2 + z - 1$. Tällöin ympyrällä $|z| = 1$

$$|f(z)| = |6z^4| = 6|z|^4 = 6$$

ja

$$|h(z)| = |z^3 - 2z^2 + z - 1| \leq |z^3| + |2z^2| + |z| + 1 = 5 < 6 = |f(z)|.$$

Rouchen lauseen nojalla polynomeilla f ja p on sama määrä nollakohtia yksikköympyrän sisällä. Koska polynomilla f on 4 nollakohtaa ympyrän $|z| = 1$ sisällä, polynomilla p on 4 nollakohtaa kiekossa $|z| < 1$.

Esimerkki 4.15. Osoitetaan, että polynomin $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$P(z) = z^5 + 6z^2 + 2z + 10,$$

kaikki 5 nollakohtaa sijaitsevat ympyrärenkaassa $1 < |z| < 3$.

Algebran peruslauseen nojalla polynomilla P on 5 nollakohtaa kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Osoitetaan väite tarkastelemalla erikseen ympyröitä $|z| = 1$ ja $|z| = 3$.

Olkoot f ja g polynomeja siten, että $f(z) = z^5 + 6z^2 + 2z$ ja $g(z) = 10$. Yksikköympyrällä $|z| = 1$ pätee

$$|f(z)| \leq |z^5| + 6|z^3| + 2|z| = 9 < 10 = |g(z)|.$$

Tällöin polynomilla P, $P(z) = f(z) + g(z)$, on Rouchén lauseen nojalla sama määrä nollakohtia kiekossa $|z| < 1$ kuin polynomilla g, siis nolla. Koska

$$|P(z)| \geq 10 - |z^5 + 6z^3 + 2z| \geq 10 - |z|^5 - 6|z|^3 - 2|z| = 1,$$

kun $|z| = 1$, polynomilla P ei ole nollakohtia yksikköympyrällä.

Valitaan sitten polynomit f ja g siten, että $f(z) = z^5$ ja $g(z) = 6z^3 + 2z + 10$. Ympyrällä $|z| = 3$ pätee

$$|g(z)| \leq 6 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 10 = 178 < 243 = 3^5 = |f(z)|.$$

Soveltamalla Rouchén lausetta polynomeihin f ja P saadaan, että kaikki polynomin P nollakohdat sijaitsevat kiekossa $|z| < 3$, siis yllä olevan perusteella ympyrärenkaassa $1 < |z| < 3$.

Huomautus 4.16. Soveltamalla Huomautusta 4.13 saadaan edellisten esimerkkien polynomien juurien moduleille rajat

$$\frac{|1|+|-2|+|1|+|-1|}{|6|}=\frac{5}{6} \quad \text{ja} \quad \frac{|6|+|2|+|10|}{|1|}=18.$$

Jälkimmäisemmässä tapauksessa saatu yläraja on huomattavasti suurempi kuin mitä todellisuudessa.

Rouchén lause on hyvin käyttökelpoinen työkalu, jonka avulla voidaan edelleen osoittaa muita oleellisia tuloksia. Tarkastellaan seuraavaa Brouverin kiintopistelausetta, jonka eräs muoto on seuraava: olkoon $g : \overline{D} \to \overline{D}$ jatkuva funktio, joka kuvaa suljetun kiekon $\overline{D}$ itselleen. Tällöin funktiolla g on ainakin yksi kiintopiste, ts. on olemassa ainakin yksi $z_0 \in \overline{D}$, jolle pätee $g(z_0) = z_0$. Esimerkiksi kiekon rotaatiossa kiekon keskipisteen suhteen keskipiste on kiintopiste.

Todistetaan seuraavaksi hieman rajoittuneempi väittämä analyyttisille funktioille.

Lause 4.17. *Olkoon g analyyttinen funktio, joka kuvaa suljetun kiekon $|z| \leq r$ avoimelle kiekolle $|z| < r$, missä $r > 0$. Tällöin funktiolla g on täsmälleen yksi kiintopiste kiekossa $|z| < r$.*

Todistus. Olkoot $f(z) = -z$ ja $F(z) = g(z) - z$. Tällöin

$$h(z) = F(z) - f(z) = g(z)$$

ja $|g(\xi)| < |\xi|$ ympyrällä $|z| = r$, sillä oletuksen mukaan funktio g kuvaa suljetun kiekon $|z| \leq r$ vastaavaksi avoimeksi kiekoksi. Lisäksi selvästi $f(\xi) \neq 0$ ympyrällä $|z| = r$. Rouchén lauseen nojalla funktioilla f ja F on sama määrä nollakohtia kiekossa $|z| < r$. Funktiolla f on kuitenkin vain yksi nollakohta kiekossa $|z| < r$, nimittäin origo. Tällöin yhtälön

$$F(z) = g(z) - z = 0$$

ratkaisu on etsitty kiintopiste. □

Rouchén lauseen avulla voidaan todistaa seuraava funktiojonoa koskeva tulos.

Lause 4.18. (Hurwitzin lause) *Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono ääriviivalla $C \subset \mathbb{C}$ ja sen sisällä analyyttisiä funktioita, joka suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota f ääriviivalla C ja sen rajaaman alueen kaikissa kompakteissa osajoukoissa. Jos funktiolla f ei ole nollakohtia ääriviivalla C, sen nollakohtien määrä ääriviivan C sisällä on sama kuin funktion f_n nollakohtien määrä ääriviivan C sisällä, kun n on tarpeeksi suuri.*

Todistus. Lauseen 2.12 nojalla rajafunktio f on analyyttinen ääriviivalla C ja sen sisällä. Merkitään luvulla $m > 0$ funktion $|f|$ minimiä ääriviivalla C. Funktiojonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tasaisen suppenemisen nojalla on olemassa luku $N_m \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|,$$

kun $n > N_m$ ääriviivalla C. Tällöin funktion f nollakohtien lukumäärä ääriviivan C sisällä on Rouchen lauseen nojalla yhtäsuuri kuin funktion

$$f(z) + \big(f_n(z) - f(z)\big) = f_n(z)$$

nollakohtien määrä, kun $n > N_m$. Väite seuraa. $\square$

Lause 4.19. *Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jono ääriviivalla $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ja sen sisällä analyyttisiä injektiivisiä funktioita siten, että jono $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti kohti rajafunktiota f. Tällöin rajafunktio f on joko vakio tai injektiivinen.*

Todistus. Olkoon $f(z_1) = f(z_2) = a$ joillekin ääriviivan Γ rajaaman alueen $D \subset \mathbb{C}$ sisäpisteille $z_1 \neq z_2$. Jos $f \not\equiv a$, niin Hurwitzin lauseen nojalla funktiolla $f_n - a$ on ainakin yksi nollakohta ympäristöissä $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| < \delta\} \subset D$ ja $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_2| < \delta\} \subset D$ tarpeeksi suurella n:n arvolla, kun säteelle δ pätee $0 < 2\delta < |z_1 - z_2|$. Tämä on ristiriita jonon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injektiivisyyden kanssa. $\square$

Viimeisenä Rouchén lauseen sovelluksena todistetaan avoimen kuvauksen lause. Todistuksen idea on olennaisesti sama kuin aiemmassakin avoimen kuvauksen lauseen todistuksessa.

Lause 4.20. (Avoimen kuvauksen lause) *Ei-vakio analyyttinen funktio kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.*

Todistus. Olkoon funktio f analyyttinen pisteessä $z = z_0$ ja merkitään pisteen z_0 kuvapistettä funktion f suhteen $w_0 = f(z_0)$. Täytyy osoittaa, että pisteen z_0 tarpeeksi pienen ympäristön kuva sisältää kuvapisteen w_0 ympäristön. Tätä varten valitaan luku $\delta > 0$ siten, että funktio F,

$$F(z) = f(z) - w_0,$$

on analyyttinen kiekossa $|z-z_0| \leq \delta$ ja sillä ei ole nollakohtia ympyrällä $|z-z_0| = \delta$. Tämä on mahdollista yksikäsitteisyyslauseen nojalla (Lause 2.10). Olkoon luku m funktion $|F|$ minimiarvo ympyrällä $|z - z_0| = \delta$. Osoitetaan, että kiekon $|z - z_0| < \delta$ kuva funktiossa f sisältää kiekon $|w - w_0| < m$.

Valitaan mielivaltainen piste w_1 kiekosta $|w - w_0| < m$. Tällöin ympyrällä $|z - z_0| = \delta$ pätee

$$|w_0 - w_1| < m \leq |f(z) - w_0|.$$

Rouchén lauseen nojalla funktiolla F_1,

$$F_1(z) = (f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = f(z) - w_1,$$

on sama määrä nollakohtia kiekossa $|z - z_0| < \delta$ kuin funktiolla F. Koska funktiolla F on ainakin yksi nollakohta (nimittäin pisteessä z_0), myös funktiolla F_1 on ainakin yksi nollakohta. Näin ollen funktio f saa arvon

$$f(z) = w_1$$

ainakin kerran. Koska piste w_1 valittiin mielivaltaisesti, kiekon $|z - z_0| < \delta$ kuvan täytyy sisältää kaikki kiekon $|w - w_0| < m$ pisteet. $\square$

Seuraus 4.21. *Ei-vakio analyyttinen funktio kuvaa alueen alueeksi.*

Todistus. Alue määriteltiin avoimena yhtenäisenä joukkona. Lauseen valossa riittää osoittaa, että analyyttinen funktio kuvaa yhtenäiset joukot yhtenäisiksi joukoiksi. Tämä kuitenkin seuraa tiedosta, että analyyttinen funktio on jatkuva ja yhtenäisen joukon jatkuva kuvajoukko on yhtenäinen. □

Seuraus 4.22. *Jos funktio f on analyyttinen alueessa D ja jos jokin funktioista Re f, Im f, $|f|$ tai Arg f on vakio, niin funktio f on myös vakio.*

Todistus. Oletuksista seuraa, että alueen D kuva $f(D)$ on vastaavasti jokin seuraavista vaihtoehdoista: reaaliakselin osajoukko, imaginaariakselin osajoukko, ympyrän osajoukko tai kompleksitason suoran osajoukko. Mikään vaihtoehtojen joukoista ei kuitenkaan ole avoin, jolloin väite seuraa avoimen kuvauksen lauseesta. □

Huomautus 4.23. Lauseen 4.20 väite ei kuitenkaa päde suljetuille joukoille, ts. analyyttinen vakiosta eroava funktio ei kuitenkaan kuvaa suljettuja joukkoja suljetuiksi joukoiksi. Tämä nähdään esimerkiksi tarkastelemalla eksponenttifunktiota $f(z) = e^z$. Funktio f on tunnetusti kokonainen ja määritelty koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$, joka on määritelmän mukaan suljettu joukko. Kuitenkin kompleksitason kuvajoukko funktion f suhteen on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, joka ei ole suljettu.

Avoimen kuvauksen lauseen avulla saadaan lyhyt todistus maksimiperiaatteelle. Soveltamalla sopivasti maksimiperiaatetta saadaan samalla todistus myös minimiperiaatteelle.

Lause 4.24. (Maksimiperiaate) *Jos funktio f on analyyttinen rajoitetussa alueessa D ja jatkuva alueen D sulkeumassa, niin funktio $|f|$ saavuttaa maksimiarvonsa alueen D reunalla. Lisäksi jos funktio $|f|$ saavuttaa maksimiarvonsa alueen D sisällä, funktio f on vakio.*

Todistus. Koska alue D on rajoitettu, on sulkeuma $\overline{D}$ kompakti joukko. Näin ollen koska $|f|$ on jatkuva reaalifunktio sulkeumassa $\overline{D}$, saavuttaa se maksimiarvonsa jossakin sulkeuman pisteessä z_0. Osoitetaan, että piste z_0 ei voi olla sisäpiste, jolloin maksimi saavutetaan alueen reunalla.

Olkoon z_0 alueen D mielivaltainen sisäpiste. Jos funktio f ei ole vakio, avoimen kuvauksen lauseen mukaan funktio f kuvaa z_0-keskisen δ-säteisen kiekon kuvatason avoimeksi kiekoksi, joka sisältää $f(z_0)$-keskisen m-säteisen kiekon. Tässä reaalivakiot $\delta > 0$ ja $m > 0$ on valittu samalla tavalla kuin avoimen kuvauksen lauseen todistuksessa. Käytetään kuvapisteelle $f(z_0)$ polaariesitystä

$$f(z_0) = Re^{i\theta_0},$$

missä luku $R > 0$ ja $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ on vastaava kulma. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitsemalla alueen D piste z' siten, että kuvapisteelle pätee

$$f(z') = (R + \varepsilon)e^{i\theta_0},$$

nähdään että

$$|f(z')| = R + \varepsilon > R = |f(z_0)|.$$

Näin ollen pisteessä z_0 ei saavuteta maksimia funktiolle $|f|$. $\square$

Lause 4.25. (Minimiperiaate) *Olkoon funktio f analyyttinen alueessa D ja oletetaan, että funktio f on nollasta eroava alueessa D. Tällöin funktio $|f|$ voi saavuttaa minimiarvonsa alueessa D vain jos se on vakio. Jos lisäksi funktio f on jatkuva sulkeumassa $\overline{D}$ ja sulkeuma $\overline{D}$ on kompakti, niin funktio $|f|$ saavuttaa minimiarvonsa sulkeuman $\overline{D}$ reunalla.*

Todistus. Oletuksien mukaan kaikille alueen D pisteille z on voimassa $f(z) \neq 0$, joten funktio $1/f$ on analyyttinen alueessa D. Funktio $|f|$ saavuttaa miniminsä alueen D pisteessä z_0 jos ja vain jos funktio $1/|f|$ saavuttaa maksiminsa pisteessä z_0. Väite seuraa soveltamalla maksimiperiaatetta funktioon $1/|f|$. $\square$

Todistetaan luvun lopuksi vielä maksimiperiaatetta soveltaen Schwarzin lemma.

Lemma 4.26. (Schwarzin lemma) *Olkoon funktio f analyyttinen kiekossa $|z| < R$ jollekin luvulle $R > 0$ ja $f(0) = 0$. Jos kiekossa $|z| < R$ pätee $|f(z)| \leq M$, niin*

$$|f'(0)| \leq \frac{M}{R} \quad \textit{sekä} \quad |f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$$

kiekossa $|z| < R$. Yhtäsuuruus on voimassa vain jos funktio f on muotoa

$$f(z) = \left(\frac{M}{R}\right) e^{i\alpha} z,$$

missä $\alpha \in \mathbb{R}$.

Todistus. Koska $f(0) = 0$, voidaan kirjoittaa funktio f muodossa $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$. Määritellään funktio $g : \Delta \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{kun } 0 < |z| < R \\ f'(0), & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Tällöin funktio g on analyyttinen kiekossa $|z| < R$. Koska $|f(z)| \leq M$ kaikilla $|z| < R$, kaikille positiivisille reaaliluvuille $r < R$ pätee

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Soveltamalla maksimiperiaatetta funktioon g saadaan $|g(z)| \leq \frac{M}{r}$ kaikille $|z| < r$, missä $0 < r < R$. Viemällä luku r mielivaltaisen lähelle lukua R saadaan

$$|g(z)| \leq \lim_{r \to R} \frac{M}{r} = \frac{M}{R}$$

kaikilla $|z| < R$, josta edelleen

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|.$$

Lisäksi $|f'(0)| = |g(0)| \leq \frac{M}{R}$.

Tapauksissa $|f'(0)| = M/R$ tai $|f(b)| = (M/R)|b|$ jollekin kompleksiluvulle $0 < |b| < R$ saadaan funktion g määritelmän mukaan vastaavasti $|g(0)| = M/R$ tai $|g(b)| = M/R$. Näin ollen funktio g saavuttaa maksiminsa kiekossa $|z| < R$, joten se on vakiofunktio maksimiperiaatteen nojalla. Väite seuraa. $\square$

Viitteet

[1] Ash, R. B. *Complex Variables.* Academic Press Inc., New York, 1971.

[2] Flanigan, F. J. *Complex Variables, Harmonic and Analytic Functions.* Dover Publications Inc., New York, 1983.

[3] Fulks, W. *Complex Variables, An Introduction.* Marcel Dekker Inc., New York, 1993.

[4] Gamelin, T. W. *Complex Analysis.* Springer-Verlag New York Inc., New York, 2001.

[5] Krantz, S. G. *A Guide To Complex Variables.* The Mathematical Association of America, Yhdysvallat, 2008.

[6] Nevanlinna, R. ja Paatero V. *Funktioteoria.* Otava, Keuruu, 1971.

[7] Ponnusamy, S. ja Silverman, H. *Complex Variables With Applications.* Birkhäuser, Boston, 2006.