3317161 Topologia

Rauno Aulaskari
LaTeX-käännös
Marko Lamminsalo
Itä-Suomen yliopisto
18. joulukuuta 2010

Sisältö

Lukijalle

Tämä on Itä-Suomen Yliopiston Joensuun kampuksella luennoitavan kurssin Topologia luentorunko. Sisältö ja esitysjärjestys perustuvat suurelta osin Jussi Väisälän kirjaan *Topologia II* (Limes ry, Helsinki 1981). Mahdolliset kirjoitusvirheet ovat kuitenkin kääntäjän vastuulla.

I Peruskäsitteet

1. Topologinen avaruus

1.1. **Kertausta.** Olkoon X joukko. Kokoelma T X:n osajoukkoja on X:n *topologia*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa

(1) T sisältää jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet
(2) T sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset
(3) $\emptyset \in T$ ja $X \in T$.

Ehto (2) on yhtäpitävä seuraavan ehdon kanssa:

(2') Jos $U \in T$ ja $V \in T$, niin $U \cap V \in T$.

X joukko, T on X:n topologia $\Rightarrow$ Pari (X, T) on *topologinen avaruus*, lyhyemmin voidaan sanoa, että X on topologinen avaruus tai X on avaruus.

Kokoelman T jäseniä sanotaan avaruuden (X, T) *avoimiksi joukoiksi*. Ehto (1) $\Rightarrow$ avoimien joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ovat avoimia. Ehto (2) $\Rightarrow$ avoimien joukkojen äärelliset leikkaukset ovat avoimia. Jos $U \subset X$ ja U on avoin, merkitään $U \overset{\circ}{\subset} X$ (o=open) .

Olkoot T_1 ja T_2 X:n topologioita. Jos $T_1 \subset T_2$, niin T_1 on *karkeampi* kuin T_2 ja vastaavasti T_2 on *hienompi* kuin T_1. Joukon X potenssijoukko on $potX = \{A : A \subset X\}$.

1.2. **Esimerkkejä.** 1. Joukon X *diskreetti* topologia on $T_{dis} = potX$. Se on hienoin kaikista X:n topologioista. Avaruus (X, T) on diskreetti, jos $T = T_{dis}$.
2. Avaruuden X *minitopologia* on $T_{mini} = \{X, \emptyset\}$. Se on karkein kaikista X:n topologioista.
3. Reaaliakselin $\mathbb{R}^1 (= \mathbb{R})$ *tavallinen* topologia saadaan määrittelemällä $U \subset \mathbb{R}^1$ avoimeksi, jos $\forall\ x \in U\ \exists\ r > 0$ siten, että väli $(x - r, x + r) \subset U$.
4. Olkoon d metriikka joukossa X. Tällöin d indusoi X:ssä topologian T_d. Joukko $U \subset X$ on T_d:n jäsen $\Leftrightarrow \forall\ x \in U\ \exists$ kuulaympäristö

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \subset U.$$

Jos $X = \mathbb{R}^n$ ja d euklidinen metriikka, on T_d $\mathbb{R}^n$:n *tavallinen* topologia. Tapauksessa $n = 1$ saadaan edellinen esimerkki. Ellei toisin mainita, käytetään metrisissä avaruuksissa metriikan indusoimaa ja $\mathbb{R}^n$:ssä tavallista topologiaa.

1.3. **Kertausta.** (X, T) annettu topologinen avaruus. X:n alkioita sanotaan X:n *pisteiksi*. Pisteen $x \in X$ *ympäristö* on avoin joukko $U \subset X$, joka sisältää x:n. Joukon $A \subset X$ ympäristö on avoin joukko, joka sisältää A:n.

1.4. **Lause.** Joukko $U \subset X$ on avoin $\Leftrightarrow$ U:n jokaisella pisteellä x on ympäristö $V(x) \subset U$.

Todistus.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että U on avoin
$\Rightarrow$ U on jokaisen pisteensä ympäristö
$\Rightarrow$ voidaan valita $V(x) = U \ \forall \ x \in U$.

($\Leftarrow$) Olkoon lauseen ehto voimassa ja olkoon $x \in U$ mielivaltainen piste
$\Rightarrow \exists$ ympäristö $V(x) \subset U$
$\Rightarrow x \in V(x) \subset U$
$\Rightarrow U = \cup_{x \in U}\{x\} \subset \cup_{x \in U} V(x) \subset U$
$\Rightarrow U = \cup_{x \in U} V(x)$ on avoin.

$\square$

1.5. **Kertausta.** (X, T) annettu avaruus. Joukko $F \subset X$ on *suljettu*, jos sen komplementti $X \setminus F$ on avoin. Suljettujen joukkojen mielivaltaiset leikkaukset ja äärelliset yhdisteet ovat suljettuja. Joukot X ja $\emptyset$ ovat aina suljettuja. Jos $F \subset X$ ja F on suljettu, merkitään $F \Subset X$ (c=closed).

Olkoon $A \subset X$ ja $x \in X$ piste. Piste x on A:n *kosketuspiste*, jos jokaisessa x:n ympäristössä on jokin A:n piste. Jos jokaisessa x:n ympäristössä on jokin A:n piste $y \neq x$, niin x on A:n *kasautumispiste*. Siis A:n kosketuspisteitä ovat

(1) A:n pisteet ja
(2) A:n kasautumispisteet.

Piste voi olla yhtaikaa A:n piste ja sen kasautumispiste. Jos piste $a \in A$ ei ole A:n kasautumispiste, sillä on sellainen ympäristö U, että $U \cap A = \{a\}$. Tälläista pistettä sanotaan A:n *eristetyksi pisteeksi*.

Joukon $A \subset X$ kosketuspisteiden joukko on A:n *sulkeuma*, jolle käytetään merkintää $\overline{A}$ tai clA (cl=closure). Vaihtoehtoisesti voidaan $\overline{A}$ määritellä pienimpänä X:n suljettuna joukkona, joka sisältää A:n. Joukko A on suljettu täsmälleen silloin kun $\overline{A} = A$ eli kun A sisältää kaikki kasautumispisteensä. Sulkeumalla on seuraavat ominaisuudet:

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) Jos $A \subset B$, niin $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Piste $x \in X$ on joukon $A \subset X$ *sisäpiste*, jos x:llä on ympäristö, joka sisältyy A:han. Jos x:llä on on ympäristö, joka ei kohtaa A:ta, on x A:n *ulkopiste*. Piste, joka ei ole A:n sisä- eikä ulkopiste, on A:n *reunapiste*. Siis x on A:n reunapiste $\Leftrightarrow$ jokainen x:n ympäristö kohtaa sekä A:n että $X \setminus A$:n. Joukon A sisäpisteiden joukolle käytetään merkintää int$A$, ulkopisteiden joukolle ext$A$ ja reunapisteiden joukolle eli *reunalle* ∂A. Näille on voimassa

- $\mathrm{int}A = X \setminus \overline{X \setminus A}$,
- $\mathrm{ext}A = X \setminus \overline{A}$,
- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Joukko $A \subset X$ on *tiheä*, jos $\overline{A} = X$ eli jos jokainen ei-tyhjä avoin joukko kohtaa A:n.

Avaruuden X *pistejono* on kuvaus $s : \mathbb{N} \to X$. Yleensä merkitään luvun $n \in \mathbb{N}$ kuvaa $s(n)$ s_n:llä. Jonolle s käytetään myös merkintää $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tai vain (s_n). Jono s *suppenee* kohti pistettä $a \in X$, jos $\forall$ a:n ympäristölle U $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $s_n \in U$ $\forall$ $n \geq n_0$. Tällöin merkitään $s_n \to a$. Voidaan käyttää merkintää $a = \lim_{n\to\infty} s_n$.

1.6. **Lause.** Olkoon $A \subset X$ ja s pistejono A:ssa. Jos $s_n \to a \in X$, niin $a \in \overline{A}$.

Todistus. Olkoon U a:n ympäristö. Koska $s_n \to a$, niin $s_n \in U$, kun $n \geq n_a$. Koska $s_n \in A$, niin $U \cap A \neq \emptyset$, joten $a \in \overline{A}$. $\square$

1.7. **Huomautus.** Kääntäen ei ehdosta $a \in \overline{A}$ seuraa, että jokin jono suppenee kohti a:ta.

1.8. **Kertausta.** (X, T) annettu avaruus. Kokoelma $\underline{B} \subset T$ on T:n *kanta*, jos jokainen T:n jäsen voidaan lausua yhdisteenä joistakin $\underline{B}$:n jäsenistä tai on tyhjä. Kanta $\underline{B}$ määrää yksikäsitteisesti T:n, sillä

$$T = \{U : U = \emptyset \text{ tai } U \text{ on yhdiste joistakin } \underline{B}\text{:n jäsenistä}\}.$$

Joskus sanotaan, hieman epätäsmällisesti, että $\underline{B}$ on X:n kanta. Se, onko annettu $\underline{B}$ annetun T:n kanta, saadaan yleensä selville seuraavan tuloksen avulla:

1.9. **Kantakriteeri A.** Olkoon (X, T) avaruus. Kokoelma $\underline{B}$ on T:n kanta $\Leftrightarrow$
(1) $\underline{B} \subset T$.
(2) $\forall$ $U \in T$ ja $\forall$ $x \in U$ $\exists$ $B \in \underline{B}$ siten, että $x \in B \subset U$.

Yleensä ei annettu joukon X osajoukkojen kokoelma ole X:n minkään topologian kanta. Asian voi yleensä selvittää seuraavan tuloksen avulla:

1.10. **Kantakriteeri B.** Olkoon X joukko ja $\underline{B}$ kokoelma X:n osajoukkoja. Tällöin $\underline{B}$ on X:n erään topologian kanta $\Leftrightarrow$

(1) $X = \cup \underline{B}$ eli $\underline{B}$ on X:n peite.
(2) Jos $U, V \in \underline{B}$ ja $x \in U \cap V$, niin $\exists\ B \in \underline{B}$ siten, että $x \in B \subset U \cap V$.

1.11. **Huomautus.** Ehtoa (2) vahvempi ehto on seuraava:

(2') Jos $U, V \in \underline{B}$ ja $U \cap V \neq \emptyset$, niin $U \cap V \in \underline{B}$.

1.12. **Esimerkki.** Tason $\mathbb{R}^2$ tavallisen topologian erään kannan muodostavat kiekot $B(x, r), x \in \mathbb{R}^2, r > 0$. Toisen kannan muodostavat suorakulmiot $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d,\ a < b,\ c < d\}$. Näistä jälkimmäinen toteuttaa ehdon $(2')$, edellinen ei.

1.13. **Lause.** Olkoot T_1 ja T_2 joukon X topologioita, joilla on kannat $\underline{B_1}$ ja $\underline{B_2}$. Tällöin $T_1 \subset T_2 \Leftrightarrow \forall\ B_1 \in \underline{B_1}$ ja $\forall\ x \in B_1\ \exists\ B_2 \in \underline{B_2}$ siten, että $x \in B_2 \subset B_1$.

Todistus.

($\Rightarrow$) Olkoon $T_1 \subset T_2$. Olkoon $x \in B_1 \in \underline{B_1}$. Koska $B_1 \in T_2$, $\exists$ sellainen $B_2 \in \underline{B_2}$, että $x \in B_2 \subset B_1$.
($\Leftarrow$) Olkoon $U \subset T_1$. Olkoon $x \in U \Rightarrow \exists\ B_1 \in \underline{B_1}$ siten, että $x \in B_1 \subset U$. Lauseen ehto $\Rightarrow \exists\ B_2 \in \underline{B_2}$ siten, että $x \in B_2 \subset B_1 \subset U$. Siis $U \in T_2$.

$\square$

1.14. **Esimerkki.** Lauseen 1.13 avulla nähdään helposti, että kohdissa 1.12 mainitut kaksi tason kantaa määrittelevät saman topologian.

1.15. **Määritelmä.** Olkoon X avaruus ja $a \in X$. Kokoelma $\underline{B}(a)$ a:n ympäristöjä on a:n *ympäristökanta*, jos jokainen a:n ympäristö sisältää jonkin $\underline{B}(a)$:n jäsenen.

1.16. **Esimerkkejä.** 1. Jos $\underline{B}$ on avaruuden X kanta ja jos $a \in X$, niin

$$\underline{B}(a) = \{B : a \in B \in \underline{B}\}$$

on a:n ympäristökanta.
2. Jos X on metrinen avaruus ja $a \in X$, niin eräs a:n ympäristökanta on

$$\{B(a, r) : r > 0\}$$

ja toinen

$$\{B(a, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}.$$

1.17. **Määritelmä.** Olkoon (X, T) avaruus. Kokoelma $\underline{A} \subset T$ on T:n *esikanta* eli alikanta, jos $\underline{A}$:n äärelliset leikkaukset muodostavat T:n kannan.

1.18. **Esimerkkejä.** 1. Jokainen T:n kanta on myös esikanta.
2. Reaaliakselin $\mathbb{R}^1$ tavallisen topologian erään esikannan muodostavat välit

$$(-\infty, b) \text{ ja } (a, \infty),\ \ a, b \in \mathbb{R}^1,$$

sillä

$$(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty).$$

1.19. **Lause.** Olkoon X joukko ja $\underline{A}$ kokoelma X:n osajoukkoja, jotka peittävät X:n. Tällöin $\underline{A}$ on X:n erään topologian T esikanta. $\underline{A}$ määrää T:n yksikäsitteisesti, ja T on karkein niistä X:n topologioista, jotka sisältävät $\underline{A}$:n.

Todistus. Olkoon $\underline{B}$ $\underline{A}$:n äärellisten leikkausten kokoelma. Osoitamme, että $\underline{B}$ toteuttaa kohdan 1.11 ehdon (2'). Jos $U, V \in \underline{B}$, niin

$$U = A_1 \cap \cdots \cap A_m \text{ ja } V = A'_1 \cap \cdots \cap A'_n,$$

missä $A_i \in \underline{A}$ ja $A'_j \in \underline{A}$, $i = 1, \ldots, m$ ja $j = 1, \ldots, n$. Siis

$$U \cap V = A_1 \cap \cdots \cap A_m \cap A'_1 \cap \cdots \cap A'_n,$$

joten (2') on voimassa. Siis $\underline{B}$ on X:n erään topologian T kanta. Koska kanta määrää topologian yksikäsitteisesti, T on yksikäsitteisesti määrätty.

Olkoon T_1 X:n jokin topologia, joka sisältää $\underline{A}$:n. Topologian määritelmästä seuraa, että T_1 sisältää $\underline{B}$:n ja siis myös T:n. $\square$

1.20. **Määritelmä.** Olkoon X joukko ja $\underline{A}$ X:n peite. Sitä X:n topologiaa, jonka esikanta on $\underline{A}$, sanotaan $\underline{A}$:n *virittämäksi* X:n topologiaksi.

2. Topologisen avaruuden kuvaukset

2.1. **Kertausta.** Tässä pykälässä tarkastelemme kuvauksia $f : X \to Y$, kun (X, T) ja (Y, T') ovat topologisia avaruuksia. Kuvaus f on *jatkuva pisteessä* $x \in X$, jos $\forall$ $f(x)$:n ympäristöä V kohti $\exists$ x:n ympäristö U siten, että $fU \subset V$. Kuvaus f on *jatkuva*, jos se on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

2.2. **Lause.** Olkoot X ja Y avaruuksia ja $f : X \to Y$. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(1) f on jatkuva.
(2) $\forall$ avoimen joukon $V \subset Y$ alkukuva on avoin.
(3) $\forall$ suljetun joukon $F \subset Y$ alkukuva on suljettu.
(4) Y:llä on esikanta $\underline{A}$, jonka jokaisen jäsenen alkukuva $f^{-1}V$ on avoin.
(5) $f\overline{E} \subset \overline{fE} \quad \forall\ E \subset X$.

Todistus. (osittain) Triviaalisti (2) $\Rightarrow$ (4). Olkoon (4) voimassa. Jos $V \overset{\circ}{\subset} Y$, voidaan kirjoittaa

$$V = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} A_{jk},$$

missä $A_{jk} \in \underline{A}$ ja joukot K_j ovat äärellisiä. Siis

$$f^{-1}V = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} A_{jk}\right) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{k \in K_j} f^{-1}A_{jk}.$$

Koska joukot $f^{-1}A_{jk}$ ovat avoimia, samoin on $f^{-1}V$. Siis (2) on voimassa. $\square$

2.3. **Kertausta.** Jos $f : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $a \in X$ ja jos $g : Y \to Z$ on jatkuva pisteessä $f(a)$, niin yhdistetty kuvaus $gf : X \to Z$ on jatkuva a:ssa.

Olkoot $f, g : X \to \mathbb{R}^1$ jatkuvia pisteessä $a \in X$. Tällöin kuvaukset $f + g$, $f - g$, tulofunktio fg, $|f|$, $\max(f, g)$ ja $\min(f, g)$ ovat jatkuvat a:ssa. Jos $g(a) \neq 0$, on osamääräfunktio $\frac{f}{g}$ määritelty eräässä a:n ympäristössä ja jatkuva a:ssa.

Jos $f : X \to Y$ on jatkuva pisteessä $a \in X$ ja jos s on sellainen jono X:ssa, että $s_n \to a$, niin $f(s_n) \to f(a)$. Myöhemmin osoitetaan, että eräissä tapauksissa, esim. jos X on metrinen avaruus, kääntäen tästä ehdosta seuraa f:n jatkuvuus a:ssa.

Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$. Tällöin f on jatkuva pisteessä $a \in X \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ siten, että

$$d'(f(x), f(a)) < \varepsilon,$$

kun $d(x, a) < \delta$.

2.4. **Määritelmä.** Olkoot X ja Y avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *avoin*, jos X:n $\forall$ avoimen joukon kuva on avoin. Kuvaus f on *suljettu*, jos X:n $\forall$ suljetun joukon kuva on suljettu.

2.5. **Esimerkkejä.** 1. Projektio $P_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,\ P_1(x, y) = x$, on avoin, mutta ei suljettu.
2. Olkoon $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1,\ f(x) = \sin x$. Koska f kuvaa suljetun joukon

$$\{2n\pi + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

joukoksi

$$\{\sin(\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\},$$

niin f ei ole suljettu. Koska $f\mathbb{R}^1 = [-1, 1]$, niin f ei ole avoin.
3. Olkoon $\mathcal{G} \in \mathbb{C}$ alue ja $f : \mathcal{G} \to \mathbb{C}$ säännöllinen analyyttinen funktio. Tällöin f on funktioteorian nojalla avoin kuvaus.

2.6. **Lause.** Olkoot X ja Y avaruuksia, $f : X \to Y$ ja $\underline{B}$ X:n kanta. Jos fB on avoin $\forall\ B \in \underline{B}$, niin f on avoin.

Todistus. Olkoon $U \subset\!\!\!\!\circ\; X$. Tällöin U on muotoa $\cup\{B_j : j \in J\}$, missä $B_j \in \underline{B}$. Siis

$$fU = f\big(\cup\{B_j : j \in J\}\big) = \cup\{fB_j : j \in J\}.$$

Koska $fB_j \subset\!\!\!\!\circ\; Y$, niin $fU \subset\!\!\!\!\circ\; Y$. □

Osoitamme seuraavaksi, että kuvaus voidaan usein päätellä suljetuksi kompaktisuuden avulla.

Kertausta. Olkoon X joukko, ja A sen osajoukko; jos P_i:t $(i \in I)$ ovat X:n osajoukkoja, joiden yhdiste sisältää A:n, niin sanotaan, että perhe $(P_i)_{i \in I}$ on A:n *peite*. Osaperhettä $(P_i)_{i \in J}$ $(J \subset I)$, joka on myös A:n peite, sanotaan A:n peitteen $(P_i)_{i \in I}$ *osapeitteeksi.* Peite $(P_i)_{i \in I}$ on *äärellinen*, jos sen indeksijoukko I on äärellinen.

Topologisen avaruuden X osajoukon A peitettä $(U_i)_{i \in I}$ sanotaan A:n *avoimeksi peitteeksi*, jos joukot U_i ovat avoimia.

Määritelmä. Topologista avaruutta X sanotaan *Hausdorffin avaruudeksi*, jos sen topologia toteuttaa *Hausdorffin ehdon*:

(H) Jos x ja y ovat kaksi X:n eri pistettä, niin $\exists$ sellaiset X:n avoimet joukot U ja V, että $x \in U,\ y \in V$ ja $U \cap V = \emptyset$.

Kompaktisuusehto. Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Joukko A on *kompakti*, jos sen jokaisella avoimella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

2.7. **Lause.** Olkoon X kompakti, Y Hausdorff ja $f : X \to Y$ jatkuva. Tällöin f on suljettu.

Todistus. Olkoon $F \subset_c X$. Kompaktin avaruuden X suljettuna osajoukkona F on kompakti. Koska kompaktisuus säilyy jatkuvassa kuvauksessa, fF on kompakti. Hausdorff-avaruuden Y kompaktina osajoukkona fF on suljettu. □

2.8. **Esimerkki.** Jokainen jatkuva kuvaus $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ on suljettu.

2.9. **Kertausta.** Olkoot X ja Y avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *homeomorfismi*, jos

(1) f on bijektio,
(2) f on jatkuva,
(3) $f^{-1} : Y \to X$ on jatkuva.

Ehdon (3) voi korvata kummalla tahansa ehdoista

(3') f on avoin,
(3'') f on suljettu.

Sitä ei yleensä voi jättää kokonaan pois (poikkeus: kompaktit avaruudet; Lause 2.11). Jos esim. T_1, T_2 ovat joukon X topologioita ja $T_2 \subset T_1$, niin identtinen kuvaus $id : (X, T_1) \to (X, T_2)$ toteuttaa ehdot (1) ja (2). Ehdon (3) se toteuttaa vain jos $T_1 = T_2$.

Jos $f : X \to Y$ on homeomorfismi, merkitään $f : X \approx Y$. Avaruus X on *homeomorfinen* Y:n kanssa, jos on olemassa jokin homeomorfismi $f : X \to Y$. Tällöin merkitään $X \approx Y$. Tämä on ekvivalenssirelaatio kaikkien avaruuksien luokassa.

Esimerkki. $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \approx \mathbb{R}^1$, joten $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \approx \mathbb{R}^1$, mistä helposti seuraa $(a, b) \approx \mathbb{R}^1$ aina kun $a < b$ (määritellään $k : (a, b) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

$$k(x) = \frac{\pi}{b-a}x - \frac{\pi}{2}\frac{a+b}{b-a}$$

homeomorfismi $\Rightarrow$ $tan \circ k$ homeomorfinen).

Jos $X \approx Y$, niin X:llä ja Y:llä on aivan samat topologiset ominaisuudet. Jos esim. X on Hausdorff, yhtenäinen tai kompakti, samoin on Y. Puhtaan topologin silmin katsottuna avaruuksilla X ja Y ei ole mitään eroa. Topologi on tapana määritellä henkilönä, joka ei näe eroa kahvikupin ja munkkirinkilän välillä.

Kuvaus voidaan usein päätellä homeomorfismiksi seuraavan lauseen avulla:

2.10. **Lause.** Jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ on homeomorfismi $\Leftrightarrow$ on olemassa jatkuva kuvaus $g : Y \to X$ siten, että $fg = id_Y$ ja $gf = id_X$. Lisäksi tällöin $g = f^{-1}$.

Todistus.
($\Rightarrow$) Jos f on homeomorfismi, niin $g = f^{-1}$ toteuttaa selvästi lauseen ehdon.
($\Leftarrow$) Olkoon $x_1, x_2 \in X$ siten, että $f(x_1) = f(x_2)$. Tällöin

$$\begin{aligned} x_1 &= id_X(x_1) = (gf)(x_1) = g\big(f(x_1)\big) \\ &= g\big(f(x_2)\big) = (gf)(x_2) = id_X(x_2) = x_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f : X \to Y$ on injektio.

Olkoon $y \in Y$ mielivaltainen. Tällöin oletuksesta $fg = id_Y$ seuraa

$$y = id_Y(y) = (fg)(y) = f\big(g(y)\big)$$

$\Rightarrow f$ kuvaa alkion $g(y) \in X$ alkiolle $y \in Y$
$\Rightarrow f : X \to Y$ on surjektio.

$\therefore f : X \to Y$ on bijektio ja $g = f^{-1}$, mikä on jatkuva.

$\square$

2.11. **Lause.** Olkoon X kompakti, Y Hausdorff ja $f : X \to Y$ jatkuva bijektio. Tällöin f on homeomorfismi.

Todistus. Lauseen 2.7 nojalla f on suljettu. $\square$

II Indusointi ja koindusointi

Olkoot X ja Y joukkoja ja $f : X \to Y$. Jos Y:ssä on annettu topologia, esitämme, kuinka f *indusoi* siitä X:ään erään topologian. Jos taas X:ssä on annettu topologia, osoitamme, että sen ja f:n avulla saadaan Y:hyn topologia, jota sanotaan f:n *koindusoimaksi* topologiaksi. Siis indusointi tapahtuu vastavirtaan, koindusointi myötävirtaan.

3. Indusointi ja relatiivitopologia

3.1. **Määritelmä.** Olkoon X joukko, (Y, T') avaruus ja $f : X \to Y$ kuvaus. Tällöin f:n T':sta *indusoima* X:n topologia on

$$T = \{f^{-1}V : V \in T'\}$$

3.2. **Lause.** T on karkein niitä X:n topologioista, joiden suhteen f on jatkuva.

Todistus.

(a) Aluksi on osoitettava, että T todella on topologia X:ssä. Olkoot $V_j \in T'$, $j \in J$. Tällöin

$$\cup\{f^{-1}V_j : j \in J\} = f^{-1}\big(\cup\{V_j : j \in J\}\big).$$

Koska yhdiste $\cup\{V_j : j \in J\} \in T'$, niin $\cup\{f^{-1}V_j : j \in J\} \in T$. Samaan tapaan nähdään, että T sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset. Lisäksi $\emptyset = f^{-1}\emptyset \in T$ ja $X = f^{-1}Y \in T$.

(b) Koska avoimien joukkojen alkukuvat ovat avoimia, niin f on jatkuva T:n suhteen.

(c) Olkoon T_1 toinen X:n topologia, jonka suhteen f on jatkuva. Tällöin Y:n avointen joukkojen alkukuvat kuuluvat T_1:een, joten $T \subset T_1$.

□

3.3. **Huomautus.** Jos edellä f on bijektio, niin se on homeomorfismi

$$f : (X, T) \approx (Y, T').$$

3.4. **Relatiivitopologia.** Olkoon (X, T) avaruus ja $A \subset X$. Olkoon $f : A \to X$ *inkluusio*, ts. $f(x) = x \; \forall \; x \in A$. Tällöin $f^{-1}V = V \cap A$ kaikilla $V \subset X$. Siis f:n indusoima A:n topologia on

$$\{V \cap A : V \in T\}.$$

Merkitsemme sitä $T|_A$:lla. Sanomme, että $T|_A$ on A:n *relatiivitopologia*, jonka A perii X:ltä. Siis $U \overset{\circ}{\subset} A \Leftrightarrow U = V \cap A$, missä $V \overset{\circ}{\subset} X$. Käsiteltäessä topologisten avaruuksien osajoukkoja topologisissa avaruuksissa käytetään niissä aina relatiivitopologiaa ellei toisin mainita.

3.5. **Lause.** Olkoon Y avaruus ja olkoon X:ssä kuvauksen $f : X \to Y$ indusoima topologia. Jos $E \subset X$, niin $\overline{E} = f^{-1}[\overline{fE}]$. Lisäksi

$$E \overset{c}{\subset} X \;\Leftrightarrow\; E = f^{-1}F,\; F \overset{c}{\subset} Y.$$

Todistus. Merkitään $E_1 = f^{-1}[\overline{fE}]$. Koska f on jatkuva, niin E_1 on suljettu joukko. Koska lisäksi

$$E_1 = f^{-1}[\overline{fE}] \supset f^{-1}[fE] \supset E,$$

niin $\overline{E} \subset E_1$. Olkoon $x \in E_1$ ja U x:n ympäristö. Tällöin U on muotoa $f^{-1}V$, missä V on $f(x)$:n ympäristö. Koska $x \in E_1 = f^{-1}[\overline{fE}]$, niin $f(x) \in \overline{fE}$. Siis V sisältää pisteen $y \in fE$. Tällöin $y = f(a)$ jollakin $a \in E \cap f^{-1}V = E \cap U$. Täten U kohtaa E:n ja siis $x \in \overline{E} \Rightarrow E_1 \subset \overline{E}$. Siis $\overline{E} = E_1$.

Jos $E \overset{c}{\subset} X$, niin $E = \overline{E}$, joten edellisen nojalla

$$E = f^{-1}[\overline{fE}] = f^{-1}F,$$

missä $F = \overline{fE} \overset{c}{\subset} Y$. Kääntäen, jos $F \overset{c}{\subset} Y$, niin $f^{-1}F \overset{c}{\subset} X$, koska f on jatkuva. $\square$

3.6. **Seuraus.** Olkoon X avaruus ja $E \subset A \subset X$. Tällöin E:n sulkeuma A:ssa on $cl_A E = \overline{E} \cap A$. Lisäksi

$$E \overset{c}{\subset} A \;\Leftrightarrow\; E = F \cap A,$$

missä $F \overset{c}{\subset} X$.

3.7. **Lause.** Olkoot X ja Y joukkoja ja (Z, T'') avaruus. Olkoot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$. Olkoon T' g:n T'':sta indusoima topologia Y:ssä ja T f:n T':sta indusoima topologia X:ssä. Tällöin T on gf:n T'':sta indusoima topologia.

Todistus. Joukko $U \subset X$ kuuluu gf:n indusoimaan topologiaan tarkalleen silloin, kun se on muotoa $(gf)^{-1}V = f^{-1}g^{-1}V$, missä $V \in T''$. Tästä väitös seuraa. $\square$

3.8. **Seuraus.** Olkoon (X, T) avaruus ja $A \subset B \subset X$. Tällöin $T|_A = (T|_B)|_A$.

3.9. **Kuvausperheen indusoima topologia.** Yleistämme määritelmän 3.1. Olkoot $f_j : X \to Y_j$ kuvauksia, $j \in J$, missä X on joukko ja Y_j:t avaruuksia. Haluamme määritellä X:ssä topologian T. Jotta kuvaukset f_j olisivat jatkuvia, on T:hen valittava ainakin joukot $f_j^{-1}V$, $V \circledcirc Y_j$, $j \in J$. Toisin kuin yhden kuvauksen tapauksessa, nämä eivät yleensä muodosta X:n topologiaa. Siksi asetetaan seuraava määritelmä:

Kuvausperheen $(f_j)_{j\in J}$ *indusoima* X:n topologia T on kokoelman

$$\{f_j^{-1}V : V \circledcirc Y_j, j \in J\}$$

virittämä topologia. Siis T on karkein niistä X:n topologioista, joiden suhteen jokainen $f_j : X \to Y_j$ on jatkuva. Tärkein esimerkki kuvausperheen indusoimasta topologiasta on tulotopologia, joka käsitellään seuraavassa pykälässä.

Seuraava tulos on Lauseen 3.7 yleistys.

3.10. **Lause.** Olkoot $f_j : X \to Y_j$, $j \in J$ ja $g_{jk} = Y_j \to Z_{jk}$, $k \in K_j$. Olkoot Z_{jk}:t avaruuksia, jolloin perhe $(g_{jk})_{k\in K_j}$ indusoi Y_j:hin topologian T_j ja perhe $(f_j)_{j\in J}$ näistä Xään topologian T. Tällöin T on sama kuin perheen $(g_{jk}f_j)_{j\in J,\ k\in K_j}$ indusoima X:n topologia.

3.11. **Lause.** Olkoon X:ssä kuvausten $f_j : X \to Y$, $j \in J$, indusoima topologia, Z avaruus ja $g : Z \to X$. Tällöin g on jatkuva $\Leftrightarrow$ kuvaukset $f_j g$ ovat jatkuvia $\forall\ j \in J$.

Todistus.

($\Rightarrow$) Jos g on jatkuva, niin $f_j g$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva.

($\Leftarrow$) Oletamme, että $\forall\ f_j g$ on jatkuva, $j \in J$. X:n erään esikannan muodostavat joukot $f_j^{-1}V$, $V \circledcirc Y_j$. Näiden alkukuvat

$$g^{-1}f_j^{-1}V = (f_j g)^{-1}V$$

ovat avoimia, koska $f_j g$:t ovat jatkuvia. Siis Lauseen 2.2 ehto (4) on voimassa g:lle, joten g on jatkuva.

$\square$

3.12. **Seuraus.** Olkoot X ja Y_0 avaruuksia, $Y \subset Y_0$ ja $f : X \to Y$. Tällöin f on jatkuva $\Leftrightarrow$ f:n määrittelemä kuvaus $f_0 : X \to Y_0$ on jatkuva.

3.13. **Huomautuksia.** Tulos 3.12 sanoo ettei maaliavaruuden suurentaminen tai pienentäminen vaikuta kuvauksen jatkuvuuteen. Tietenkään ei maaliavaruutta voi pienentää pienemmäksi kuin kuvajoukko fX.

Myös lähtöavaruutta voi pienentää (ei suurentaa) kuvauksen jatkuvuuden siitä kärsimättä. Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva ja $A \subset X$. Tällöin f:n *rajoittuma* A:han $f|_A : A \to Y$ on jatkuva, koska se on yhdistetty kuvaus fj, missä $j : A \to X$ on inkluusio.

Tarkastamme seuraavaksi käänteistä kysymystä: Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä X ja Y ovat avaruuksia. Olkoon $X = \cup\{A_j : j \in J\}$ ja olkoon $f|_{A_j}$ jatkuva $\forall\, j \in J$. Tästä ei yleensä seuraa, että f olisi jatkuva.

Esimerkki. X on yhdiste yksiöistä $\{x\},\ x \in X$, ja $f|_{\{x\}}$ on aina jatkuva

$$\big((f|_{\{x\}})^{-1}V = \emptyset \text{ tai } \{x\} \text{ ts. koko avaruus jollekin avoimelle joukolle } V\big),$$

vaikka f olisi epäjatkuvakin. Seuraava lause antaa riittäviä ehtoja f:n jatkuvuudelle:

3.14. **Lause.** Olkoot X ja Y avaruuksia, $f : X \to Y$, $X = \cup\{A_j : j \in J\}$, ja olkoon $f|_{A_j}$ jatkuva $\forall\, j \in J$. Jos lisäksi joko

(1) $\forall\, A_j$ on avoin
tai
(2) indeksijoukko J on äärellinen ja $\forall A_j$ on suljettu,

niin f on jatkuva.

Todistus. Merkitään $f_j = f|_{A_j}$. Jos $E \subset Y$, niin

$$f^{-1}E = \cup\{A_j \cap f^{-1}E : j \in J\} = \cup\{f_j^{-1}E : j \in J\}.$$

Jos $E \overset{\circ}{\subset} Y$, niin $f_j^{-1}E \overset{\circ}{\subset} A_j$, joten tapauksessa (1) $f_j^{-1}E = V \cap A_j \overset{\circ}{\subset} X$, sillä joukot V ja A_j ovat avoimia. Siis $f^{-1}E \overset{\circ}{\subset} X$, joten f on jatkuva.
Jos $E \overset{c}{\subset} Y$, niin $f_j^{-1}E \overset{c}{\subset} A_j$, joten tapauksessa (2) $f_j^{-1}E \overset{c}{\subset} X$. Siis

$$f^{-1}E = \cup\{f_j^{-1}E : j \in J \text{ äärellinen}\} \overset{c}{\subset} X,$$

joten f on jatkuva. □

3.15. **Esimerkki.** Olkoon X avaruus, $f : [0,1] \to X$, $g : [1,2] \to X$ jatkuvia ja $f(1) = g(1)$. Tällöin f ja g määrittelevät jatkuvan kuvauksen $h : [0,2] \to X$, jota voi merkitä $h = f \cup g$.

3.16. **Määritelmä.** Olkoot X ja Y avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *upotus*, jos sen määrittelemä kuvaus $f_0 : X \to fX$ on homeomorfismi.

3.17. **Esimerkki.** Jos $A \subset X$, niin inkluusio $j : A \to X$ on upotus.

3.18. **Huomautus.** Upotus on aina jatkuva injektio. Jos X on kompakti ja Y Hausdorff, seuraa Lauseesta 2.11, että jokainen jatkuva injektio $f : X \to Y$ on upotus.

4. Tulotopologia

4.1. **Kertausta ja täydennystä.** Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ avaruuksia ja

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n.$$

Siis X:n alkiot ovat muotoa $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, missä $x_j \in X_j$, $j = 1, \ldots, x_n$.

Lause 1. Jos $X_1, \ldots, X_n$ ovat avaruuksia, niin

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{k=1}^{n} U_k \mid U_k \Subset X_k \ \forall\ k = 1, \ldots, n \right\}$$

on erään topologian kanta tulojoukossa

$$X = \prod_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times \cdots \times X_n.$$

Todistus. Kantakriteerin B mukaan riittää osoittaa, että kahden $\mathcal{B}$:n joukon B ja B' leikkaus on $\mathcal{B}$:ssä sillä $X \in \mathcal{B}$. Jos

$$B = \prod_{k=1}^{n} U_k \quad \text{ja} \quad B' = \prod_{k=1}^{n} U'_k,$$

missä $U_k \Subset X_k$, $U'_k \Subset X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, niin

$$B \cap B' = \prod_{k=1}^{n} U_k \cap \prod_{k=1}^{n} U'_k = \prod_{k=1}^{n} (U_k \cap U'_k)\,.$$

Koska $U_k \cap U'_k \Subset X_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, pätee $B \cap B' \in \mathcal{B}$. $\square$

Lause 2. Jos $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ on topologisten avaruuksien tulo, niin projektiot $P_j : X \to X_j,\ P_j(x) = P_j(x_1, \ldots x_n) = x_j$ $(1 \le j \le n)$ ovat jatkuvia.

Todistus. Olkoon $U_j \Subset X_j$. Tällöin alkukuva

$$P_j^{-1} U_j = X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times U_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$$

on Lauseen 1 mukaan avoin X:ssä. Täten P_j on Lauseen 2.2 nojalla jatkuva. $\square$

Olkoot $U_j \Subset X_j,\ j = 1, \ldots n$. Tällöin

$$\begin{aligned} U_1 \times \cdots \times U_n &= \{x \in X : x_j \in U_j \text{ kaikilla } j\} \\ &= \{x \in X : P_j(x) \in U_j \text{ kaikilla } j\} \\ &= \{x \in X : x \in P_j^{-1} U_j \text{ kaikilla } j\} \\ &= P_1^{-1} U_1 \cap \cdots \cap P_n^{-1} U_n. \end{aligned}$$

Koska lisäksi joukot $P_j^{-1}U_j$ ovat avoimia X:ssä, ne muodostavat tulotopologian esikannan. Siis tulotopologia on projektioiden $P_j : X \to X_j$ indusoima topologia.

Euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1 \times \cdots \mathbb{R}^1$ tulotopologia on sama kuin tavallinen topologia.

4.2. **Yleinen karteesinen tulo.** Siirrymme tarkastelemaan karteesisia tuloja, joissa avaruuksia X_j voi olla äärettömän monta. Aluksi käsittelemme tapausta puhtaasti joukko-opillisesti, ilman topologiaa.

Olkoon $J \neq \emptyset$ joukko, jota sanomme indeksijoukoksi. Olkoon jokaista $j \in J$ kohti annettu joukko X_j. *Karteesinen tulo*

$$X = \prod_{j \in J} X_j$$

on niiden funktioiden $x : J \to \cup\{X_j : j \in J\}$ joukko, joilla $x(j) \in X_j \ \forall \ j \in J$. Alkiota $x(j) \in X_j$ merkitään yleensä x_j:llä. Sitä sanotaan x:n *j-koordinaatiksi.* Siis X:n alkio on määrätty, kun tunnetaan sen koordinaatit $x_j \ \forall \ j \in J$. Jos $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, saadaan kohdassa 4.1 käsitelty tulo $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Jos $J = \mathbb{N}(= \{1, 2, \ldots\})$, ovat X:n alkiot jonoja $x = (x_1, x_2, \ldots)$, joilla $x_j \in X_j$.

Jokaista $j \in J$ kohti määritellään *projektio* $P_j : X \to X_j$ asettamalla

$$P_j(x) = x_j.$$

Jos $A_j \subset X_j \ \forall \ j \in J$, niin joukkojen A_j karteesinen tulo

$$A = \prod_{j \in J} A_j$$

on $X = \prod_{j \in J} X_j$:n osajoukko.

Tosin A:n alkiot ovat määritelmän mukaan funktioita $x : J \to \cup\{A_j : j \in J\}$, mutta tässä yhteydessä pidetään samoina funktioita, joilla on sama lähtöjoukko samat arvot kussakin pisteessä vaikka niillä olisikin eri maali. Olkoon erityisesti X_j sama joukko $Y \ \forall \ j \in J$. Tällöin merkitään tulojoukkoa XY^J:llä. Siis Y^J on kaikkien kuvausten $x : J \to Y$ joukko. Projektio $P_j : Y^J \to Y$ liittää funktioon x sen arvon $x(j)$ Y:ssä.

4.3. **Määritelmä.** Olkoot (X_j, T_j) avaruuksia, $j \in J$. Karteesisen tulon

$$X = \prod_{j \in J} X_j$$

tulotopologia T on projektioiden $P_j : X \to X_j$ indusoima topologia.

4.4. **Huomautuksia.** Siis T on karkein niistä X:n topologioista, joiden suhteen jokainen P_j on jatkuva. Sen esikannan muodostavat joukot $P_j^{-1}U, U \in T_j,\ j \in J$. Näiden äärelliset leikkaukset muodostavat T:n kannan. Koska

$$P_j^{-1}U \cap P_j^{-1}V = P_j^{-1}[U \cap V],$$

voidaan samaan indeksiin liittyvät joukot yhdistää. Siis T:n kannan yleinen jäsen on muotoa

$$B = \bigcap_{j \in K} P_j^{-1}U_j, \tag{4.5}$$

missä $U_j \overset{\circ}{\subset} X_j$ ja $K \subset J$ on äärellinen. Jos asetetaan $U_j = X_j$, kun $j \in J \setminus K$, saadaan B muotoon

$$B = \prod_{j \in J} U_j \tag{4.6}$$

Tässä on siis $U_j \overset{\circ}{\subset} X_j$ kaikilla $j \in J$ ja $U_j = X_j$ lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä j. Jos J on äärellinen, saadaan sama käsite kuin kohdassa 4.1.

Yleensä ei avoimien joukkojen $U_j \overset{\circ}{\subset} X_j$ tulo ole avoin. Jos näet $U \overset{\circ}{\subset} X$ ja $U \neq \emptyset$, niin $P_jU = X_j$ lukuunottamatta äärellistä määrää indeksejä. Tämä seuraa siitä, että U sisältää muotoa (4.6) olevan kannan joukon, missä $U_j \neq \emptyset$ kaikilla j ja $U_j = X_j$ paitsi äärellistä määrää indeksejä j.

4.7. **Esimerkkejä.** 1. Olkoon $J = \mathbb{N}$ ja $X_j = \{0, 1\}$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Käytämme X_j:ssä diskreettiä topologiaa. Tuloavaruuden $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ alkiot ovat luvuista 0 ja 1 muodostettuja jonoja, esimerkiksi

$$x = 011010001 \cdots .$$

Jos $x \in X$, niin yksiön $\{x\}$ kuva projektiossa P_j on yksiö $\{x_j\}$. Ylläolevan huomautuksen nojalla $\{x\}$ ei ole avoin X:ssä. Siis X ei ole diskreetti, vaikka jokainen X_j on.

Alkion $x \in X$ ympäristökannan muodostavat joukot

$$U_K(x) = \{y \in X : y_j = x_j \ \forall\ j \in K\},$$

missä $K \subset \mathbb{N}$ on äärellinen, sillä

$$U_K(x) = \cap\{P_j^{-1}\{x_j\} : j \in K\}.$$

2. Olkoon $J = \mathbb{N}$ ja $X_j = [0, 1] = I \ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Tuloavaruutta $Q = I^{\mathbb{N}}$ sanotaan *Hilbertin kuutioksi.* Sen alkiot ovat jonoja $x = (x_1, x_2, \ldots)$, missä $0 \leq x_j \leq 1$ $\forall\ j \in J$. Se on n-kuution ääretönulotteinen vastine. Sen ominaisuudet ovat kuitenkin monessa suhteessa erilaiset kuin I^n:n. Jos $\emptyset \neq U \overset{\circ}{\subset} Q$, niin $P_jU \neq I$ vain äärellisen monella indeksillä j. Siis joukko $s = (0, 1)^{\mathbb{N}}$ ei ole avoin $(P_js = (0, 1) \neq I \ \forall\ j)$.

4.8. **Lause.** Olkoon f kuvaus avaruudesta X tuloavaruuteen $Y = \prod_{j\in J} Y_j$. Tällöin f on jatkuva $\Leftrightarrow$ $P_j f : X \to Y$ on jatkuva kaikilla $j \in J$.

Todistus. Tämä on Lauseen 3.11 erikoistapaus. $\square$

4.9. **Huomautuksia.** 1. Olkoon $f : X \to Y$ kuten Lauseessa 4.8. Kuvauksia $f_j = P_j f : X \to Y_j$ sanotaan f:n *komponenttikuvauksiksi*. Siis f on jatkuva $\Leftrightarrow$ $\forall$ komponenttikuvaukset ovat jatkuvia.
2. Olkoot $f_1 : X \to Y_1$ ja $f_2 : X \to Y_2$ jatkuvia. Ne määrittelevät kuvauksen

$$f : X \to Y_1 \times Y_2,\ f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big).$$

Edellisen nojalla f on jatkuva. Sille käytetään merkintää

$$f = (f_1, f_2).$$

Olkoot $f_1 : X_1 \to Y_1$ ja $f_2 : X_2 \to Y_2$ jatkuvia. Ne määrittelevät kuvauksen

$$g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2,\ g(x_1, x_2) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2)\big).$$

Lauseen 2 ja edellisen nojalla myös g on jatkuva, sillä $g = (f_1 P_1, f_2 P_2)$. Sille käytetään merkintää

$$g = f_1 \times f_2.$$

4.10. **Lause.** Olkoon s jono tuloavaruudessa $X = \prod_{j\in J} X_j$. Tällöin

$$s_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad P_j(s_n) \to x_j \ \ \forall\, j \in J.$$

Todistus.

($\Rightarrow$) Jos $s_n \to x$, niin P_j:n jatkuvuuden nojalla $P_j(s_n) \to P_j(x) = x_j$.

($\Leftarrow$) Oletamme, että $P_j(s_n) \to x_j\ \forall\, j \in J$. Olkoon U x:n mielivaltainen ympäristö. Tällöin U sisältää muotoa

$$B = \cap\{P_j^{-1} U_j : j \in K\}$$

olevan x:n ympäristön, missä $K \subset J$ on äärellinen ja U_j on x_j:n ympäristö kullakin $j \in K$. Koska $P_j(s_n) \to x_j$, niin $\forall\, j \in K\ \exists\, n_j \in \mathbb{N}$ siten, että

$$P_j(s_n) \in U_j,$$

kun $n \geq n_j$. Koska K on äärellinen, niin lukujen n_j, $j \in K$, joukossa on suurin; olkoon se n_0. Kun $n \geq n_0$, niin $P_j(s_n) \in U_j\ \forall\, j \in K$, joten $s_n \in P_j^{-1} U_j\ \forall\, j \in K$ ja siis $s_n \in B \subset U$. Siis $s_n \to x$.

$\square$

4.11. **Sovellus.** Olkoon $X_j = Y$ kaikilla $j \in J$ ja siis $X = Y^J$ (ks. kohta 4.2). Tällöin X:n alkiot ovat kuvauksia $f : J \to Y$. Lauseen 4.10 nojalla kuvausjono (f_n) suppenee kohti kuvausta $g : J \to Y$ X:n tulotopologiassa tarkalleen silloin, kun

$$f_n(j) \to g(j) \quad \text{kaikilla } j \in J$$

ts. kun jono (f_n) suppenee pisteittäin kohti g:tä. Tämän nojalla sanotaan tulotopologiaa myös *pisteittäin suppenemisen topologiaksi.*

Usein on kuva-avaruudessa Y^J ja sen osajoukoissa tarkoituksenmukaista käyttää muitakin topologioita. Jos esimerkiksi myös J on topologinen avaruus, voidaan tarkastella kaikkien jatkuvien kuvausten $f : J \to Y$ joukkoa

$$\mathcal{C}(J, Y) \subset Y^J,$$

ja siinä topologioita, jotka ottavat huomioon myös J:n topologian.

Olkoon esimerkiksi $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, kuten esimerkissä 4.7.1. Olkoon s se X:n jono, jolla $(s_n)_n = 1$ ja $(s_n)_j = 0$, kun $j \neq n$. Siis s_n on tyyppiä

$$s_n = 00\ldots0\underbrace{1}_{n:s}0\ldots$$

oleva X:n alkio. Tällöin $P_j(s_n) = 0$, kun $n > j$, joten $P_j(s_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Siis (Lause 4.10) s suppenee kohti jonoa $00\ldots$. Tämä osoittaa, ettei X ole diskreetti.

4.12. **Lause.** Olkoon X avaruuksien X_j, $j \in J$, tulo ja olkoot $A_j \subset X_j$.

(1) Joukon $A = \prod_{j\in J} A_j$ tulotopologia on sama kuin sen X:stä perimä relatiivitopologia.
(2) $\overline{A} = \prod_{j \in J} \overline{A_j}$.

Todistus. (1) Muodostamme kuvauskaavion

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "P_j^*"'] \arrow[dr, "P_j f = f_j P_j^*"] & X \arrow[d, "P_j"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & X_j \end{tikzcd}$$

missä vaakanuolet ovat inkluusioita ja pystynuolet projektioita. Kaavio kommutoi ts. $P_j f = f_j P_f^*$. Siis nämä kuvaukset indusoivat A:han avaruuksista X_j saman topologian. Lauseen 3.10 nojalla tämä on yhtäältä sama kuin f:n indusoima relatiivitopologia, toisaalta sama kuin kuvausten P_j^* indusoima tulotopologia.

$\square$

4.13. **Lause.** Olkoon X avaruuksien X_j tulo, $j \in J$. Tällöin projektiot $P_j : X \to X_j$ ovat avoimia kuvauksia.

Todistus. Lause 2.6 $\Rightarrow$ riittää osoittaa, että P_j kuvaa X:n kannan jäsenet avoimiksi joukoiksi. Olkoon B X:n kannan jäsen, jonka esitämme muodossa (4.6). Jos jokin $U_j = \emptyset$, niin $B = \emptyset$ ja $P_j B = \emptyset$. Muutoin $P_j B = U_j \underset{\circ}{\subset} X_j$. Siis P_j on avoin. $\square$

5. Koindusointi

5.1. **Määritelmä.** Olkoot (X_j, T_j) avaruuksia, $j \in J$. Olkoon Y joukko ja $f_j : X_j \to Y$ kuvauksia. Kuvausperheen $(f_j)_{j \in J}$ *koindusoima* Y:n topologia on

$$T' = \{U \subset Y : f_j^{-1}U \in T_j \quad \forall\, j \in J\}.$$

5.2. **Lause.** T' on hienoin niistä Y:n topologioista, joiden suhteen jokainen f_j on jatkuva.

Todistus.

(a) Aluksi on osoitettava, että T' todella on topologia. Olkoot $U_\alpha \in T'$, $\alpha \in A$, ja $U = \cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Jos $j \in J$, niin

$$f_j^{-1}U = f_j^{-1}\big(\cup\{U_\alpha : \alpha \in A\}\big) = \cup\{f_j^{-1}U_\alpha : \alpha \in A\} \in T_j,$$

koska T_j on topologia. Siis $U \in T'$. Samoin nähdään, että T' sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset. Koska $f_j^{-1}Y = X_j \in T_j$, niin $Y \in T'$. Koska $f_j^{-1}\emptyset = \emptyset \in T_j$, niin $\emptyset \in T'$.

(b) Jokainen f_j on jatkuva T':n suhteen, koska avointen joukkojen alkukuvat ovat avoimia.

(c) Olkoon T'' toinen Y:n topologia, jonka suhteen jokainen f_j on jatkuva. Jos $U \in T''$, niin $f_j^{-1}U \in T_j \quad \forall\, j \in J$, joten $U \in T''$. Siis $T'' \subset T'$.

$\square$

5.3. **Esimerkkejä.** 1. Tärkein esimerkki koindusoinnista on tekijäavaruus, jota käsitellään lähemmin seuraavassa pykälässä.

2. Olkoot (X_j, T_j) avaruuksia, $j \in J$. Olkoon

$$X = \bigcup_{j \in J} X_j$$

joukkojen X_j *erillinen yhdiste*. Jos X_j:t ovat erillisiä, voidaan määritellä

$$X = \cup\{X_j : j \in J\}.$$

Muussa tapauksessa ne "tehdään erillisiksi"korvaamalla X_j joukolla

$$X_j^* = \{(x, j) : x \in X_j\}.$$

Tällöin $X = \cup\{X_j^* : j \in J\}$. Kullakin $j \in J$ $\exists$ luonnollinen bijektio

$$\alpha_j : X_j^* \to X_j, \quad \alpha_j(x, j) = x,$$

joka indusoi X_j^*:een topologian, jolloin $X_j^* \approx X_j$. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi oletamme seuraavassa, että X_j:t ovat erillisiä.

Olkoon $f_j : X_j \to X$ inkluusio. Tällöin perhe $(f_j)_{j \in J}$ koindusoi X:ään topologian T. Siitä kukin X_j perii relatiivitopologian T_j'. Osoitamme, että T_j' on sama kuin X_j:n alkuperäinen topologia T_j.

Jos $U \in T_j'$, niin U on muotoa $X_j \cap V$, $V \in T$. Koska $f^{-1}V \in T_j$ ja toisaalta $f^{-1}V = U$, niin $U \in T_j$. Siis $T_j' \subset T_j$.

Olkoon $U \in T_j$. Tällöin $U \in T$, sillä $f^{-1}U = U$ ja $f_i^{-1}U = \emptyset \in T_i$, kun $i \neq j$. Siis $U = X_j \cap U \in T_j'$. Siis $T_j \subset T_j'$ ja täten on osoitettu, että $T_j' = T_j$.

5.4. **Lause.** Olkoon Y:ssä kuvausten $f_j : X_j \to Y$, $j \in J$, koindusoima topologia ja olkoon $B \subset Y$. Tällöin B on suljettu $\Leftrightarrow$ $f_j^{-1}B$ on suljettu $\forall\, j \in J$.

Todistus. Lause seuraa päättelyketjusta

$$\begin{aligned} B \overset{c}{\subset} Y &\Leftrightarrow Y \setminus B \overset{o}{\subset} Y \\ &\Leftrightarrow f_j^{-1}[Y \setminus B] \overset{o}{\subset} X_j \quad \forall\, j \in J \\ &\Leftrightarrow X_j \setminus f_j^{-1}B \overset{o}{\subset} X_j \quad \forall\, j \in J \\ &\Leftrightarrow f_j^{-1}B \overset{c}{\subset} X_j \quad \forall\, j \in J. \end{aligned}$$

□

5.5. **Lause.** (vrt. Lause 3.11). Olkoon Y:ssä kuvausten $f_j : X_j \to Y$, $j \in J$, koindusoima topologia. Olkoon Z avaruus ja $g : Y \to Z$. Tällöin g on jatkuva $\Leftrightarrow$ kuvaukset gf_j ovat jatkuvia $\forall\, j \in J$.

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr, "gf_j"] & \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Todistus.

($\Rightarrow$) Jos g on jatkuva, niin gf_j on jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva $\forall\, j \in J$.

($\Leftarrow$) Oletamme, että jokainen gf_j on jatkuva, $j \in J$. Olkoon $V \overset{o}{\subset} Z$. Jos $j \in J$, niin $f_j^{-1}g^{-1}V = (gf_j)^{-1}V \overset{o}{\subset} X_j$. Siis $g^{-1}V \overset{o}{\subset} Y$, joten g on jatkuva.

□

5.6. **Määritelmä.** Olkoot X ja Y avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *samaistuskuvaus*, jos

(1) f on surjektio,
(2) $V \overset{o}{\subset} Y \;\Leftrightarrow\; f^{-1}V \overset{o}{\subset} X$.

5.7. **Huomautuksia.** Samaistuskuvaus on aina jatkuva. Jos T_1 ja T_2 ovat joukon X topologioita ja $T_1 \supset T_2$, mutta $T_1 \neq T_2$, niin identtinen kuvaus $(X, T_1) \to (X, T_2)$ on jatkuva, muttei samaistuskuvaus.

Esimerkkejä samaistuskuvauksista saadaan helposti seuraavan lauseen avulla:

5.8. **Lause.** Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva surjektio ja joko avoin tai suljettu. Tällöin f on samaistuskuvaus.

Todistus. Olkoon f avoin. Jos $V \subset Y$ ja $f^{-1}V \Subset X$, niin

$$V = ff^{-1}V \Subset Y,$$

joten f on samaistuskuvaus.

Olkoon f suljettu ja $V \subset Y$, $f^{-1}V \Subset X$. Tällöin $X \setminus f^{-1}V = f^{-1}[Y \setminus V]$ on suljettu, joten

$$ff^{-1}[Y \setminus V] = Y \setminus V$$

on suljettu. Siis V on avoin ja lause on todistettu. $\square$

5.9. **Esimerkki.** Jokainen jatkuva $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ määrittelee samaistuskuvauksen $f_0 : [a, b] \to f[a, b]$, sillä f_0 on suljettu (Lause 2.7).

6. Tekijätopologia

6.1. **Tekijäjoukko.** Olkoon X joukko, ei siis välttämättä avaruus. Olkoon R *ekvivalenssirelaatio* X:ssä. Siis seuraavat ehdot ovat voimassa $\forall x, y, z \in X$:

(1) xRx (refleksiivisyys)
(2) Jos xRy, niin yRx (symmetrisyys).
(3) Jos xRy ja yRz, niin xRz (transitiivisuus).

Tällöin X jakautuu *ekvivalenssiluokkiin*

$$p(x) = \{y \in X : yRx\}.$$

Näiden joukkoa merkitään

$$X/R = \{p(x) : x \in X\}$$

ja sanotaan X:n *tekijäjoukoksi* R:n suhteen. Kuvausta

$$p : X \to X/R$$

sanotaan *projektioksi*; alkion x kuva $p(x)$ on siis se ekvivalenssiluokka, johon x kuuluu. Tekijäjoukko X/R on X:n *ositus*, ts. jokainen X:n alkio kuuluu yhteen ja vain yhteen X/R:n jäseneen. Kääntäen jokainen X:n ositus $\underline{P}$ määrää yksikäsitteisesti ekvivalenssirelaation R, jolla $X/R = \underline{P}$.

Kirjaimen R sijasta merkitään ekvivalenssirelaatiota usein symbolilla $\sim$ tai jollain samantapaisella merkillä.

Tässä pykälässä käsittelemme tilannetta, jossa X on lisäksi avaruus. Määrittelemme X/R:ssä topologian ja tutkimme sen ominaisuuksia.

6.2. **Määritelmä.** Olkoon X avaruus ja R X:n ekvivalenssirelaatio. Joukon X/R *tekijätopologia* on projektion $p : X \to X/R$ koindusoima topologia. Joukkoa X/R varustettuna tekijätopologialla sanotaan X:n *tekijäavaruuseksi* R:n suhteen.

6.3. **Huomautuksia.** Projektio $p : X \to X/R$ on jatkuva (Lause 5.2), vieläpä samaistuskuvaus. Joukolle

$$\begin{aligned} \underline{V} \overset{\circ}{\subset} X/R \ &\Leftrightarrow\ (X/R) \setminus \underline{V} \overset{c}{\subset} X/R \\ &\Leftrightarrow p^{-1}[(X/R) \setminus \underline{V}] \overset{c}{\subset} X \\ &\Leftrightarrow\ X \setminus p^{-1}\underline{V} \overset{c}{\subset} X \\ &\Leftrightarrow\ p^{-1}\underline{V} \overset{\circ}{\subset} X. \end{aligned}$$

Toisaalta $p^{-1}\underline{V} = \cup \underline{V}$ ($\underline{V} = \{p(x_j) : j \in J\}$) .

Siis joukko on avoin tekijätopologiassa $\Leftrightarrow$ sen jäsenten yhdiste on avoin X:ssä.

6.4. **Lause.** Olkoon f kuvaus tekijäavaruudelta X/R avaruuteen Y. Tällöin f on jatkuva $\Leftrightarrow$ $fp : X \to Y$ on jatkuva.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "fp"] & \\ X/R \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Todistus. Tämä on Lauseen 5.5 erikoistapaus. □

6.5. **Esimerkki.** Määrittelemme n-pallon

$$S^n = \{x \in R^{n+1} : |x| = 1\},$$

missä $|x|$ on vektorin x euklidinen normi, $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$, $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, ekvivalenssirelaation R valitsemalla luokiksi parit $\{x, -x\}$. Tekijäavaruus

$$P^n = S^n/R$$

on n-ulotteinen *projektiivinen avaruus*. Voidaan sanoa, että P^n on saatu S^n:stä samaistamalla sen vastakkaiset pisteet. Samaistuksen suorittaa projektio $p : S^n \to P^n$.

Olkoon $\alpha : S^n \to S^n$ antipodikuvaus: $\alpha(x) = -x$
$\Rightarrow$ α on homeomorfismi, $A \subset S^n$
$\Rightarrow$ $p^{-1}pA = A \cup \alpha A$, A avoin
$\Rightarrow$ αA avoin
$\Rightarrow$ $p^{-1}pA$ avoin
$\Rightarrow$ $pA \overset{\circ}{\subset} P^n$
$\Rightarrow$ p on avoin kuvaus.

Jos $p(x) \neq p(y)$, niin $x \neq y$ ja $x \neq -y$ $\Rightarrow$ $\exists$ x:n ympäristö U ja y:n ympäristö V siten, että

$$U \cap (V \cup \alpha V) = \emptyset$$

$\Rightarrow$ $pU \cap pV = \emptyset$
$\Rightarrow$ P^n on Hausdorff-avaruus.

Osoitamme, että $P^1 \approx S^1$. Käyttäen kompleksimerkintöjä määrittelemme kuvauksen $f : S^1 \to S^1$, $f(z) = z^2$, f surjektio,

$$f(x) = f(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y \ \text{ tai } \ x = -y \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = p(y)$$

$\Rightarrow$ $\exists$ yksikäsitteisesti määrätty kuvaus $f^* : P^1 \to S^1$, jolla $f^*p = f$. Lisäksi f^* on bijektio, sillä

$$f^*\big(p(x)\big) = f^*\big(p(y)\big) \ \Rightarrow \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ p(x) = p(y) \ \Rightarrow \ f^* \text{ injektio}$$

ja f^*:n surjektiivisuus seuraa siitä, että f on surjektio.

Lause 6.4 $\Rightarrow f^* : P^1 \to S^1$ jatkuva $\Leftrightarrow f = f^*p : S^1 \to S^1$ jatkuva, mikä polynomina pitää paikkansa. Siis $P^1 = p(S^1)$ on kompakti, jolloin Lauseesta 2.11 seuraa, että $f^* : P^1 \to S^1$ on homeomorfismi. Voidaan osoittaa, etteivät P^n ja S^n ole homeomorfiset, kun $n \geq 2$.

6.6. **Merkintä.** Olkoon X avaruus ja $A \subset X$. Merkinnällä

$$X/A$$

tarkoitetaan X:n tekijäavaruutta, jonka luokkina ovat A ja yksiöt

$$\{x\},\ x \in X \setminus A.$$

6.7. **Huomautuksia.** X/A:n voidaan ajatella syntyvän X:stä, kun joukko A luhistetaan pisteeksi. Luhistamisen suorittaa projektio $p : X \to X/A$. Se määrittelee jatkuvan bijektion

$$p_0 : X \setminus A \to (X/A) \setminus \{A\},$$

joka ei aina ole homeomorfismi. Osoitamme, että näin kuitenkin on, jos A on suljettu.

Jos $U \overset{\circ}{\subset} X \setminus A$, niin $U \overset{\circ}{\subset} X$ ja koska $U = p^{-1}pU$, niin $pU \overset{\circ}{\subset} X/A$, mistä seuraa, että p_0 on avoin ja siis homeomorfismi. Lisäksi p on suljettu, sillä jos $F \overset{c}{\subset} X$, niin $p^{-1}pF$ on F tai $F \cup A$ ja siis suljettu, mistä Lauseen 5.4 nojalla seuraa $pF \overset{c}{\subset} X/A$.

Käsitettä X/A käytetäänkin lähes yksinomaan suljetuilla joukoilla A.

6.8. **Esimerkki.** Jos X on avaruus ja $x_0 \in X$, on pari (X, x_0) *kantapisteavaruus* ja x_0 sen *kantapiste*. Siis kantapisteavaruus on avaruus, jossa yksi piste on asetettu erikoisasemaan.

Olkoot $\{(X_j, x_j)\}_{j \in J}$ perhe kantapisteavaruuksia. Niiden *yhden pisteen yhdiste*

$$X = \bigvee_{j \in J} X_j$$

saadaan liimaamalla avaruudet X_j yhteen kantapisteistään. Täsmällisesti tämä tehdään seuraavasti: Muodostetaan ensin erillinen yhdiste

$$X' = \bigsqcup_{j \in J} X_j$$

(kohta 5.3). Merkintöjen helpottamiseksi oletamme, että X_j:t ovat erillisiä, jolloin X' on tavalllinen yhdiste $\cup\{X_j : j \in J\}$. Olkoot $A = \{x_j : j \in J\} \subset X'$. Tällöin $X = X'/A$.

Oletamme, että jokainen yksiö $\{x_j\}$ on suljettu, näin on esimerkiksi jos X_j:t ovat Hausdorff-avaruuksia. Merkitsemällä kuten 5.3:ssa inkluusioita $f_j : X_j \to X'$ nähdään, että

$$f_j^{-1}A = \{x_j\} \subset_c X_j,$$

mistä Lauseen 5.4 nojalla seuraa $A \subset_c X'$. Siis 6.7:n nojalla $p : X' \to X$ on suljettu. Koska $X_j \subset_c X'$ (kohta 5.3), niin $p|_{X_j}$ *upottaa* X_j:n X:n suljetuksi osajoukoksi. Voidaan osoittaa, että X:n topologia on upotusten $p|_{X_j} : X_j \to X$ koindusoima.

Jos $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^1$ kantapisteenä origo, niin $X_1 \vee X_2$ on homeomorfinen tason $\mathbb{R}^2$ koordinaattiakselien muodostaman joukon kanssa (tehtävä 10). Vastaava ääretönulotteinen tulos ei pidä paikkaansa.

6.9. **Kuvauksen kanoninen hajotelma.** Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, missä aluksi oletamme vain, että X ja Y ovat joukkoja. Määrittelemme X:ssä relaation R_f asettamalla

$$aR_fb, \quad \text{jos} \quad f(a) = f(b).$$

Selvästi R_f on ekvivalenssi. Ekvivalenssiluokat ovat $p(x) = f^{-1}\{f(x)\}$. Siis X/R_f:n alkioina ovat fX:n pisteiden alkukuvat eli *säikeet*. Olkoon $f^* : X/R_f \to Y$ se kuvaus, joka kuvaa säikeen $f^{-1}\{y\}$ y:hyn, ts. $f^*\big(p(x)\big) = f(x)$. Tällöin saadaan f:n *kanoninen hajotelma* $f = f^* \circ p$ eli kaaviolla

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \\ & X/R_f \arrow[ur, "f^*"'] & \end{tikzcd}$$

Tässä p on surjektio ja f^* injektio.

Siirrymme käsittelemään tapausta, missä X ja Y ovat avaruuksia ja f on jatkuva.

6.10. **Lause.** Jos $f : X \to Y$ on jatkuva, niin $f^* : X/R_f \to Y$ on jatkuva. Lisäksi f^* on homeomorfismi $\Leftrightarrow$ f on samaistuskuvaus.

Todistus. Koska $f^*p = f$ on jatkuva, seuraa f^*:n jatkuvuus Lauseesta 5.5.

($\Leftarrow$) Olkoon f samaistuskuvaus $\Rightarrow$ f on surjektio $\Rightarrow$ f^* on jatkuva bijektio. Osoitamme, että f^* on avoin. Olkoon $U \subset_o X/R_f$. Tällöin

$$f^{-1}f^*U = (f^*p)^{-1}f^*U = p^{-1}{f^*}^{-1}f^*U = p^{-1}U,$$

koska f^* on bijektio $\Rightarrow$ $f^{-1}f^*U \subset_o X$. Koska f on samaistuskuvaus $\Rightarrow$ $f^*U \subset_o Y$ $\Rightarrow$ f^* on homeomorfismi.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että f^* on homeomorfismi $\Rightarrow$ f on selvästi jatkuva surjektio. Olkoon $V \subset Y$ ja $f^{-1}V \circledcirc X$; on osoitettava, että $V \circledcirc Y$. Nyt

$$p^{-1}f^{*^{-1}}V = f^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{*^{-1}}V \circledcirc X/R_f$$

Huomautuksen 6.3 nojalla. Koska f^* on homeomorfismi,

$$V = f^* f^{*^{-1}} V \circledcirc Y.$$

$\square$

6.11. **Esimerkkejä.** 1. Olkoon $f : I \to S^1$ kuvaus

$$f(t) = e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t,$$

missä $I = [0, 1]$. Tällöin f on surjektio. Koska I on kompakti, f on suljettu (Lause 2.7) ja siis Lauseen 5.8 nojalla samaistuskuvaus. Säikeet $f^{-1}(y)$ ovat

$$\{0, 1\} \text{ ja yksiöt } \{t\},\ 0 < t < 1.$$

Siis $f^* : I/\{0, 1\} \approx S^1$. Havainnollisesti voidaan ajatella, että janan I päätepisteet liimataan yhteen, jolloin syntyy ympyrä.
2. Olkoon X neliö I^2. Olkoon R se X:n relaatio, jonka luokkina ovat parit

$$\{(0, y), (1, y)\} \text{ ja yksiöt } \{(x, y)\},\ 0 < x < 1,\ 0 \le y \le 1.$$

Kuten esimerkissä 1 nähdään, että X/R on homeomorfinen *lieriön vaipan* $S^1 \times I$ kanssa. Se siis syntyy kun I^2 kierretään rullalle ja pystysivut liimataan yhteen.
3. Olkoon taas $X = I^2$, jossa relaation R luokiksi valitaan edellisessä esimerkissä esitettyjen parien lisäksi parit

$$\{(x, 0), (x, 1)\}, 0 < x < 1;$$

lisäksi luokkina ovat neliön sisäpisteiden yksiöt ja nurkkapisteiden muodostama neljän pisteen joukko. Ts.

$$(x, y)R(x', y') \ \Leftrightarrow\ \{|x - x'|, |y - y'|\} \subset \{0, 1\}.$$

Tällöin $X/R \approx S^1 \times S^1$, mistä seuraa, että X/R on homeomorfinen *toruksen* kanssa. Tämän voimme havainnollisesti ajatella syntyvät lieriön vaipasta $S^1 \times I$ liimaamalla sen pääty-ympyrät yhteen.
4. Olkoon jälleen $X = I^2$. Relaation R luokiksi valitsemme parit

$$\{(0, y), (1, 1 - y)\} \text{ ja yksiöt } \{(x, y), 0 < x < 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

Tekijäavaruus X/R on nimeltään *Möbiuksen nauha*. Se syntyy, kun I^2:n pystysivut liimataan yhteen siten, että toinen niistä käännetään ennen liimausta ylösalaisin.
5. Liimaamme edellisessä esimerkissä myös vaakasivut yhteen. Tätä ei voi tehdä konkreettisesti, ja tuloksesta on vaikea saada havainnollista mielikuvaa. Jos

yhdistetään päällekkäiset pisteet $(x, 0)$ ja $(x, 1)$, saadaan *Kleinin pullo*. Jos yhdistetään pisteet $(x, 0)$ ja $(1 - x, 1)$, saadaan *projektiivinen taso* P^2, joka on homeomorfinen esimerkissä 6.5 määritellyn P^2:n kanssa.

7. Metriset ja metristyvät avaruudet

7.1. **Kertausta ja täydennystä.** Joukon X *metriikka* on kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}^1$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,
(2) $d(x,y) = d(y,x)$,
(3) $d(x,x) = 0$,
(4) Jos $d(x,y) = 0$, niin $x = y$.

Jos d toteuttaa ehdot (1), (2) ja (3), se on X:n *pseudometriikka*. Näistä seuraa $d(x,y) \geq 0$, sillä

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

Jokainen metriikka on pseudometriikka. Tasossa $\mathbb{R}^2$ kaava

$$d(x,y) = |x_1 - y_1|,$$

missä $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$, määrittelee pseudometriikan. Se ei ole metriikka, sillä valitsemalla pisteet $x = (x_1, 1)$, $y = (x_1, 2)$ saadaan

$$d(x,y) = |x_1 - x_1| = 0,$$

mutta $x = (x_1, 1) \neq (x_1, 2) = y$.

Olkoon d joukon X pseudometriikka. Jos $x \in X$ ja $r > 0$, määrittelemme avoimen kuulan

$$B(x,r) = \{y \in X : d(y,x) < r\},$$

jolle voimme tarvittaessa käyttää merkintää $B_d(x,r)$. Pseudometriikka d määrittelee X:n topologian T_d, jonka kantana ovat kuulat $B(x,r)$. Se, että ne todella muodostavat kannan, todetaan kuten metriikkojen tapauksessa (Kantakriteeri B). Kuulat $B(x,r), r > 0$, muodostavat pisteen x ympäristökannan.

Jos pseudometriikka d ei ole metriikka, on olemassa X:n pisteet $x \neq y$, joilla $d(x,y) = 0$. Tällöin $y \in B(x,r)\ \forall\ r > 0$, joten näillä pisteillä ei ole erillisiä ympäristöjä, eikä siis (X, T_d) ole Hausdorff-avaruus. Kääntäen, jos d on metriikka, niin (X, T_d) on Hausdorff. Siis pseudometriikka on metriikka jos ja vain jos se määrittelee Hausdorff-topologian.

Pari (X,d) on *pseudometrinen* (tai *metrinen*) *avaruus*, jos d on X:n pseudometriikka (tai metriikka). Vaikka d määritteleekin topologisen avaruuden (X, T_d), on väärin sanoa (X,d):tä topologiseksi avaruudeksi. Esimerkiksi (X,d) ja $(X, 2d)$ ovat yleensä eri pseudometrisiä (tai metrisiä) avaruuksia, mutta vastaavat topologiset avaruudet (X, T_d) ja (X, T_{2d}) ovat samat (kunkin muodostamat topologioiden kannat ovat samat). Tällaisia pseudometriikkoja, jotka määrittelevät saman topologian, sanotaan *topologisesti ekvivalenteiksi.*

Kaikkia joukon X topologioita ei yleensä voida määritellä metriikan tai pseudometriikan avulla. Topologinen avaruus (X, T) on *metristyvä*, jos on olemassa sellainen X:n metriikka d, että $T_d = T$. Vastaavasti määritellään *pseudometristyvä* avaruus.

Esimerkiksi avaruus $(\mathbb{R}^1, T_{mini})$ ei ole metristyvä. Se on kuitenkin pseudometristyvä. Asetetaan $d(x, y) = 0 \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^1$. Pitää paikkansa $T_{mini} = T_d$, sillä topologian T_d kannan joukot ovat muotoa

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^1 : d(x, y) < r\} = \mathbb{R}^1,$$

missä $r > 0$. Väite seuraa. Avaruus $(\mathbb{R}^1, T_{mini})$ ei ole metristyvä, koska jos jollekin $x, y \in \mathbb{R}^1$, $d(x, y) = r > 0$, silloin

$$\begin{aligned} &B\left(x, \frac{r}{2}\right) \in T_d \quad \text{ja} \quad y \notin B\left(x, \frac{r}{2}\right) \\ \Rightarrow &B\left(x, \frac{r}{2}\right) \neq \mathbb{R}^1 \\ \Rightarrow &T_d \neq T_{mini} \end{aligned}$$

Jokainen diskreetti avaruus on metristyvä; vaadittu metriikka saadaan asettamalla $d(x, y) = 1$, jos $x \neq y$, ja $d(x, x) = 0$. Metriikan d määrittelemän topologian T_d kannan joukko on muotoa

$$B_{T_d}(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r\}.$$

Valitaan $r = 1 \Rightarrow B_{T_d}(x, 1) = \{y \in X : d(y, x) < 1\} = \{x\}$ eli $\{x\} \in T_d$ ja siis T_d on diskreetti topologia, mistä väite seuraa.

Kahden pisteen avaruus $X = \{a, b\}$, jossa avoimia joukkoja ovat $\emptyset, \{a\}$ ja X, ei ole pseudometristyvä. Jos d on pseudometriikka X:ssä, on joko

1) $d(a, b) > 0$ tai
2) $d(a, b) = 0$.

Tällöin tapauksessa 1) topologian T_d kannan joukko

$$B_{T_d}\left(b, \frac{d(a, b)}{2}\right) = \left\{y \in X : d(y, b) < \frac{d(a, b)}{2}\right\} = \{b\}$$

eli $\{b\} \in T_d$. Mutta $\{b\}$ ei ole avoin joukko X:n alkuperäisessä topologiassa. Tapauksessa 2) kaikki kannan joukot

$$B_{T_d}(a, r) = X = B_{T_d}(b, r)$$

eli $T_d = T_{mini}$ ja siis $\{a\} \notin T_d$. Kaiken kaikkiaan $T_d \neq \{\emptyset, \{a\}, X\}$.

Yksinkertaisuuden vuoksi rajoitumme seuraavassa metrisiin avaruuksiin, vaikka monet tulokset voidaan helposti todistaa myös pseudometrisille avaruuksille.

Metrisyys on *perinnöllinen ominaisuus*: Jos X on metristyvä ja $A \subset X$, niin A on metristyvä. Vaadittu A:n metriikka saadaan X:n metriikan rajoittumana.

Metristyvyys on *topologinen ominaisuus*: Jos X on metristyvä ja $Y \approx X$, niin Y on metristyvä.

Todistus. Olkoon $f : Y \approx X$ ja d X:n topologian määräämä metriikka. Asettamalla $e(a,b) = d\big(f(a), f(b)\big)$ saadaan Y:n metriikka e. Koska f on homeomorfismi, niin Y:n kannan muodostavat joukot $f^{-1}B_d(x,r) = B_e\big(f^{-1}(x), r\big)$. Siis T_e on Y:n alkuperäinen topologia. $\square$

Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq A \subset X$. Joukon A *läpimitta* eli halkaisija on

$$d(A) = \sup\{d(x,y) : x \in A, y \in A\}.$$

Lisäksi määritellään $d(\emptyset) = 0$. Jos $\emptyset \neq A \subset X$ ja $\emptyset \neq B \subset X$, on joukkojen A ja B välinen *etäisyys*

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

Pisteen x etäisyys joukosta $A \neq \emptyset$ on $d(x,A) = d(\{x\}, A)$.

Jos $d(A) < \infty$, A on *rajoitettu*. Jos $d(X) < \infty$, sanomme myös, että d on rajoitettu. Kuvaus $f : Y \to X$ on rajoitettu, jos fY on rajoitettu joukko.

7.2. **Lause.** Jos d on X:n metriikka, niin kaava

$$e(x,y) = \min\big(1, d(x,y)\big)$$

määrittelee X:n metriikan e, joka on topologisesti ekvivalentti d:n kanssa.

Todistus.

(a) Todetaan heti, että metriikan ehdot (2),(3) ja (4) ovat voimassa e:lle. Todistaaksemme kolmioepäyhtälön (1) oletamme $x, y, z \in X$. Tällöin

$$e(x,z) \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Jos tässä molemmat yhteenlaskettavat ovat pienemmät kuin yksi, antaa tämä heti kolmioepäyhtälön e:lle. Jos taas toinen on ≥ 1 (esim. $d(x,y) \geq 1$) saadaan

$$e(x,z) \leq 1 \leq e(x,y) \leq e(x,y) + e(y,z).$$

Siis e on X:n metriikka.

(b) Jos $r < 1$, niin $B_d(x,r) = B_e(x,r)$. Koska tällaiset kuulat muodostavat topologioiden T_d ja T_e kannat, $T_d = T_e$.

$\square$

7.3. **Seuraus.** Jokainen metriikka on topologisesti ekvivalentti rajoitetun metriikan kanssa.

7.4. **Karteesiset tulot.** Olkoot (X_j, d_j), $j \in J$, metrisiä avaruuksia. Muodostamme tulojoukon

$$X = \prod_{j \in J} X_j.$$

Topologioiden T_{d_j} tulotopologia tekee X:stä topologisen avaruuden. On luonnollista kysyä, onko X metristyvä. Voidaan osoittaa, että jos J on äärellinen, esim. $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, niin vastaus on myönteinen ja erään metriikan määrittelee kaava

$$d(x, y) = \max\{d_j(x_j, y_j) : 1 \leq j \leq n\}.$$

On helppo osoittaa, että myös kaavat

$$d'(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j), \qquad d''(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

määrittelevät X:lle metriikat, joiden määräämät topologiat ovat samat kuin X:n tulotopologia ja jotka siis ovat d:n kanssa topologisesti ekvivalentteja. (Nyt

$$d(x, y) \leq d'(x, y) \leq nd(x, y) \;\Rightarrow\; T_d = T_{d'}.$$

Lisäksi

$$d''(x, y)^2 = \sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)^2 \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j) \Big)^2 = d'(x, y)^2$$

ja

$$d'(x, y)^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j) \Big)^2 \leq n^{2-1} \Big(\sum_{j=1}^{n} d_j(x_j, y_j)^2 \Big) = nd''(x, y)^2,$$

joten

$$d''(x, y) \leq d'(x, y) \leq \sqrt{n} d''(x, y) \;\Rightarrow\; T_{d'} = T_{d''}. \Big)$$

Jos J on ylinumeroituva, ei X ole metristyvä, mikäli avaruuksissa X_j on vähintään kaksi alkiota kussakin (Huomautus 9.3). Numeroituvalle J:lle antaa seuraava lause vastauksen:

7.5. **Lause.** Metristyvien avaruuksien numeroituva tulo on metristyvä.

Todistus. Koska äärellinen tapaus on jo käsitelty, voimme olettaa, että $J = \mathbb{N}$. Kohdassa 7.4 määriteltyjen metriikkojen d, d', d'' suora yleistys johtaisi äärettömiin etäisyyksiin. Voimme kuitenkin määritellä avaruuden $X = \prod_{j\in\mathbb{N}} X_j$ metriikan modifioimalla ensin sopivasti mitä tahansa näistä metriikoista. Teemme tämän d:lle. Lauseen 7.2 nojalla voidaan olettaa, korvaamalla tarvittaessa d_j metriikalla $\min(1, d_j)$, että $d_j(x_j, y_j) \le 1\ \forall x_j, y_j \in X_j$. Väitämme, että kaava

$$d(x,y) = \max_{j\in\mathbb{N}} \frac{d_j(x_j,y_j)}{j}$$

määrittelee X:n metriikan d ja että T_d on X:n tulotopologia. Koska

$$\frac{d_j(x_j,y_j)}{j} \le \frac{1}{j} \overset{j\to\infty}{\to} 0,$$

maksimi todella saavutetaan.

Olkoot $x, y, z \in X$. Tällöin $\forall\ j \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$\frac{d_j(x_j,z_j)}{j} \le \frac{d_j(x_j,y_j)}{j} + \frac{d_j(y_j,z_j)}{j} \le d(x,y) + d(y,z),$$

mistä seuraa kolmioepäyhtälö $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$. Metriikan ehdot (2) ja (3) ovat selvästi voimassa. Todistaaksemme ehdon (4) oletamme, $d(x,y) = 0$. Tällöin $d_j(x_j,y_j)/j = 0\ \forall\ j \in \mathbb{N}$, joten $x_j = y_j\ \forall\ j \in \mathbb{N}$ eli $x = y$. Siis d on X:n metriikka.

Seuraavaksi osoitamme, että $T_d \subset T$. Tätä varten riittää todistaa, että mielivaltainen d-kuula $B(x,r) \in T$. Tämä seuraa yhtälöstä

$$B(x,r) = \cap\Big\{P_j^{-1}B(x_j, jr) : j \le \frac{1}{r}\Big\},$$

mikä todetaan päättelyketjulla

$$\begin{aligned}
y \in B(x,r) &\Leftrightarrow d(x,y) < r \\
&\Leftrightarrow d_j(x_j,y_j)/j < r\ \forall j \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow d_j(x_j,y_j) < jr,\ \text{kun } j \le \frac{1}{r} \\
&\Leftrightarrow y_j \in B(x_j, jr)\ \forall\ j \le \frac{1}{r} \\
&\Leftrightarrow P_j(y) \in B(x_j, jr)\ \forall\ j \le \frac{1}{r} \\
&\Leftrightarrow y \in P_j^{-1}B(x_j, jr)\ \forall\ j \le \frac{1}{r} \\
&\Leftrightarrow y \in \cap\{P_j^{-1}B(x_j, jr) : jr \le 1\},
\end{aligned}$$

missä on käytetty tietoa $d_j \le 1$.

Lopuksi todistamme, että $T \subset T_d$. Tätä varten riittää osoittaa, että T:n esikanta sisältyy T_d:hen. Olkoon siis $U \ominus X_j$; on osoitettava, että $P_j^{-1}U \in T_d$. Olkoon $x \in P_j^{-1}U$ $(U \in T_j)$

$\Rightarrow$ $x_j = P_j(x) \in U$
$\Rightarrow$ $U \in T_{d_j}$, sillä $T_{d_j} = T_j$ (X_j metristyvä), joten $\exists\ r > 0$ siten, että $B(x_j, r) \subset U$
$\Rightarrow$ $B(x, r/j) \subset P_j^{-1}U$, koska jos $y \in B(x, r/j)$, niin $d(y, x) < r/j$
$\Rightarrow$ erityisesti $d_j(x_j, y_j)/j < r/j$
$\Rightarrow$ $d_j(x_j, y_j) < r$
$\Rightarrow$ $y_j \in B(x_j, r)$
$\Rightarrow$ $P_j(y) \in B(x_j, r)$
$\Rightarrow$ $y \in P_j^{-1}B(x_j, r) \subset P_j^{-1}U$
$\Rightarrow$ $B(x, r/j) \subset P_j^{-1}U$
$\Rightarrow$ Tulotopologian T esikannan joukko $P_j^{-1}U$ on avoin metriikan d määrittelemässä topologiassa T_d
$\Rightarrow$ $P_j^{-1}U \in T_d$.

$\square$

7.6. **Seuraus.** Hilbertin kuutio $I^{\mathbb{N}}$ on metristyvä.

7.7. **Lause.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq A \subset X$. Tällöin

$$|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$, joten kuvaus $f : X \to \mathbb{R}^1$, $f(x) = d(x, A)$, on jatkuva.

Todistus. Jokaisella $a \in A$ on voimassa

$$d(x, A) \le d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a).$$

Ottamalla infimum yli $a \in A$ saadaan

$$d(x, A) \le d(x, y) + d(y, A)$$

ja siis

$$d(x, A) - d(y, A) \le d(x, y).$$

Vaihtamalla x:n ja y:n roolit saadaan

$$d(y, A) - d(x, A) \le d(x, y).$$

Lopuksi saamme

$$-d(x, y) \le d(x, A) - d(y, A) \le d(x, y).$$

$\square$

7.8. **Lause.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $\emptyset \neq A \subset X$. Tällöin

$$\overline{A} = \{x \in X : d(x, A)) = 0\}.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} x \in X \setminus \overline{A} &\Leftrightarrow x \text{ ei ole } A\text{:n kosketuspiste} \\ &\Leftrightarrow \exists\, B(x, r) \subset X \setminus A \\ &\Leftrightarrow d(x, A) > 0. \end{aligned}$$

□

7.9. **Määritelmä.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin X:n jono s on *Cauchy-jono*, jos $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(s_n, s_k) < \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$ ja $k \geq n_0$.

Metrinen avaruus on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

7.10. **Lause.** Metrisen avaruuden jokainen suppeneva jono on Cauchy.

Todistus. Olkoon s X:n jono, joka suppenee kohti pistettä $a \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$d(s_n, a) < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $n \geq n_0$. Jos $n \geq n_0$ ja $k \geq n_0$, niin

$$d(s_n, s_k) \leq d(s_n, a) + d(s_k, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Siis s on Cauchy-jono. □

7.11. **Lause.** Täydellisen metrisen avaruuden osajoukko on täydellinen jos ja vain jos se on suljettu.

Todistus.

($\Leftarrow$) Olkoon (X, d) täydellinen ja $A \subset X$ suljettu. Olkoon s A:n Cauchy-jono. Tällöin s suppenee kohti pistettä $x \in X$. Koska A on suljettu, niin $x \in \overline{A} = A$ (Lause 1.6). Siis A on täydellinen.

($\Rightarrow$) Oletamme kääntäen, että $A \subset X$ on täydellinen. Olkoon $x \in \overline{A}$
$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, s_n \in A \cap B(x, 1/n)$
$\Rightarrow$ näin saatu jono $s = (s_n)$ suppenee kohti pistettä x
$\Rightarrow$ s on Cauchy-jono (Lause 7.10)
$\Rightarrow$ A on täydellinen
$\Rightarrow$ s suppenee kohti A:n pistettä $x \in A$ ($d(s_n, x) \overset{n \to \infty}{\to} 0$)
$\Rightarrow \overline{A} \subset A$, jolloin $\overline{A} = A$
$\Rightarrow$ A on suljettu

□

7.12. **Huomautuksia.** On tunnettua, että $\mathbb{R}^1$ ja $\mathbb{R}^n$ ovat täydellisiä. Myös $[0,1]$ on täydellinen, mutta $(0,1)$ ei ole. Täydellisyys ei ole topologinen ominaisuus (ei säily homeomorfismeissa), sillä $\mathbb{R}^1$ ja $(0,1)$ ovat homeomorfiset. Täydellisyydestä seuraa kuitenkin tärkeitä topologisia ominaisuuksia, joista huomattavin on seuraava Bairen lause.

7.13. **Bairen lause.** Olkoon (X,d) täydellinen metrinen avaruus ja $G_1, G_2, \ldots$ jono X:n tiheitä avoimia joukkoja. Tällöin

$$G = \cap\{G_j : j \in \mathbb{N}\}$$

on tiheä.

Todistus. Olkoon $\emptyset \neq U \mathrel{\overset{\circ}{\subset}} X$; on osoitettava, että $U \cap G \neq \emptyset$. Konstruroimme induktiolla X:n pistejonon $x_1, x_2, \ldots$ ja jonon kuulia $V_j = B(x_j, r_j)$ seuraavasti:

Koska G_1 on tiheä, voidaan valita piste $x_1 \in U \cap G_1$. Koska $U \cap G_1$ on avoin, on olemassa sellainen $V_1 = B(x_1, r_1)$ että $\overline{V_1} \subset U \cap G_1$ ja $r_1 < 1$. Oletamme, että x_j ja V_j on valittu, kun $j < n$. Koska G_n on tiheä, voimme valita pisteen $x_n \in V_{n-1} \cap G_n$. Koska $V_{n-1} \cap G_n$ on tiheä, on olemassa sellainen $V_n = B(x_n, r_n)$ että $\overline{V_n} \subset V_{n-1} \cap G_n$ ja $r_n < 1/n$. Tällöin siis $V_{n+1} \subset V_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Osoitamme, että jono (x_n) on Cauchy-jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitsemme sellaisen luvun $n_0 \in \mathbb{N}$ että $2/n_0 < \varepsilon$. Jos nyt $n \geq n_0$ ja $k \geq n_0$, niin $x_n \in V_n \subset V_{n_0}$ ja $x_k \in V_k \subset V_{n_0}$, joten

$$d(x_n, x_k) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_k) < r_{n_0} + r_{n_0} = 2r_{n_0} < 2/n_0 < \varepsilon.$$

Siis (x_n) on Cauchy.

Koska X on täydellinen, (x_n) suppenee kohti jotakin X:n pistettä a. Osoitamme, että $a \in U \cap G$. Koska $x_n \in V_n \subset V_k$, kun $n \geq k$, niin $a \in \overline{V_k} \subset G_k \; \forall\, k \in \mathbb{N}$. Siis $a \in \cap\{G_k : k \in \mathbb{N}\} = G$. Lisäksi $a \in \overline{V_1} \subset U$. □

7.14. **Seuraus.** (Bairen lauseen toinen muoto) Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $F_1, F_2, \ldots$ jono X:n suljettuja joukkoja, joilla ei ole sisäpistettä. Tällöin joukolla

$$\cup\{F_j : j \in \mathbb{N}\}$$

ei ole sisäpisteitä.

Todistus. F_i on X:n suljettu joukko, jolla ei ole sisäpistettä
$\Rightarrow \forall\, x \in F_i$ ja $\forall\, U \mathrel{\overset{\circ}{\subset}} X$, $x \in U$, $U \cap X \setminus F_i \neq \emptyset$ $(U \not\subset F_i)$
$\Rightarrow X \setminus F_i$ on avoin joukko ja $X \setminus F_i$ on tiheä X:ssä
$\Rightarrow X \setminus \cup_{i \in \mathbb{N}} F_i = \cap_{i \in \mathbb{N}} X \setminus F_i$ on tiheä X:ssä (Bairen lause)

$\Rightarrow \forall\, U \Subset X,\, U \cap \big(X \setminus \cup_{i\in\mathbb{N}} F_i\big) \neq \emptyset$
$\Rightarrow \forall\, U \Subset X,\, U \not\subset \cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$
$\Rightarrow$ joukolla $\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ ei ole sisäpisteitä. □

7.15. **Lause.** Jos $X \neq \emptyset$ on numeroituva täydellinen metrinen avaruus, niin X:ssä on ainakin yksi eristetty piste.

Todistus. Koska X on numeroituva, se voidaan esittää muodossa

$$X = \cup\{F_j : j \in \mathbb{N}\},$$

missä jokainen F_j on yksiö $\{x_j\}$. Jos x_j ei ole eristetty piste
$\Rightarrow U \Subset X,\, x_j \subset U,\, U \cap X$ sisältää vähintään 2 pistettä
$\Rightarrow U \not\subset \{x_j\}$
$\Rightarrow x_j$ ei ole joukon $\{x_j\} = F_j$ sisäpiste
$\Rightarrow \mathrm{int} F_j = \mathrm{int}\{x_j\} = \emptyset$
Lisäksi jokainen F_j on suljettu. Jos lause ei ole totta, seuraa Seurauksesta 7.14, että

$$\mathrm{int} \cup \{F_j : j \in \mathbb{N}\} = \mathrm{int} X = X \neq \emptyset,$$

mikä on ristiriita. □

7.16. **Huomautuksia.** Jos Lauseessa 7.15 X on äärellinen, sen jokainen piste on eristetty. Jos X on ääretön, sillä on äärettömän monta eristettyä pistettä. Jos näet niitä olisi vain äärellinen joukko, sanokaamme $\{x_1, \ldots, x_n\} = A$, niin $X \setminus A$ olisi suljettu ja siis täydellinen, joten myös siinä olisi eristetty piste (Lause 7.15), joka on selvästi eristetty myös X:ssä.

Lauseesta 7.15 saamme välittömästi uuden todistuksen sille, että $\mathbb{R}^1$ on ylinumeroituva.

7.17. **Tasainen suppeneminen.** Olkoon X joukko ja (Y, d) metrinen avaruus. Jono kuvauksia $f_n : X \to Y$ *suppenee tasaisesti* kohti kuvausta $g : X \to Y$, jos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} d\big(f_n(x), g(x)\big) = 0.$$

Määritelmä on sama kuin tapauksessa $Y = \mathbb{R}^1$ ja $X \subset \mathbb{R}^1$. Jos erityisesti Y on $\mathbb{R}^1$ tai yleisemmin normiavaruus, voidaan tavalliseen tapaan määritellä *sarjan* tasainen suppeneminen palauttamalla se osasummien muodostamaan jonoon.

Määritelmässä on olennaista, että Y on metrinen. Jos maaliavaruus on vain topologinen, ei tasaisesta suppenemisesta puhuminen ole mielekästä.

7.18. **Lause.** Olkoon $f_n : X \to Y$ jono jatkuvia kuvauksia topologisesta avaruudesta (X, T) metriseen avaruuteen (Y, d). Jos $f_n \to g$ tasaisesti, niin g on jatkuva.

7.19. **Lause.** (Weierstrassin testi) Olkoon X joukko, $u_n : X \to \mathbb{R}^1$ kuvauksia ja $M_n \geq 0$ siten, että

$$|u_n(x)| \leq M_n \quad \forall\, x \in X \text{ ja } \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Jos sarja $\sum_n M_n$ suppenee, niin sarja $\sum_n u_n$ suppenee tasaisesti.

8. Erotteluaksiomat

Tässä pykälässä esitämme ns. erottelu- eli T-aksiomat. Näistä T_2 eli Hausdorffin aksioma on tuttu.

8.1. **Määritelmä.** Avaruus X on *T_j-avaruus*, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, jos se toteuttaa alla olevan ehdon T_j:

T_0: Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin ainakin toisella pisteistä a, b on ympäristö, johon toinen ei kuulu.

T_1: Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin kummallakin pisteistä a, b on ympäristö, johon toinen toinen ei kuulu.

T_2: Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin pisteillä a ja b on erilliset ympäristöt.

T_3: Jos $a \in X$, $B \Subset X$ ja $a \notin B$, niin a:lla ja B:llä on erilliset ympäristöt.

T_4: Jos $A \subset X$ ja $B \subset X$ ovat erillisiä ja suljettuja, niin niillä on erilliset ympäristöt.

Jos X on T_2, se on *Hausdorff-avaruus.* Jos X on T_1 ja T_3, se on *säännöllinen.* Jos X on T_1 ja T_4, se on *normaali.*

8.2. **Huomautuksia.** Käsitteiden T_0 ja T_1 merkitys on melko vähäinen, koska tärkeimmät avaruudet ovat Hausdorff-avaruuksia ja toteuttavat aina ehdot T_0 ja T_1.

8.3. **Lause.** Avaruus on T_1 jos ja vain jos jokainen yksiö $\{a\}$ on suljettu.

Todistus.

($\Rightarrow$) Olkoon X T_1-avaruus ja $a \in X$. Jos $b \in X \setminus \{a\}$, niin on olemassa b:n ympäristö U, joka ei sisällä a:ta
$\Rightarrow U \subset X \setminus \{a\}$
$\Rightarrow X \setminus \{a\}$ on avoin
$\Rightarrow \{a\} = X \setminus (X \setminus \{a\})$ on suljettu.

($\Leftarrow$) Oletamme, että X:n jokainen yksiö on suljettu. Olkoot $a, b \in X$, $a \neq b$
$\Rightarrow$ $X \setminus \{b\}$ on a:n ympäristö, joka ei sisällä b:tä, ja $X \setminus \{a\}$ on b:n ympäristö, joka ei sisällä a:ta
$\Rightarrow X$ on T_1.

□

8.4. **Seuraus.** Normaali $\Rightarrow$ säännöllinen $\Rightarrow$ Hausdorff $\Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

8.5. **Esimerkkejä.** 1. Jos X:ssä on minitopologia ja vähintään 2 pistettä, X ei ole T_0, sillä jos $(X, T_{mini}) = (X, \{X, \emptyset\})$ ja X sisältää vähintään 2 pistettä $\Rightarrow$ jokaisen alkion ympäristö on koko avaruus X, joka sisältää toisenkin pisteen.
2. Olkoon $X = \{a, b\}$ kahden pisteen avaruus, jossa avoimia joukkoja ovat $\emptyset, \{a\}$ ja X. Tällöin $a \in \{a\}$ (ympäristö) ja $b \notin \{a\} \Rightarrow X$ on T_0. Pisteen b

ainoa ympäristö on X ja $X \ni a \Rightarrow X$ ei ole T_1.
3. X ääretön joukko, $U \overset{\circ}{\subset} X \;\Leftrightarrow U = \emptyset$ tai $X \setminus U$ on äärellinen.
Väite: Jokainen yksiö on suljettu.

Todistus. Olkoon $a \in X$
$\Rightarrow \{a\} = X \setminus (X \setminus \{a\})$ on äärellinen
$\Rightarrow X \setminus \{a\} \overset{\circ}{\subset} X$
$\Rightarrow \{a\} \overset{c}{\subset} X$
$\Rightarrow X$ on T_1 □

Väite: X ei ole T_2.

Todistus. Olkoot $a \neq b$ ja olkoot U_a, U_b pisteiden a, b mielivaltaisia ympäristöjä
$\Rightarrow X \setminus U_a, X \setminus U_b$ ovat äärellisiä
$\Rightarrow U_a$ ja U_b ovat äärettömiä ja $X = U_a \cup (X \setminus U_a) = U_b \cup (X \setminus U_b)$
$\Rightarrow U_a$:lla ja U_b:llä on äärettömän paljon yhteisiä alkioita
$\Rightarrow X$ ei ole T_2 □

8.6. **Lause.** Avaruus X on T_3-avaruus $\Leftrightarrow \forall\ x \in X$ ja $\forall$ ympäristöä $U \ni x$ kohti $\exists$ x:n ympäristö V siten, että $\overline{V} \subset U$.

Todistus.
($\Rightarrow$) Olkoon X T_3. Olkoon $x \in U \overset{\circ}{\subset} X$. Koska $F = X \setminus U$ on suljettu
$\Rightarrow \exists$ ympäristö $V \ni x$ ja ympäristö $W \supset F$ siten, että $V \cap W = \emptyset$
$\Rightarrow V \subset X \setminus W$ suljettu
$\Rightarrow \overline{V} \subset X \setminus W \subset U$
($\Leftarrow$) Olkoon $F \overset{c}{\subset} X$ ja $x \in X \setminus F$
$\Rightarrow U = X \setminus F$ on x:n ympäristö
$\Rightarrow \exists$ x:n ympäristö V siten, että $\overline{V} \subset U$
$\Rightarrow W = X \setminus \overline{V}$ on avoin ja $W \supset X \setminus U = X \setminus (X \setminus F) = F$
$\Rightarrow V$ ja W ovat x:n ja F:n erilliset ympäristöt
$\Rightarrow X$ on T_3.

□

8.7. **Lause.** Ominaisuudet T_0, T_1, T_2 ja T_3 ovat perinnöllisiä.

Lause. Olkoon X avaruuksien X_i tulo, $i \in I$, so. $X = \prod_{i \in I} X_i$ ja olkoot $A_i \subset X_i$. Jos $A = \prod_{i \in I} A_i$, niin $\overline{A} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

Todistus. Olkoon $x = (x_i)_{i \in I} \in \overline{A}$ mielivaltainen piste. Olkoon $i \in I$ ja olkoon $x_i \in U_i \overset{\circ}{\subset} X_i$ (U_i on x_i:n mielivaltainen ympäristö). Projektiokuvaus

$$p_i : X = \prod_{i \in I} X_i \to X_i, \quad p_i(x) = x_i,$$

on jatkuva $\Rightarrow p_i^{-1}U_i$ on pisteen x ympäristö, $x \in \overline{A}$
$\Rightarrow A \cap p_i^{-1}U_i \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ olkoon $y = (y_j)_{j\in I} \in A \cap p_i^{-1}U_i$
$\Rightarrow y_i = p_i(y) \in A_i \cap U_i$
$\Rightarrow A_i \cap U_i \neq \emptyset$
$\Rightarrow x_i \in \overline{A_i}$, $i \in I$ mielivaltainen indeksi
$\Rightarrow x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$
$\Rightarrow \overline{A} \subset \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

Olkoon $x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \overline{A_i}$ mielivaltainen piste ja olkoon U pisteen x mielivaltainen ympäristö. Kohdasta 4.4 Huomautuksia
$\Rightarrow \exists$ kannan joukko $\prod_{i\in I} U_i$ siten, että $x \in \prod_{i\in I} U_i \subset U$
$\Rightarrow x_i \in U_i$ ja U_i on x_i:n ympäristö $\forall\ i \in I$.
Koska $x_i \in \overline{A_i} \Rightarrow A_i \cap U_i \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ olkoon $y_i \in A_i \cap U_i$, $i \in I$
$\Rightarrow y = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i \cap U_i = (\prod_{i\in I} A_i) \cap (\prod_{i\in I} U_i) \subset A \cap U$. $\square$

8.8. **Lause.** Ominaisuudet T_0, T_1, T_2 ja T_3 säilyvät karteesisissa tuloissa.

Todistus. Todistamme tapauksen T_3. Olkoon

$$X = \prod_{j\in J} X_j,$$

missä jokainen X_j on T_3. Olkoon $x \in X$ ja U x:n ympäristö. Tällöin U sisältää muotoa

$$B = \prod_{j\in J} U_j$$

olevan x:n ympäristön, missä $U_j \circledcirc X_j$ $\forall\ j \in J$ ja $U_j = X_j$ lukuunottamatta äärellistä indeksijoukkoa $K \subset J$. Koska X_j on T_3, voimme $\forall\ j \in K$ valita sellaisen x_j:n ympäristön V_j että $\overline{V_j} \subset U_j$ (vrt. 8.6. Lause). Merkitsemme $V_j = X_j$, kun $j \in J \setminus K$. Tällöin $V = \prod_{j\in J} V_j$ on x:n ympäristö ja

$$\overline{V} = \overline{\prod_{j\in J} V_j} = \prod_{j\in J} \overline{V_j} \subset B \subset U.$$

Lauseen 8.6 nojalla X on T_3. $\square$

8.9. **Huomautus.** Ominaisuus T_4 ei ole perinnöllinen. Se ei myöskään säily karteesisessa tulossa.

8.10. **Lause.** Metristyvä avaruus on normaali.

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tunnetusti X on Hausdorff ja siis T_1. Tämä johtuu siitä, että jos on $a \neq b$, niin $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$, kun $r = \frac{d(a,b)}{2}$.

Todistamme ehdon T_4. Olkoot $A, B \subset X$ erillisiä suljettuja joukkoja. Voimme olettaa, että ne eivät ole tyhjiä, sillä muutoin X ja $\emptyset$ ovat haetut ympäristöt. Merkitään

$$U = \{x : d(x,A) < d(x,B)\} \quad \text{ja} \quad V = \{x : d(x,B) < d(x,A)\},$$

jolloin $A \subset U$ ja $B \subset V$. (Olkoon $x \in A$. Tällöin

$$d(x,A) = \inf\{d(x,y) | y \in A\} = d(x,x) = 0.$$

Toisaalta $x \in X \backslash B$ avoin $\Rightarrow \exists\, r > 0$ s.e. $B(x,r) \subset X \backslash B \Rightarrow d(x,y) \geq r \;\forall\, y \in B$ $\Rightarrow d(x,B) = \inf\{d(x,y) | y \in B\} \geq r > 0 \Rightarrow x \in U \Rightarrow A \subset U$) Lauseesta 7.7 (sekä $d(x,A)$ että $d(x,B)$ ovat jatkuvia funktioita) seuraa, että kaava

$$g(x) = d(x,A) - d(x,B)$$

määrittelee jatkuvan kuvauksen $g : X \to \mathbb{R}^1$. Koska

$$U = g^{-1}(-\infty, 0) \quad \text{ja} \quad V = g^{-1}(0, \infty),$$

U ja V ovat avoimia. Koska $U \cap V = \emptyset$, on ehto T_4 tullut todistetuksi. $\square$

8.11. **Seuraus.** Euklidinen avaruus, Hilbertin kuutio ja kaikki niiden osajoukot ovat normaaleja.

9. Numeroituvuusaksioomat

Tässä pykälässä käsittelemme ehtoja, joissa numeroituvuus tulee esille. Näitä on neljä: N_1, N_2, Lindelöf-ominaisuus ja separoituvuus. Tärkein näistä on N_2.

9.1. **Määritelmä.** Avaruus X on *N_j-avaruus*, $j = 1, 2$, jos se toteuttaa allaolevan ehdon N_j:

N_1: Jokaisella pisteellä $a \in X$ on numeroituva ympäristökanta.
N_2: X:llä on numeroituva kanta.

9.2. **Lause.** Jokainen N_2-avaruus on N_1.

Todistus. Jos $\underline{B}$ on X:n kanta, niin $\underline{B}(a) = \{B : a \in B \in \underline{B}\}$ on a:n ympäristökanta. □

9.3. **Esimerkkejä.** 1. $\mathbb{R}^1$ on N_2-avaruus, sillä sen numeroituvan kannan muodostavat välit $(a, b), a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$. Yleisemmin $\mathbb{R}^n$ on N_2; sen numeroituva kanta saadaan tällaisten välien karteesisista tuloista.
2. Diskreetti avaruus X on aina N_1, sillä $\{a\}$ yksinään muodostaa a:n ympäristökannan. X on N_2 vain jos X on numeroituva, sillä jokaisen yksiön $\{a\}, a \in X$, on kuuluttava kantaan. Siis N_2 on aidosti vahvempi ehto kuin N_1.

9.4. **Lause.** Metristyvä avaruus on N_1.

Todistus. Olkoon $a \in X$. $\{B(a, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ on a:n ympäristökanta. □

9.5. **Lause.** Ominaisuudet N_1 ja N_2 ovat perinnöllisiä.

9.6. **Lause.** Olkoon $f : X \to Y$, missä X on N_1-avaruus ja Y avaruus, ja olkoon $a \in X$. Tällöin f on jatkuva pisteessä $a \Leftrightarrow f(x_n) \to f(a)$ $\forall$ X:n jonolle (x_n), jolle $x_n \to a$.

Todistus.

($\Rightarrow$) Oletetaan, että f on jatkuva pisteessä $a \in X$. Olkoon V pisteen $f(a)$ mielivaltainen ympäristö
$\Rightarrow \exists$ a:n ympäristö U siten, että $f(U) \subset V$. Olkoon $x_n \to a$
$\Rightarrow x_n \in U \ \forall\ n \geq n_0$
$\Rightarrow f(x_n) \in f(U) \subset V \ \forall\ n \geq n_0$
$\Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

($\Leftarrow$) Oletetaan, että lauseen ehto on voimassa. Olkoon V $f(a)$:n mielivaltainen ympäristö ja $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ a:n numeroituva ympäristökanta. Korvaamalla B_n joukolla $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ voidaan olettaa, että $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$. Osoitamme, että $f(B_n) \subset V$ jollakin $n \in \mathbb{N}$. Jos näin ei ole, voidaan valita sellaiset pisteet $x_n \in B_n$, että $f(x_n) \notin V$. Tällöin $x_n \to a$, mutta $f(x_n) \not\to f(a)$, mikä on ristiriita.

$\square$

9.7. **Lause.** Olkoon X N_1-avaruus, $A \subset X$ ja $x \in X$. Tällöin $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists$ A:n pisteiden jono, joko suppenee kohti x:ää.

Todistus.

($\Rightarrow$) Olkoon $x \in \overline{A}$. Olkoon $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ x:n numeroituva ympäristökanta. Valitaan kullakin $n \in \mathbb{N}$ piste $a_n \in A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n$. Osoitamme, että $a_n \to x$. Olkoon U x:n mielivaltainen ympäristö. Tällöin U sisältää jonkin B_k:n. Siis

$$\begin{aligned} a_n \in A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_n &= A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_n \\ &\subset A \cap B_1 \cap \cdots \cap B_k \\ &\subset B_k \subset U, \end{aligned}$$

kun $n \geq k$, joten $a_n \to x$.

($\Leftarrow$) Käänteinen väite pätee jopa ilman ehtoa N_1 (Lause 1.6).

$\square$

9.8. **Huomautus.** $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ei toteuta Lauseen 9.7 ehtoa, siis se ei ole N_1 eikä siis myöskään metristyvä. Numeroituville tuloille on kuitenkin voimassa seuraava tulos:

9.9. **Lause.** Ominaisuudet N_1 ja N_2 säilyvät numeroituvissa karteesisissa tuloissa.

Todistus. Todistamme vain tapauksen N_2. Olkoon

$$X = \prod_{j \in J} X_j,$$

missä avaruudet X_j ovat N_2-avaruuksia ja J numeroituva. Siis voitaisiin valita $J = \mathbb{N}$ tai $J = \{1, \ldots, m\}$. Olkoon $\underline{B}_j$ X_j:n numeroituva kanta. Se voidaan esittää muodossa $\underline{B}_j = \{B_j(n) : n \in \mathbb{N}\}$. Jokaista äärellistä $K \subset J$ kohti merkitään $\underline{B}_K$:lla niiden joukkojen kokoelmaa, jotka ovat muotoa

$$B = \bigcap_{j \in K} P_j^{-1}(B_j(n_j)), \tag{9.10}$$

missä $n_j \in \mathbb{N}$ $\forall$ $j \in K$. Osoitamme, että $\underline{B} = \cup\{\underline{B}_K : K \subset J \text{ äärellinen}\}$ on X:n numeroituva kanta.

$\underline{B}$ on tulotopologian kanta: Selvästi $\underline{B}$:n jäsenet ovat avoimia. Olkoon $x \in U \subset_\circ X$; on osoitettava, että $x \in B \subset U$ jollakin $B \in \underline{B}$ (x:n ympäristökannan olemassaolotodistus). Tulotopologian määritelmän nojalla on olemassa sellainen muotoa

$$V = \bigcap_{j \in K} P_j^{-1}(U_j)$$

oleva kannan joukko, jolla $x \in V \subset U$. Tässä $K \subset J$ on äärellinen ja $U_j \Subset X_j$, kun $j \in K$. Koska $x_j \in U_j$, niin kullakin $j \in K$ $\exists$ sellainen $B_j(n_j)$, että $x_j \in B_j(n_j) \subset U_j$. Tällöin (9.10) määrittelee joukon $B \in \underline{B}$, jolla $x \in B \subset V \subset U$.

$\underline{B}$ on numeroituva: Numeroituvan joukon äärellisten osajoukkojen kokoelma on numeroituva, joten $\underline{B}$ on numeroituva yhdiste kokoelmista $\underline{B}_K$. Siis riittää osoittaa, että kukin $\underline{B}_K$ on numeroituva. Tunnetusti $\mathbb{N}^K$ on numeroituva. Kuvaus $f : \mathbb{N}^K \to \underline{B}_K$,

$$f(\prod_{j \in K} n_j) = \bigcap_{j \in K} P_j^{-1}\big(B_j(n_j)\big)$$

on surjektio, joten $\underline{B}_K$ on numeroituva. $\square$

9.11. **Seuraus.** Hilbertin kuutio $I^{\mathbb{N}}$ on N_2.

9.12. **Kertausta.** Jos X on joukko ja $A \subset X$, niin kokoelma $\underline{P}$ X:n osajoukkoja on A:n *peite*, jos jokainen A:n piste kuuluu johonkin $\underline{P}$:n jäseneen eli jos $A \subset \cup\underline{P}$. Tapauksessa $A = X$ tämä merkitsee $X = \underline{P}$. Peitteen $\underline{P}$ *osapeite* on osakokoelma $\underline{Q} \subset \underline{P}$, joka myös on A:n peite. Jos X on avaruus ja peitteen jäsenet ovat avoimia, sanomme, että peite on *avoin*.

9.13. **Määritelmä.** Avaruus X on *Lindelöf-avaruus*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite.

9.14. **Huomautuksia.** Määritelmä muistuttaa kompaktisuuden määritelmää, jossa sanan "numeroituva" tilalla on "äärellinen". Jokainen kompakti avaruus on Lindelöf. Käsitteen nimi johtuu Helsingin yliopiston entisestä matematiikan professorista Ernst Lindelöfistä (äännetään Lindelööv), joka v. 1903 todisti, että $\mathbb{R}^n$:n osajoukoilla on määritelmän 9.13 ominaisuus. Tämä on ainoa topologiassa yleisesti esiintyvä käsite, joka on saanut nimensä suomalaisen matemaatikon mukaan.

9.15. **Lause.** Jokainen N_2-avaruus on Lindelöf.

Todistus. Olkoon $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ avaruuden X numeroituva kanta. Olkoon $\underline{P}$ X:n avoin peite. Jos B_j sisältyy johonkin $\underline{P}$:n jäseneen, valitaan tällainen ja merkitään sitä U_j:llä. Jos B_j ei sisälly mihinkään $\underline{P}$:n jäseneen, ei joukkoa U_j määritellä. Tällöin joukkojen U_j kokoelma on numeroituva. Osoitamme, että se on X:n peite. Olkoon $x \in X$. Tällöin $x \in U$ jollakin $U \in \underline{P}$. On olemassa sellainen B_j, että $x \in B_j \subset U$. Siis U_j on mäöitelty ja $x \in U_j$. $\square$

9.16. **Määritelmä.** Avaruus X on *separoituva*, jos se sisältää numeroituvan tiheän osajoukon.

9.17. **Esimerkkejä.** $\mathbb{R}^1$ on separoituva, koska $\mathbb{Q}$ on siinä tiheä ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^1$) ja numeroituva. Diskreetti ylinumeroituva avaruus ei ole separoituva (Olkoon X diskreetti ylinumeroituva avaruus ja olkoon $\{x_n\} \subset X$ mielivaltainen numeroituva osajoukko; $\{x_n\}$ on suljettu joukko, koska

$$X \setminus \bigcup_n \{x_n\} = \bigcup_{y_i \in X \setminus \cup_n \{x_n\}} \{y_i\}$$

on avoin joukko $\Rightarrow \overline{\{x_n\}} = \{x_n\} \subsetneq X \Rightarrow \{x_n\}$ ei ole tiheä X:ssä $\Rightarrow X$ ei ole separoituva).

9.19. **Lause.** N_2-avaruus on separoituva.

Todistus. Olkoon $\{B_j : j \in \mathbb{N}\}$ avaruuden X kanta. Valitaan jokaisesta epätyhjästä B_j:stä piste a_j. Näiden joukko on numeroituva ja tiheä, sillä jos $\emptyset \neq U \underset{\circ}{\subset} X$, niin U sisältää jonkin B_j:n ja siis a_j:n. □

9.20. **Lause.** Jos (X, d) on metrinen avaruus, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(1) X on N_2
(2) X on Lindelöf
(3) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ numeroituva avoin X:n peite joukoilla joiden läpimitta on $\leq \varepsilon$
(4) X on separoituva.

Todistus. Osoitamme, että (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

Näistä (1) $\Rightarrow$ (2) seuraa heti Lauseesta 9.15. Jos (2) on voimassa, voidaan X:n peitteelle $\{B(x, \frac{\varepsilon}{2}) : x \in X\}$ valita numeroituva osapeite, mistä seuraa (3).

Olkoon (3) voimassa. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ valitaan sellainen X:n peite

$$\{E_j^n : j \in \mathbb{N}\},$$

että $d(E_j^n) \leq \frac{1}{n}\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Valitaan jokaisesta epätyhjästä E_j^n:stä piste a_j^n, jolloin saadaan numeroituva joukko

$$A = \{a_j^n : n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}.$$

Osoitamme, että A on tiheä. Olkoon $\emptyset \neq U \underset{\circ}{\subset} X$. Valitaan $a \in U$ ja kuula $B(a, r) \subset U$. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ sellainen, että $\frac{1}{n} < r$. Tällöin $a \in E_j^n$ jollakin $j \in \mathbb{N}$. Koska $d(E_j^n) \leq \frac{1}{n}$, niin $E_j^n \subset B(a, r) \subset U$ ja siis $a_j^n \in U$. Siis A on tiheä, joten (4) on voimassa.

Olkoon (4) voimassa. Olkoon $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ numeroituva tiheä X:n osajoukko. Osoitamme, että kokoelma

$$\underline{B} = \{B\big(a_j, \frac{1}{n}\big) : j \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$$

on X:n kanta. Olkoon $x \in U \subset\!\!\circ\ X$. Tällöin $B(x,r) \subset U$ jollakin $r > 0$. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{n} < r$. Kuula $B(x, \frac{1}{2n})$ sisältää jonkin a_j:n. Tällöin $B(a_j, \frac{1}{2n}) \in \underline{B}$ ja

$$x \in B\big(a_j, \frac{1}{2n}\big) \subset B(x,r) \subset U,$$

joten $\underline{B}$ on X:n numeroituva kanta, ja siis (1) on voimassa. $\square$

9.21. **Yhteenveto.** Ominaisuudesta N_2 seuraa aina N_1, Lindelöf ja separoituvuus. Jos X on metristyvä, niin N_1 on aina voimassa, ja muut kolme ominaisuutta ovat keskenään yhtäpitävät.

9.22. **Lause.** Säännöllinen Lindelöf-avaruus X on normaali.

Todistus. Olkoot $A, B \subset X$ suljettuja, erillisiä ja ei-tyhjiä. Koska X on säännöllinen, niin jokaisella $a \in A$ on sellainen ympäristö $U(a)$, että

$$\overline{U(a)} \cap B = \emptyset$$

$\big(X$ säännöllinen, $a \notin B$ suljettu $\Rightarrow \exists$ ympäristöt $U(a) \ni a$ ja $V \supset B$ siten, että $U(a) \cap V = \emptyset \Rightarrow \overline{U(a)} \cap B = \emptyset$, sillä jos olisi $\overline{U(a)} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x \in \overline{U(a)} \cap B \Rightarrow x \in \overline{U(a)} \Rightarrow \forall\ x$:n ympäristö siis myös V $(x \in B \subset V)$ sisältää $U(a)$:n pisteitä $\Rightarrow$ Ristiriita$\big)$. Samoin jokaisella $b \in B$ on sellainen ympäristö $V(b)$, että

$$\overline{V(b)} \cap A = \emptyset.$$

Merkitään $W = X \setminus (A \cup B)$. Tällöin

$$\{U(a) : a \in A\} \cup \{V(b) : b \in B\} \cup \{W\}$$

on X:n avoin peite. Koska X on Lindelöf, sillä on numeroituva osapeite, joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\{U(a_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{V(b_n) : n \in N\} \cup \{W\}.$$

Merkitään

$$U_n = U(a_n) \setminus \cup\{\overline{V(b_k)} : k \leq n\},$$

$$V_n = V(b_n) \setminus \cup\{\overline{U(a_k)} : k \leq n\}.$$

Tällöin U_n ja V_n ovat avoimia. Lisäksi

$$A \subset \cup\{U_n : n \in \mathbb{N}\} = U \quad \text{ja} \quad B \subset \cup\{V_n : n \in \mathbb{N}\} = V.$$

$\big($Olkoon $x \in A \Rightarrow x \in \cup_n U(a_n) \Rightarrow x \in U(a_{n_0})$ jollekin $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in U(a_{n_0}) \setminus \cup\{\overline{V(b_k)} : k \leq n_0\}$, koska $\overline{V(b_k)} \cap A = \emptyset \ \ \forall\ k \leq n_0 \Rightarrow x \in U_{n_0} \Rightarrow$

$x \in \cup\{U_n : n \in \mathbb{N}\} = U \Rightarrow A \subset U$).

Lauseen todistamiseksi riittää osoittaa, että $U \cap V = \emptyset$.
Vastaoletus: On olemassa

$$x \in U \cap V = \cup_n U_n \cap \cup_m V_m = \cup_{n,m} U_n \cap V_m.$$

Tällöin $x \in U_n \cap V_m$ jollain $n, m \in \mathbb{N}$. Olkoon esimerkiksi $n \leq m$. Koska $x \in V_m$, niin $x \notin \cup\{\overline{U(a_k)} : k \leq m\} \Rightarrow x \notin \overline{U(a_n)} \Rightarrow x \notin U(a_n) \Rightarrow x \notin U_n$, mikä on ristiriita. $\square$