DYNAAMISET SYSTEEMIT

1. Johdanto

Mielivaltaisesti annetun differentiaaliyhtälön ratkaisua ei yleensä voida esittää suljetussa muodossa. Sen vuoksi on tarpeen tutkia diff. yhtälöitä kvalitatiivisesti ja etsiä tietoa ratkaisujen käyttäytymisestä tuntematta ratkaisuja eksplisiittisesti.

Esim. 1.1

Tarkastellaan yhtälöitä

a) $x'' + 3x' + 2x = 0$
b) $x'' - 3x' + 2x = 0$
c) $x'' + x = 0$

Yleiset ratkaisut

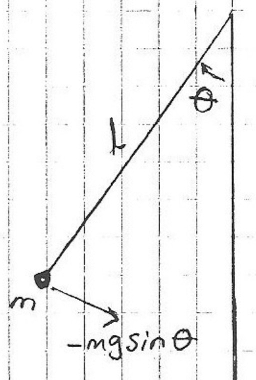
a) $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$
b) $x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$
c) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

Selvästi kaikki (a):n ratkaisut lähestyvät nollaa kun $t \to \infty$, kaikki (b):n ratkaisut kasvavat (tai pienenevät) rajatta kun $t \to \infty$, ja kaikki (c):n ratkaisut ovat jaksollisia, jaksona 2π.

Yo. esimerkeissä diff. yhtälöt olivat lineaarisia. Epälineaaristen yhtälöiden ratkaisujen käyttäytymisestä voidaan saada tietoa approksimoimalla annettua diff. yhtälöä sopivalla lineaarisella yhtälöllä.

Esim. 1.2

Tarkastellaan heiluria, jonka pituus on l ja joka heilahtelee vapaasti.



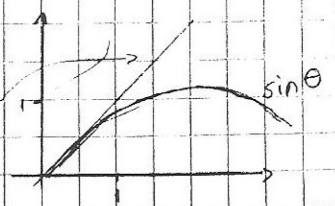
Vaimentamatonta heilahtelua kuvaa epälineaarinen 2. kertaluvun diff. yhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0 \qquad (1.1)$$

missä $\omega^2 = g/l$

koska $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

niin pienillä θ:n arvoilla yhtälöä (1.1) voidaan



approksimoida lineaarisella yhtälöllä

$$\frac{d^2\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \qquad (1.2)$$

Yhtälön (1.2) yleinen ratkaisu on jaksollinen:

$$\theta(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

myöhemmin vertaamme näitä ratkaisuja (1.1):n ratkaisuihin

Esim. 1.3

Epälineaarisella 1. kertaluvun diff. yhtälöllä

$$x' = -x + x^2 \qquad (1.3)$$

on kaksi vakioratkaisua

$$x = 0 \quad \text{ja} \quad x = 1$$

kuten nähdään heti sijoittamalla. Jos x on lähellä nollaa, yhtälön epälineaarinen termi x^2 on pieni verrattuna lineaariseen termiin $-x$, sillä

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

Sen vuoksi on luonnollista verrata (1.3):n ratkaisuja lineaarisen yhtälön

$$x' = -x \qquad (1.4)$$

ratkaisuihin. (1.4):n yleinen ratkaisu on

$$x(t) = x(0)\, e^{-t}$$

Epälineaarinen yhtälö (1.3) voidaan ratkaista erottamalla muuttujat.

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^2 \; ; \qquad \frac{dx}{-x + x^2} = dt$$

$$\int \frac{dx}{-x + x^2} = \int dt = t + C_0$$

$x' = -x + x^2$ (1.3) $x(t)$

$x' = -x$ (1.4)

$x(t) = x(0)e^{-t}$

$$\frac{dx}{dt} = -x + x^2$$

$$\frac{dx}{-x + x^2} = dt$$

$$\int \frac{dx}{-x + x^2} = \int dt = t + C_0$$

Hajottamalla osamurtolukuihin:

$$\int \frac{dx}{-x+x^2} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln(x-1) - \ln x = \ln \frac{x-1}{x}$$

siis

$$\ln \frac{x-1}{x} = t + C_0$$

$$\frac{x-1}{x} = e^{t + C_0} = Ce^t \quad (1.5) \qquad C = e^{C_0}$$

Voidaan olettaa $x(0) \neq 0$, sillä tapauksessa $x(0) = 0$ saadaan (yksikäsitteisyyslauseen nojalla) triviaaliratkaisu $x(t) \equiv 0$

Sijoittamalla (1.5):een $t = 0$ saadaan

$$\frac{x(0) - 1}{x(0)} = C.$$

Näin ollen $\dfrac{x(t) - 1}{x(t)} = \dfrac{x(0) - 1}{x(0)} e^t$

josta seuraa

$$x(t) = \frac{x(0)}{x(0)(1 - e^t) + e^t} \qquad (1.6)$$

Ratkaisu on määritelty vain jos nimittäjä on nollasta eroava, so.

$$x(0)(1 - e^t) + e^t \neq 0 \quad \text{tai} \quad e^t \neq \frac{x(0)}{x(0) - 1} = \frac{1}{C}$$

$$\text{tai} \quad t \neq \ln \frac{x(0)}{x(0) - 1} = -\ln C.$$

Huomataan, että $|x(0)|$:n ollessa pieni ratkaisu (1.6) on likimain $x(0)e^t$, so. lineaarisen yhtälön (1.4) ratkaisu.

1°) $0 < x(0) < 1$ (1.5) $\Rightarrow$ $C < 0$.

Siis $e^t \neq \frac{1}{C}$ kaikille t, joten ratkaisu (1.6) on määritelty kaikilla t:n arvoilla ja lähestyy nollaa kun $t \to \infty$.
Tapauksessa $0 < x(0) < 1$ yhtälöiden (1.3) ja (1.4) ratkaisuilla on siis sama asymptoottinen käyttäytyminen.

2°) $x(0) \geq 1$

Tässä tapauksessa emme ole enää lähellä triviaaliratkaisua $x = 0$, ja (1.4) ei ole enää hyvä approksimaatio yhtälölle (1.3). Tapauksessa $x(0) = 1$ saadaan väliratkaisu $x \equiv 1$. Tapauksessa $x(0) > 1$ on $0 < C < 1$ ja $-\ln C > 0$ joten ratkaisu (1.6) kasvaa rajatta kun $t \to -\ln C$.

Sanomme, että yhtälön (1.3) ratkaisu $x = 0$ on asymptoottisesti stabiili kun taas ratkaisu $x = 1$ on epästabiili.

Seuraavassa tutkimme paljon ensimmäisen kertaluvun diff. yhtälöpareja, jotka voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \end{aligned} \qquad (1.7) \qquad x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \quad \forall t$$

missä f ja g ovat muuttujien t, x ja y jatkuvasti differentoituvia funktioita, jotka on määritelty jossakin $\mathbb{R}^3$:n alueessa

$$D: \quad a < t < b, \quad c < x < d, \quad e < y < h$$

Voidaan todistaa, että jokaisen D:n pisteen (t_0, x_0, y_0) kautta kulkee täsmälleen yksi systeemin (1.7) integraalikäyrä, jonka parametriesitys $t \mapsto (x(t), y(t))$ on määritelty jollakin t_0:n sisältävällä välillä.

Sanomme, että systeemi (1.7) on autonominen (ajasta riippumaton) jos funktiot f ja g eivät riipu t:stä. Muussa tapauksessa (1.7) on epäautonominen.

Esim. 1.4 Systeemi $\begin{aligned} x' &= -x^2 + y \\ y' &= -x + y^2 \end{aligned}$ on autonominen

kun taas systeemi
$$\begin{aligned} x' &= ty \\ y' &= -x \end{aligned}$$ on epäautonominen.

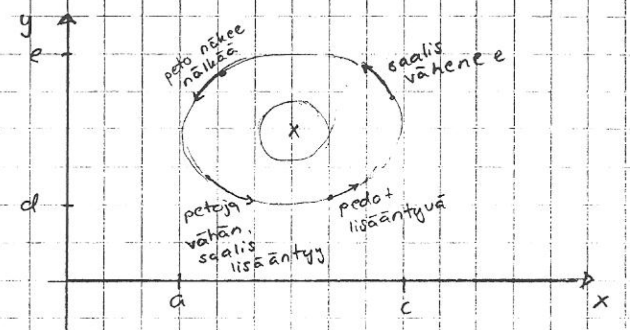
Systeemin (1.7) yksityisratkaisut $t \mapsto (x(t), y(t))$ ovat käyriä xy-tasossa. Tämä on systeemin faasitaso, ja jokainen ratkaisukäyrä on systeemin rata. Systeemistä saadaan usein paljon tietoa tutkimalla sen ratoja.

Esimerkki biologiasta: $x(t)$ ja $y(t)$ ovat kahden eläinlajin populaatioita

$x(t)$ = saalis, $y(t)$ = peto.

Systeemin mallina ovat ns. Lotkan-Volterran yhtälöt

$$x' = \beta_1 x - \delta_{11} x^2 - \delta_{12} xy$$
$$y' = -\beta_2 y - \delta_{21} xy - \delta_{22} y^2$$



<u>Esim. 1.5</u> Tarkastellaan harmonista värähtelijää, jonka diff. yhtälö on

$$x'' + x = 0,$$

ja alkuehdot $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

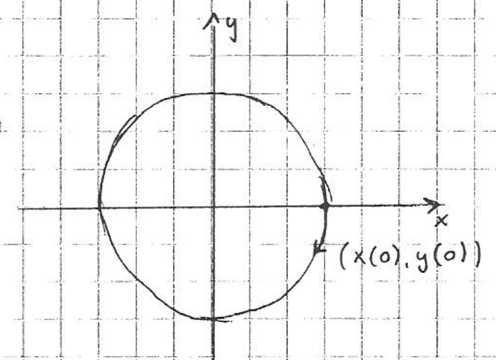
Yhtälö voidaan korvata autonomisella systeemillä

$$\begin{cases} x' = y, & x(0) = 1 \\ y' = -x, & y(0) = 0 \end{cases}$$

Systeemin rata voidaan saada selville kahdella tavalla.

<u>1. tapa</u> Todetaan, että alkuarvotehtävällä on 1-käsitteinen ratkaisu $(\cos t, -\sin t)$. Koska $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, systeemin rata toteuttaa yhtälön $x^2 + y^2 = 1$, joka esittää ympyrää xy-tasossa.

10.9.2002



+358509507777

<u>2. tapa</u> Rata saadaan selville myös ratkaisematta systeemiä.
Ketjusääntö =>

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-x}{y}$$

Erotetaan muuttujat

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

Integroimalla: $\int y\,dy = \int -x\,dx + C$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1 \;;\quad x^2 + y^2 = 2C_1 = C$$

Vakion C määrittämiseksi todetaan, että hetkellä $t=0$ on $x=1$ ja $y=0$, joten

$$C = x(0)^2 + y(0)^2 = 1$$

Radan säde riippuu siten alkuehdoista.

Logistinen differenssiyhtälö $\quad x' = \beta x - \delta x^2$

$$x_{n+1} = \beta_1 x_n + \delta_1 x_n^2$$

Esim. 1.6 Tarkastellaan edelleen harmonista värähtelijää uusin alkuehdoin

$$x(t_0) = 1 \;,\quad y(t_0) = 0$$

Ratkaisu on jälleen yksikäsitteinen; se on

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t-t_0), -\sin(t-t_0))$$

Siis $\quad x^2 + y^2 = \cos^2(t-t_0) + \sin^2(t-t_0) = 1$

joten saatiin sama rata kuin edellisessä esimerkissä.

Yleisemmin voidaan todistaa, että kaikille autonomisille systeemeille rata (pistejoukkona) riippuu vain alkuarvoista $x(t_0)$ ja $y(t_0)$ mutta on muuten riippumaton alkuhetkestä t_0.

Lause 1.1

Autonomisen systeemin

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \qquad (1.8)$$

alkuehtoja $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ vastaava rata ei riipu t_0:n arvosta.

Tod. Ol. $\{x(t), y(t)\}$ ja $\{x_1(t), y_1(t)\}$ systeemin (1.8) ratkaisuja, jotka toteuttavat vastaavasti alkuehdot

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{ja} \qquad x_1(t_1) = x_0$$
$$y(t_0) = y_0 \qquad \qquad y_1(t_1) = y_0$$

Olkoon $\tau = t + (t_0 - t_1)$; silloin yhtälöiden $x_2(t) = x(\tau)$ ja $y_2(t) = y(\tau)$ määrittelemä funktiopari $\{x_2(t), y_2(t)\}$ on systeemin (1.8) ratkaisu, sillä

$$x_2'(t) = x'(\tau) = f(x(\tau), y(\tau)) = f(x_2(t), y_2(t))$$

$$y_2'(t) = y'(\tau) = g(x(\tau), y(\tau)) = g(x_2(t), y_2(t))$$

Lisäksi $\{x_2(t), y_2(t)\}$ toteuttaa alkuehdot

$$x_2(t_1) = x(t_0) = x_0 \qquad \text{ja}$$
$$y_2(t_1) = y(t_0) = y_0 \quad ,$$

joten alkuarvotehtävän yksikäsitteisyyden nojalla $x_2(t) = x_1(t)$ ja $y_2(t) = y_1(t)$ kaikille $t \geq t_1$.

Jokainen ratkaisukäyrän $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ piste on arvoilla $t \geq t_1$ siis muotoa $(x_2(t), y_2(t)) = (x(\tau), y(\tau))$ ja kuuluu siten käyrälle $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Samalla tavalla nähdään kääntäen, että jokainen käyrän $t \mapsto (x(t), y(t))$ piste kuuluu arvoilla $t \geq t_0$ käyrälle $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$.

$\square$

13.9.2002

Seuraava esimerkki osoittaa, että epäautonomisella systeemillä ei ole lauseen 1.1 ominaisuutta.

Esim. 1.7 Tarkastellaan epäautonomista systeemiä

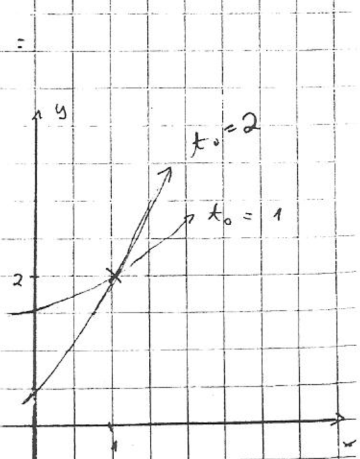
$$x' = \frac{1}{t}x \qquad x(t_0) = 1$$
$$y' = y \qquad y(t_0) = 2$$

Yhtälöt ovat riippumattomia, joten ratkaisu on helppo laskea:

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t}{t_0}, 2e^{t-t_0}\right).$$

Koska $t = t_0 x$, rata toteuttaa yhtälön $y = 2e^{t_0(x-1)}$.

Rata riippuu siten oleellisesti alkuhetkestä t_0.



2. LINEAARISET SYSTEEMIT

Tässä §:ssä tarkastelemme kahden ensimmäisen kertaluvun diff. yhtälön muodostamaa lineaarista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + f_1(t) \\ y' &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + f_2(t) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

ja vastaavaa homogeenistä systeemiä (so. $f_1 = f_2 = 0$)

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y \\ y' &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Tällaisen systeemin ratkaisulla tarkoitetaan kahden derivoituvan funktion paria $\{x(t), y(t)\}$, joka toteuttaa systeemin yhtälöt (jollakin t-akselin välillä). Voidaan todistaa

Lause 2.1

Oletetaan, että funktiot $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, $a_{21}(t)$, $a_{22}(t)$, $f_1(t)$ ja $f_2(t)$ ovat jatkuvia. Silloin jokaista pistettä $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$ kohden on olemassa täsmälleen yksi systeemin (2.1) ratkaisu $\{x(t), y(t)\}$ joka toteuttaa ehdot $x(t_0) = x_0$ ja $y(t_0) = y_0$.

Funktiopari $\{x_3(t), y_3(t)\}$ on parien $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ lineaarikombinaatio, jos $\exists$ vakiot c_1 ja c_2 s.e. seuraavat kaksi yhtälöä ovat voimassa.

$$\begin{aligned} x_3(t) &= c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \\ y_3(t) &= c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Nähdään helposti (harj. teht.):

Lause 2.2.

Jos $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ ovat homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisuja, niin kaikki niiden lineaarikombinaatiot ovat myös systeemin (2.2) ratkaisuja.

Esim. 2.1

$$\begin{aligned} x' &= -x + 6y \\ y' &= x - 2y \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Sijoittamalla nähdään, että tällä systeemillä on ratkaisut $\{-2e^{-4t}, e^{-4t}\}$ ja $\{3e^{t}, e^{t}\}$. Jos c_1 ja c_2 ovat mielivaltaisia vakioita, niin lauseen 2.2 nojalla pari

$$\{-2c_1 e^{-4t} + 3c_2 e^{t},\ c_1 e^{-4t} + c_2 e^{t}\}$$ on (2.4):n ratkaisu.

Sanomme, että kaksi funktioparia $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ ovat lineaarisesti riippumattomia, jos yhtälöpari

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) &= 0 \\ c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

toteutuu kaikilla t:n arvoilla vain mikäli $c_1 = c_2 = 0$.

Määritellään kahden ratkaisun $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ Wronskin determinantti yhtälöllä

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t) \qquad (2.6)$$

Lause 2.3 Olkoot $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisuja, joiden Wronskin determinantti on nollasta eroava kaikilla t:n arvoilla. Silloin (2.3) on systeemin (2.2) yleinen ratkaisu, so. jokaista (2.2):n ratkaisua $\{x^*, y^*\}$ kohden $\exists$ vakiot c_1 ja c_2 s.e.

$$\begin{aligned} x^* &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ y^* &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Tod. Valitaan $t = t_0$ ja tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) &= x^*(t_0) \\ c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y^*(t_0) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

jossa tuntemattomina ovat c_1 ja c_2. Tämän yhtälön determinantti $W(t_0)$ on oletuksen nojalla nollasta eroava, joten parilla (2.8) on täsmälleen yksi ratkaisu $\{c_1, c_2\}$. Lauseen 2.2 nojalla

$$\{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),\ c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)\}$$

on (2.2):n ratkaisu, ja (2.8):n perusteella se toteuttaa pisteessä t_0 samat alkuehdot kuin $\{x^*(t), y^*(t)\}$. Ratkaisun yksikäsitteisyydestä (lause 2.1) seuraa näin ollen, että (2.7) toteutuu kaikilla t:n arvoilla. □

Esim. 2.2 Esimerkissä 2.1 Wronskin determinantti on

$$W(t) = \begin{vmatrix} -2e^{-4t} & e^{-4t} \\ 3e^{t} & e^{t} \end{vmatrix} = -2e^{-3t} - 3e^{-3t} = -5e^{-3t} \neq 0$$

Systeemin (2.4) yleinen ratkaisu löytyy niin kuten lauseessa 2.3.

Lauseen 2.3 soveltamista helpottaa

Lause 2.4

Olkoot $\{x_1, y_1\}$ ja $\{x_2, y_2\}$ homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisuja välillä Δ. Oletetaan, että vastaavalla Wronskin determinantilla $W(t)$ on nollakohta välillä Δ. Silloin $W(t) \equiv 0$ välillä Δ.

Huom. Lauseesta 2.4 seuraa, että joko $W(t) \neq 0$ kaikille $t \in \Delta$ tai $W(t) = 0$ kaikilla $t \in \Delta$. Lausetta 2.3 voidaan siten soveltaa heti kun tiedetään, että $W(t)$ on nollasta eroava jollakin t:n arvolla.

Tod. Koska $W(t) = x_1 y_2 - x_2 y_1$, niin

$$
\begin{aligned}
W'(t) &= x_1 y_2' + x_1' y_2 - x_2 y_1' - x_2' y_1 \\
&= x_1 (\cancel{a_{21} x_2} + a_{22} y_2) + y_2 (a_{11} x_1 + \cancel{a_{12} y_1}) \\
&\quad - x_2 (\cancel{a_{21} x_1} + a_{22} y_1) - y_1 (a_{11} x_2 + \cancel{a_{12} y_2}) \\
&= a_{11} x_1 y_2 + a_{22} x_1 y_2 - a_{11} x_2 y_1 - a_{22} x_2 y_1 \\
&= (a_{11} + a_{22})(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \underline{(a_{11} + a_{22}) W(t)}
\end{aligned}
$$

Ratkaisemalla näin saatu differentiaaliyhtälö $W(t)$:n suhteen saadaan

$$
W(t) = W(t_0) \exp \left[\int_{t_0}^{t} [a_{11}(u) + a_{22}(u)]\, du \right] \quad (t \in \Delta) \qquad (2.9)
$$

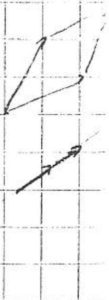
Tästä seuraa väite.

17.9.2002

Lause 2.5

Homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisut $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ ovat lineaarisesti riippumattomat, jos ja vain jos $W(t) \neq 0$.

Tod. 1°) Ol. $W(t_0) = 0$; silloin $\mathbb{R}^2$:n vektorit $(x_1(t_0), y_1(t_0))$ ja $(x_2(t_0), y_2(t_0))$ ovat lineaarisesti riippuvia (lin. alg.). Siis $\exists$ vakiot c_1 ja c_2 s.e. $c_1^2 + c_2^2 > 0$ ja



$$
\begin{aligned}
c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) &= 0 \\
c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= 0
\end{aligned} \qquad (2.10)
$$

Merkitään
$$
\begin{aligned}
x^* &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
y^* &= c_1 y_1 + c_2 y_2
\end{aligned}
$$

Lauseessa 2.2 nojalla $\{x^*(t), y^*(t)\}$ on (2.2) ratkaisu, ja jos (2.10):n perusteella se toteuttaa pisteessä t_0 samat alkuehdot kuin triviaaliratkaisu $x(t) = y(t) = 0$. Ratkaisun yksikäsitteisyydestä (lause 2.1) seuraa näin ollen, että $x^*(t) = y^*(t) = 0$ kaikilla t:n arvoilla. Silloin

$\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ eivät ole lin. riippumattomia.

2°) Oletetaan kääntäen, että $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ eivät ole lin. riippumattomia. Silloin $\exists$ vakiot c_1 ja c_2 s.e. $c_1^2 + c_2^2 > 0$ ja

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$$
$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

Jos esim. $c_1 \neq 0$, niin merkitsemällä $c = -c_2/c_1$ tästä seuraa $x_1 = cx_2$, $y_1 = cy_2$. Näin ollen

$$W(t) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = cx_2 y_2 - cx_2 y_2 = 0 \quad . \qquad \square$$

Lauseiden 2.2 - 2.5 tuloksista seuraa yhteenvetona:

Olkoot $\{x_1, y_1\}$ ja $\{x_2, y_2\}$ lineaarisen homogeenisen systeemin

$$x' = a_{11}x + a_{12}y \qquad (2.11)$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

ratkaisuja ja $W(t)$ vastaava Wronskin determinantti. Silloin $\{c_1 x_1 + c_2 x_2, \; c_1 y_1 + c_2 y_2\}$ on (2.11):n yleinen ratkaisu, jos $W(t) \neq 0$, so. jos ratkaisut $\{x_1, y_1\}$ ja $\{x_2, y_2\}$ ovat lin. riippumattomat.

Epähomogeenisen systeemin (2.1) yleistä ratkaisua koskeva peruslause on

Lause 2.6. Olkoon $\{x_p, y_p\}$ jokin systeemin (2.1) yksityisratkaisu, ja olkoon $\{c_1 x_1 + c_2 x_2, \; c_1 y_1 + c_2 y_2\}$ vastaavan homogeenisen systeemin (2.11) yleinen ratkaisu. Silloin

$$\{c_1 x_1 + c_2 x_2 + x_p, \; c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p\}$$

on epähomogeenisen systeemin (2.1) yleinen ratkaisu.
(Todista että lause on ratkaisu sijoittamalla ja näytä että mielivaltainen epähomog. yht. ratkaisu on tuota muotoa: $\{x, y\}$ (2.1) $\{x - x_p, \; y - y_p\}$)

Esim. 2.3 Tarkastellaan systeemiä

$$x' = 3x + 3y + t \qquad (2.12)$$
$$y' = -x - y + 1$$

Vastaavalla homogeenisella systeemillä

$$x' = 3x + 3y$$
$$y' = -x - y$$

on ratkaisut $\{1, -1\}$ ja $\{-3e^{2t}, e^{2t}\}$

Epähomogeenisellä systeemillä (2.12) on yksityisratkaisu

$$\left\{-\tfrac{1}{4}(t^2+9t+3),\ \tfrac{1}{4}(t^2+7t)\right\}.$$ Systeemin (2.12) yleinen

ratkaisu on siis

$$\{x(t), y(t)\} = \left\{c_1 - 3c_2 e^{2t} - \tfrac{1}{4}(t^2+9t+3),\ -c_1 + c_2 e^{2t} + \tfrac{1}{4}(t^2+7t)\right\}.$$

24.9.2002

3. Vakiokertoimiset systeemit

Tarkastellaan vakiokertoimista homogeenista yhtälöryhmää

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad (3.1)$$

missä x ja y ovat reaalimuuttujan t derivoituvia funktioita.
Tässä §:ssä esitämme ns. determinanttimenetelmän, jonka avulla löydetään systeemin (3.1) yleinen ratkaisu.

Tavallisten lineaaristen homogeenisten vakiokertoimisten diff. yhtälöiden teorian huomioonottaen on luonnollista etsiä ryhmälle (3.1) muotoa $\{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$ olevia ratkaisuja, missä α, β ja λ ovat vakioita.

$y'' + ay' + by = 0$
yrite: $e^{\lambda t}$

Sijoittamalla $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$ ja $y(t) = \beta e^{\lambda t}$ systeemiin (3.1) saadaan

$$\begin{aligned} x' &= \alpha\lambda e^{\lambda t} = a_{11}\alpha e^{\lambda t} + a_{12}\beta e^{\lambda t} \\ y' &= \beta\lambda e^{\lambda t} = a_{21}\alpha e^{\lambda t} + a_{22}\beta e^{\lambda t} \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Jakamalla $e^{\lambda t}$:llä saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta &= 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta &= 0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

jolle haluaisimme löytää ei-triviaaleja ratkaisuja $\{\alpha, \beta\}$.
Tällöin ratkaisuja löytyy (lin. alg.) täsmälleen silloin kun yhtälöryhmän determinantti

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} \qquad (3.4)$$

häviää.
Ehdosta $D = 0$ seuraa toisen asteen yhtälö

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0 \qquad (3.5)$$

Tämä on systeemin (3.1) karakteristinen yhtälö. Tarkastelemme nyt erikseen tapauksia, joissa yhtälön (3.5) reaalisten juurien lukumäärä on 2, 1 tai 0.

TAPAUS 1. 2 reaalista juurta λ_1 ja λ_2

Olkoon $\{\alpha_1, \beta_1\}$ jokin ryhmän (3.3) ei-triviaali ratkaisu arvolla $\lambda = \lambda_1$ ja olkoon $\{\alpha_2, \beta_2\}$ jokin tällainen ratkaisu arvolla $\lambda = \lambda_2$. Silloin ryhmällä (3.1) on ei-triviaalit ratkaisuparit

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \text{ ja } \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta e^{\lambda_2 t}\} \qquad (3.6)$$

Lineaarisen riippumattomuuden tutkimiseksi tark. yhtälöparia

$$\begin{cases} c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \\ c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{llll} c_1 \alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -c_2 \alpha_2 & = \text{vakio} & \Rightarrow & c_1 \alpha_1 = 0 = c_2 \alpha_2 \\ c_1 \beta e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} = -c_2 \beta_2 & = \text{vakio} & \Rightarrow & c_1 \beta_1 = 0 = c_2 \beta_2 \end{array}$$

Koska $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$ ja $\alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$, tästä seuraa $c_1 = c_2 = 0$. Siis ratkaisut (3.6) ovat lineaarisesti riippumattomat.

Olemme todistaneet seuraavan lauseen.

Lause 3.1

Jos yhtälöllä (3.5) on kaksi eri juurta λ_1 ja λ_2, niin yhtälöryhmällä (3.1) on lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \text{ ja } \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\},$$

missä $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ja $\{\alpha_2, \beta_2\}$ ovat yhtälöparin (3.3) ei-triviaaleja ratkaisuja vastaavasti arvoilla $\lambda = \lambda_1$ ja $\lambda = \lambda_2$. □

27.9.2002

Esim 3.1 Tarkastellaan esimerkin 2.1 systeemiä

$$x' = -x + 6y$$
$$y' = x - 2y$$

Tässä $a_{11} = -1$, $a_{12} = 6$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -2$, ja yhtälöt (3.4) - (3.5) ovat

$$D = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

josta saadaan ratkaisut $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$

Arvolla $\lambda_1 = -4$ yhtälöryhmä (3.3) on $\{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$

$$3\alpha_1 + 6\beta_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\beta_1 = 0$$

Molemmat yhtälöt toteutuvat kun $\alpha_1 = -2\beta_1$, jolloin esim. $\{-2, 1\}$ on (eräs) ratkaisu. Ensimmäinen ratkaisupari on siis $\{-2e^{-4t}, e^{-4t}\}$.

Arvolla $\lambda_2 = 1$ saadaan vastaavasti yhtälöt

$$-2\alpha_2 + 6\beta_2 = 0$$
$$\alpha_2 - 3\beta_2 = 0$$

joilla on ratkaisu $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = 1$

Siten $\{3e^t, e^t\}$ on ensimmäisen ratkaisuparin kanssa lineaarisesti riippumaton ratkaisupari. Lauseen 2.3 nojalla yleinen ratkaisu on

$$\{x(t), y(t)\} = \{-2c_1 e^{-4t} + 3c_2 e^t,\ c_1 e^{-4t} + c_2 e^t\}.$$

TAPAUS 2. Reaalinen kaksoisjuuri

Jos $\lambda_1 = \lambda_2$, niin ensimmäinen ratkaisupari

$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$ löydetään kuten lauseessa 3.1.
Toinen lauseen 3.1 muotoa oleva ratkaisupari

$\{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$ on ensimmäisen parin kanssa lin. riippumaton vain jos Wronskin determinantti

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} & \beta_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} & \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

on nollasta eroava (lause 2.5). Näin on laita täsmälleen silloin kun yhtälöparin

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{12}\beta &= 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda_1)\beta &= 0 \end{aligned} \qquad (3.8)$$

ratkaisuvektorit (α_1, β_1) ja (α_2, β_2) ovat lin. riippumattomia. Tällaiset lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat olemassa vain jos yhtälöpari toteutuu identtisesti, so. jos $a_{11} = a_{22} = \lambda_1$ ja $a_{12} = a_{21} = 0$. Silloin systeemin (3.1) yhtälöt supistuvat muotoon

$$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_1 y$$

ja niillä on lineaarisesti riippumattomat ratkaisuparit

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, 0\} \quad \{0, \beta_2 e^{\lambda_1 t}\}$$

Tässä tapauksessa systeemin (3.1) yhtälöt ovat siis toisistaan riippumattomia, koska kumpikin sisältää vain yhden tuntemattoman funktion.

Jos yhtälöpari (3.8) ei toteudu identtisesti, niin voidaan näyttää että systeemillä (3.1) on tapauksessa $\lambda_1 = \lambda_2$ muotoa

$$\{x(t),\ y(t)\} = \{(\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda_1 t},\ (\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda_1 t}\} \qquad (3.9)$$

olevan ensimmäisen ratkaisuparin $\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$ kanssa lin. riippumaton ratkaisupari. Vakiot α_2 ja β_2 määrätään sijoittamalla (3.9) yhtälöihin (3.1).

$y'' + ay' + by = 0$
$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t}$

Esim. 3.2 Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= -4x - y \\ y' &= x - 2y \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Yhtälöt (3.4) - (3.5) ovat

$$D = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda+2)+1 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

Ratkaisuna on kaksoisjuuri $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Yhtälöistä (3.3) saadaan arvolla $\lambda = -3$ yhtälöpari

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - \beta_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 &= 0 \end{aligned}$$

jonka ei-triviaali ratkaisu $\alpha_1 = 1$, $\beta = -1$ antaa ratkaisuparin $\{e^{-3t}, -e^{-3t}\}$.

Muotoa (3.9) olevan ratkaisun löytämiseksi sijoitetaan

$$\{(\alpha_2 + t)e^{-3t},\ (\beta_2 - t)e^{-3t}\}$$

yhtälöihin (3.10); saadaan

$$\begin{aligned} e^{-3t}(1 - 3\alpha_2 - 3t) &= -4(\alpha_2 + t)e^{-3t} - (\beta_2 - t)e^{-3t} \\ e^{-3t}(-1 - 3\beta_2 + 3t) &= (\alpha_2 + t)e^{-3t} - 2(\beta_2 - t)e^{-3t} \end{aligned}$$

Jakamalla e^{-3t}:llä saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 1 - 3\alpha_2 &= -4\alpha_2 - \beta_2 \qquad & \alpha_2 + \beta_2 + 1 &= 0 \\ -1 - 3\beta_2 &= \alpha_2 - 2\beta_2 \qquad & \alpha_2 + \beta_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

jolla on ei-triviaali ratkaisu $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -2$. Tämä antaa systeemille (3.10) toisen ratkaisuparin

$$\{(1+t)e^{-3t},\ (-2-t)e^{-3t}\}$$

joka on ensimmäisen parin $\{e^{-3t}, -e^{-3t}\}$ kanssa lineaarisesti riippumaton, sillä Wronskin determinantti

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \\ (1+t)e^{-3t} & (-2-t)e^{-3t} \end{vmatrix} = \left[(-2-t)+(1+t)\right]e^{-6t}$$
$$= -e^{-6t} \neq 0$$

Lause 3.2

Jos yhtälöllä (3.5) on reaalinen kaksoisjuuri λ ja jos yhtälöpari (3.8) ei toteudu identtisesti, niin yhtälöryhmällä (3.1) on lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$\begin{aligned} \{x_1(t),\ y_1(t)\} &= \{\alpha_1 e^{\lambda t},\ \beta_1 e^{\lambda t}\} \\ \{x_2(t),\ y_2(t)\} &= \{(\alpha_2+\alpha_1 t)e^{\lambda t},\ (\beta_2+\beta_1 t)e^{\lambda t}\} \end{aligned} \qquad (3.11)$$

missä $\{\alpha_1, \beta_1\}$ on yhtälöparin (3.3) jokin ei-triviaali ratkaisu ja vakiot α_2 ja β_2 löydetään sijoittamalla jälkimmäinen yhtälöistä (3.11) yhtälöihin (3.1).

Tod. Sijoitetaan $\{x_2(t), y_2(t)\}$ yhtälöihin (3.1) ja jaetaan puolittain $e^{\lambda t}$:llä; saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \lambda(\alpha_2+\alpha_1 t) &= a_{11}(\alpha_2+\alpha_1 t) + a_{12}(\beta_2+\beta_1 t) \\ \beta_1 + \lambda(\beta_2+\beta_1 t) &= a_{21}(\alpha_2+\alpha_1 t) + a_{22}(\beta_2+\beta_1 t) \end{aligned}$$

Koska $\{\alpha_1, \beta_1\}$ on (3.3):n ratkaisu, niin ensimmäisen asteen termit kumoutuvat ja jäljelle jää yhtälöpari

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})\alpha_2 - a_{12}\beta_2 &= -\alpha_1 \\ -a_{21}\alpha_2 - (\lambda - a_{22})\beta_2 &= -\beta_1 \end{aligned} \qquad (3.12)$$

1.10.2002

Koska λ on (karakteristisen) yhtälön (3.5) kaksoisjuuri, niin

$2\lambda_1 = a_{11} + a_{12}$, joten $\lambda - a_{11} = -(\lambda - a_{22})$. Näin ollen

joko a_{12} tai a_{21} on nollasta eroava, sillä ehdosta $a_{12} = a_{21} = 0$ ja $D = 0$ seuraisi myös $\lambda - a_{11} = \lambda - a_{22} = 0$, jolloin vastoin oletusta yhtälöpari (3.8) toteutuisi identtisesti.

Olkoon esim. $\boxed{a_{12} \neq 0}$; silloin ensimmäinen yhtälöistä (3.12) toteutuu esim. arvoilla $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \frac{1}{a_{12}}\left[\lambda - a_{12} + \alpha_1\right]$.

Samat arvot toteuttavat myös jälkimmäisen yhtälön, sillä

$$-a_{21} + (\lambda - a_{22})\frac{1}{a_{12}}\left[\lambda - a_{11} + \alpha_1\right]$$

$$= \frac{1}{a_{12}}\Big\{\underbrace{(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12}}_{D=0} + (\lambda - a_{22})\alpha_1\Big\}$$

$$= \frac{\alpha_1}{a_{12}}(\lambda - a_{22}) \overset{\text{"}}{=} -\frac{\alpha_1}{a_{12}}(\lambda - a_{11}) = -\beta_1;$$

Viimeinen yhtälö seuraa siitä, että $\{\alpha_1, \beta_1\}$ on (3.3):n ratkaisu.

Samalla tavoin käsitellään myös tapaus $a_{21} \neq 0$.

Osoitamme lopuksi, että ratkaisut (3.11) ovat lineaarisesti riippumattomat. Tätä varten muodostetaan Wronskin determinantti

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = \left[\alpha_1(\beta_2 + \cancel{\beta_1 t}) - \beta_1(\alpha_2 + \cancel{\alpha_1 t})\right] e^{2\lambda t}$$
$$= (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)\, e^{2\lambda t}$$

Tapauksessa $a_{12} \neq 0$ saadaan käyttämällä yhtälöstä (3.12) ja (3.3)

$$\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2 = \alpha \left\{ \frac{1}{a_{12}} \left[\alpha_1 + (\lambda - a_{11}) \alpha_2 \right] \right\} - \beta_1 \alpha_2$$
$$= \cancel{\left[\frac{1}{a_{12}} (\lambda - a_{11}) \alpha_1 \right] \alpha_2} - \cancel{\beta_1 \alpha_2} + \frac{1}{a_{12}} \alpha_1^2$$
$$= \frac{1}{a_{12}} \alpha_1^2 .$$

Edelleen $\alpha_1 \neq 0$, sillä muuten systeemin (3.3) ensimmäisestä yhtälöstä seuraisi $\beta_1 = 0$, eikä $\{\alpha_1, \beta_1\}$ olisi ei-triviaali ratkaisu. Siis

$$W(t) = \frac{1}{a_{12}} \alpha_1^2 e^{2\lambda t} \neq 0$$

ja ratkaisut (3.11) ovat lineaarisesti riippumattomat (lause 2.5). Samalla tavoin käsitellään tapaus $a_{21} \neq 0$.

8.10.2002

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$z_n = x_n + i y_n$

$\{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$

$\sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n$

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$

$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$

TAPAUS 3 Ei reaalisia juuria

Sanomme, että pari $\{u, v\}$ kompleksiarvoisia funktioita $u = u_1 + i u_2$ ja $v = v_1 + i v_2$ on systeemin (3.1) kompleksinen ratkaisu, jos reaali- ja imaginaariosien muodostamat parit $\{u_1, v_1\}$ ja $\{u_2, v_2\}$ ovat (3.1):n ratkaisuja.

Lemma. Jos karakteristisen yhtälön (3.5) juuret ovat kompleksisia liittolukuja $\lambda_1 = a + ib$ ja $\lambda_2 = a - ib$, ja jos $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ja $\{\alpha_2, \beta_2\}$ ovat yhtälöryhmän (3.3) kompleksisia ratkaisuja vastaavasti arvoille $\lambda = \lambda_1$ ja $\lambda = \lambda_2$ niin parit

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \text{ ja } \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\} \text{ ovat}$$

systeemin (3.1) kompleksisia ratkaisuja

Tod. Jos $\alpha_1 = A_1 + iA_2$ ja $\beta_1 = B_1 + iB_2$, niin

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} = (A_1 + iA_2)\, e^{at}(\cos bt + i \sin bt) =$$

$$\beta_1 e^{\lambda_1 t} = (B_1 + iB_2)\, e^{at}(\cos bt + i \sin bt) =$$

Näin ollen $\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$ on systeemin (3.1) kompleksinen ratkaisu, jos reaali- ja imaginaariosien muodostamat parit

$$\{x_1(t), y_1(t)\} = \{e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt),\ e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \cos bt)\}$$

(3.13)

$$\{x_2(t), y_2(t)\} = \{e^{at}(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt),\ e^{at}(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)\}$$

ovat (3.1):n ratkaisuja. Tämä todetaan sijoittamalla parit (3.13) yhtälöihin (3.1). Esim. pari $\{x_1(t), y_1(t)\}$ toteuttaa ensimmäisen yhtälöista (3.1), sillä systeemin (3.3) ensimmäisen yhtälön nojalla

$$0 = (\lambda_1 - a_{11})\alpha_1 - a_{12}\beta_1$$

$$= (a + ib)(A_1 + iA_2) - a_{11}(A_1 + iA_2) - a_{12}(B_1 + iB_2)$$

$$= [aA_1 - bA_2 - a_{11}A_1 - a_{12}B_1] + i\,[bA_1 + aA_2 - a_{11}A_2 - a_{12}B_2]$$

josta seuraa

$$\begin{cases} aA_1 - bA_2 - a_{11}A_1 - a_{12}B_1 = 0 \\ bA_1 + aA_2 - a_{11}A_2 - a_{12}B_2 = 0 \end{cases} \qquad (3.14)$$

ja lopuksi

$$x_1'(t) - a_{11}x_1(t) - a_{12}y_1(t) = e^{at}\{aA_1 \cos bt - aA_2 \sin bt - bA_1 \sin bt - bA_2 \cos bt - a_{11}A_1 \cos bt + a_{11}A_2 \sin bt - a_{12}B_1 \cos bt + a_{12}B_2 \sin bt\}$$

$$= e^{at}\cos bt\,[aA_1 - bA_2 - a_{11}A_1 - a_{12}B_1] + e^{at}\sin bt\,[a_{11}A_2 - aA_2 - bA_1 + a_{12}B_2]$$

$$= 0$$

yhtälöiden (3.14) perusteella. m.o.t.

(Harj. (3.3) alempi yhtälö käyttöön.)

Lause 3.3

Jos yhtälöllä (3.5) on kompleksiset juuret $\lambda_1 = a + ib$ ja $\lambda_2 = a - ib$, missä $b \neq 0$, niin parit (3.13) ovat yhtälöryhmän (3.1) lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja aina kun $\{\alpha_1, \beta_1\}$ on yhtälöryhmän (3.3) ei-triviaali kompleksinen ratkaisu arvolla $\lambda = \lambda_1$.

Kertausta:

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad \{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$$

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta &= 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = a + ib \qquad b \neq 0$

$$(3.13) \qquad \begin{aligned} \{x_1(t), y_1(t)\} &= \{e^{at}(A_1\cos bt - A_2\sin bt),\ e^{at}(B_1\cos bt - B_2\sin bt)\} \\ \{x_2(t), y_2(t)\} &= \{e^{at}(A_1\sin bt + A_2\cos bt),\ e^{at}(B_1\sin bt + B_2\cos bt)\} \end{aligned}$$

$\alpha_1 = A_1 + iA_2 \quad , \quad \beta_1 = B_1 + iB_2$

Tod Lemman todistuksessa todettiin että parit (3.13) ovat (3.1):n ratkaisuja. Niiden Wronskin determinantti on

$$\begin{aligned} W(t) &= e^{2at}\big[(A_1\cos bt - A_2\sin bt)(B_1\sin bt + B_2\cos bt) \\ &\qquad - (A_1\sin bt + A_2\cos bt)(B_1\cos bt - B_2\sin bt)\big] \\ &= e^{2at}\left[A_1B_2(\cos^2 bt + \sin^2 bt) - A_2B_1(\sin^2 bt + \cos^2 bt)\right] \\ &= e^{2at}(A_1B_2 - A_2B_1) \end{aligned}$$

Lausekkeen $A_1B_2 - A_2B_1$ tutkimista varten osoitetaan aluksi, että $\alpha_1 = A_1 + iA_2 \neq 0$. Koska $\{\alpha_1, \beta_1\}$ on (3.3):n ratkaisu arvolla $\lambda = \lambda_1$, niin ehdosta $\alpha_1 = 0$ seuraisi $(a_{22}-\lambda)\beta_1 = 0$ ja edelleen $\beta_1 = 0$, sillä luvun $a_{22} - \lambda_1$ imaginaariosa on $-b \neq 0$. Tämä on vastoin oletusta $\{\alpha_1, \beta_1\} \neq \{0, 0\}$. Siis $\alpha_1 \neq 0$.

(3.3):n ensimmäisestä yhtälöstä seuraa nyt

$$a_{11} - \lambda_1 = -a_{12}\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -a_{12}\frac{B_1 + iB_2}{A_1 + iA_2} = -a_{12}\frac{(A_1 - iA_2)(B_1 + iB_2)}{A_1^2 + A_2^2}$$

Merkitsemällä tämä imaginaariosat yhtäsuuriksi saadaan

$$-b = -a_{12}\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1^2 + A_2^2}$$

Koska $b \neq 0$, myös $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ ja siten myös

$$W(t) = e^{2at}(A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0. \qquad \square$$

Esim. 3.3 Tarkastellaan systeemiä

$$x' = 4x + y$$
$$y' = -8x + 8y$$

Nyt

$$D = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat $\lambda_1 = 6 + 2i$ ja $\lambda_2 = 6 - 2i$, joten lauseen 3.3 antamat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat

$$\{x_1(t), y_1(t)\} = \{e^{6t}(A_1 \cos 2t - A_2 \sin 2t),\ e^{6t}(B_1 \cos 2t - B_2 \sin 2t)\},$$
$$\{x_2(t), y_2(t)\} = \{e^{6t}(A_1 \sin 2t + A_2 \cos 2t),\ e^{6t}(B_1 \sin 2t + B_2 \cos 2t)\}.$$

Tässä vakiot A_1, A_2, B_1 ja B_2 on valittava s.e. $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{A_1 + iA_2,\ B_1 + iB_2\}$ on yhtälöryhmän (3.3) ei-triviaalinen kompleksinen ratkaisu arvolla $\lambda = 6 + 2i$.

Silloin

$$\begin{cases} (4 - 6 - 2i)\alpha + \beta = 0 \\ -8\alpha + (8 - 6 - 2i)\beta = 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} -2(1+i)\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha + (1-i)\beta = 0 \end{cases}$$

Yhtälöryhmä toteutuu esim. arvoilla $\alpha = 1 + \frac{1}{2}i$, $\beta = 1 + 3i$. Vastaavat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat

$$\{e^{6t}(\cos 2t - \tfrac{1}{2}\sin 2t),\ e^{6t}(\cos 2t - 3\sin 2t)\}$$
$$\{e^{6t}(\sin 2t + \tfrac{1}{2}\cos 2t),\ e^{6t}(\sin 2t + 3\cos 2t)\}$$

Näiden ratkaisuparien lineaarikombinaatio on systeemin yleinen ratkaisu.

---

4. Lineaaristen systeemien stabilisuus

Tarkastellaan kahden ensimmäisen kertaluvun yhtälön muodostamaa autonomista yhtälöryhmää

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y) \qquad (4.1)$$

Piste (x_0, y_0) on systeemin (4.1) **kriittinen piste**, jos $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Jokainen kriittinen piste (x_0, y_0) antaa systeemille (4.1) vakioratkaisun $\{x(t), y(t)\} = \{x_0, y_0\}$, sillä vakion derivaatta on nolla:

$$x'(t) = 0 = f(x_0, y_0)$$
$$y'(t) = 0 = g(x_0, y_0)$$

Kriittisessä pisteessä (x_0, y_0) systeemi (4.1) on tasapainossa: sen tila ei muutu ajan funktiona.

Fysiikan sovelluksissa kriittinen piste on usein potentiaalienergian minimikohta. Esimerkkinä tarkastelemme esimerkin 1.2. heiluria, jonka diff.-yhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0$$

palautuu sijoituksella $\mu = d\theta/dt$ systeemiksi

$$\theta' = \mu$$
$$\mu' = -\omega^2 \sin\theta$$

Selvästi potentiaalienergia on pienimmillään kun $\theta = 0$, ja systeemi on tasapainossa pisteessä $(0,0)$. Muitakin kriittisiä pisteitä löytyy:

Esim. 4.1

Äskeisellä systeemillä

$$x' = y$$
$$y' = -\omega^2 \sin x$$

on äärettömän monta kriittistä pistettä, nimittäin kaikki pisteet $(k\pi, 0)$, missä k on kokonaisluku.

Esim. 4.2

systeemillä

$$x' = -x^2 + y$$
$$y' = x - y^2$$

on kaksi kriittistä pistettä, nimittäin pisteet $(0,0)$ ja $(1,1)$

Alkuarvotehtävän ratkaisu $\varphi(t)$ on stabiili, jos pieni muutos alkuarvossa $\varphi(t_0)$ ei aiheuta suurta muutosta ratkaisuun $t \geq t_0$.

Ratkaisu $\varphi(t)$ on asymptoottisesti stabiili, jos se on stabiili ja kaikki "lähellä" olevat ratkaisut ovat asymptoottisesti yhtäsuuret, so. lähestyvät toisiaan kun $t \to +\infty$.

Ratkaisu $\varphi(t)$ on epästabiili jos se ei ole stabiili

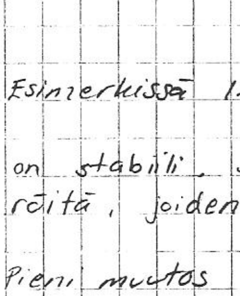
Esimerkissä 1.5 tarkasteltu systeemi

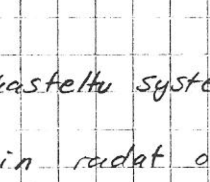
$$x' = y$$
$$y' = -x$$

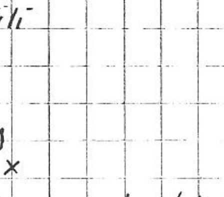
on stabiili. Systeemin radat ovat nimittäin origokeskisiä ympyröitä, joiden säde on

$$\sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}.$$

Pieni muutos alkuarvoissa $x(0)$, $y(0)$ muuttaa radan sädettä vain vähän, ja myös uusi ratkaisu on lähellä alkuperäistä ratkaisua kaikilla arvoilla $t \geq 0$.







Stabiliisuuden ~~määritelmät~~ voidaan täsmentää käyttämällä tason pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) euklidista etäisyyttä

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}.$$

Olkoon $\{x(t, x^*), y(t, y^*)\}$ se systeemin (4.1) (yksikäsitteisesti määrätty) ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$x(0) = x^*, \quad y(0) = y^*$$

Sanomme, että systeemin (4.1) vakioratkaisu (so. kriittinen piste) (x_0, y_0) on

(i) stabiili, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohden $\exists \delta > 0$ siten, että

$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0)] \le \varepsilon \quad \text{kaikille } t \ge 0 \qquad (4.2)$$

aina kun $d[(x^*, y^*), (x_0, y_0)] \le \delta$

(ii) asymptoottisesti stabiili, jos (x_0, y_0) on stabiili ja $\exists \delta > 0$ siten, että

$$\lim_{t \to \infty} d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0)] = 0 \qquad (4.3)$$

aina kun $d[(x^*, y^*), (x_0, y_0)] \le \delta$

(iii) epästabiili, jos (x_0, y_0) ei ole stabiili

Huom. Asymptoottisen stabiilisuuden määritelmässä vaaditaan, että (x_0, y_0) on stabiili. Tämä vaatimus on oleellinen, sillä ehto (4.2) ei seuraa ehdosta (4.3).

Esim. 4.3 Tarkastellaan jälleen harmonista värähtelijää

$$x' = y \qquad y' = -x$$

Selvästi $(0,0)$ on vakioratkaisu. Alkuehtoja $x(0) = x^*$, $y(0) = y^*$ vastaava ratkaisupari on

$$(x(t, x^*), y(t, y^*)) = (x^* \cos t + y^* \sin t, \; -x^* \sin t + y^* \cos t),$$

joten

$$\begin{aligned} d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0,0)] &= [(x^* \cos t + y^* \sin t)^2 + (-x^* \sin t + y^* \cos t)^2]^{1/2} \\ &= (x^{*2} + y^{*2})^{1/2} \\ &= d[(x^*, y^*), (0,0)] \end{aligned}$$

Stabiilisuusehto (4.2) on siis voimassa, kun valitaan $\delta = \varepsilon$, ja $(0,0)$ on stabiili.

Esim. 4.4 Tarkastellaan systeemiä

$$x' = y$$
$$y' = -2x - 3y.$$

Jälleen $(0,0)$ on kriittinen piste. Alkuehdot $x(0) = x^*$, $y(0) = y^*$ toteuttava ratkaisupari on

$$(x(t, x^*), y(t, y^*))$$
$$= \left((2x^* + y^*)e^{-t} - (x^* + y^*)e^{-2t}, -(2x^* + y^*)e^{-t} + 2(x^* + y^*)e^{-2t}\right)$$

Selvästi $\lim_{t\to\infty} x(t, x^*) = \lim_{t\to\infty} y(t, y^*) = 0$

riippumatta alkuarvoista x^*, y^* ja lisäksi $(0,0)$ on stabiili. Näin ollen $(0,0)$ on asymptoottisesti stabiili. Ehto (4.3) on tässä tapauksessa voimassa kaikille $\delta > 0$; tämä ilmaistaan sanomalla, että $(0,0)$ on globaalisesti asymptoottisesti stabiili.

(Harj: arvioi neliösummaa ja käytä Δ-epäyhtälöä)

22.10.2002

Kertaus:

Stabiili

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\left(\forall (x^*, y^*) ; d[(x^*, y^*), (x_0, y_0)] \leq \delta\right) (\forall t \geq 0) :$$
$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0)] \leq \varepsilon$$

Epästabiili

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\left(\exists (x^*, y^*) ; d[(x^*, y^*), (x_0, y_0)] \leq \delta\right), (\exists t \geq 0) :$$
$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0)] > \varepsilon.$$

Esim. 4.5

Systeemillä
$$x' = y$$
$$y' = -2x + 3y$$

on kriittinen piste $(0,0)$. Se on kuitenkin epästabiili, sillä

$$(x(t, x^*), y(t, y^*)) = \left((2x^* - y^*)e^{t} + (y^* - x^*)e^{2t}, (2x^* - y^*)e^{t} + 2(y^* - x^*)e^{2t}\right)$$

etäisyys origosta kasvaa rajatta kun $t \to \infty$ aina jos $(x^*, y^*) \neq (0,0)$.

$$\varepsilon = 1, \quad \delta > 0, \quad (x^*, y^*) = \underbrace{\left(\tfrac{\delta}{2}, \tfrac{\delta}{2}\right)}_{\text{etäisyys origosta } < \delta}$$

$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0,0)] \geq |x(t, x^*)| \geq \frac{\delta}{2} e^{t} > 1, \quad \text{kun } e^{t} > \frac{2}{\delta}$$

Esimerkeissä 4.3–4.5 systeemit olivat lineaarisia. Epälineaaristen systeemien stabiilisuuden tutkiminen on hankalampaa, sillä yleensä ratkaisuja ei tunneta eksplisiittisesti. Systeemejä voidaan kuitenkin yrittää approksimoida lineaarisilla systeemeillä, jotka ovat muotoa

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad (4.4)$$

missä kertoimet a_{ij} ovat reaalisia vakioita. Vastaava karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0 \qquad (4.5)$$

Osoittautuu, että systeemin (4.4) ratojen tyyppi voidaan päätellä yhtälön (4.5) juurista λ_1 ja λ_2. Seuraavassa tutkimme erikseen kaikki ne tapaukset, joissa $(0,0)$ on systeemin (4.4) ainoa kriittinen piste. Tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että yhtälön (4.5) juuret ovat nollasta eroavia (harj. teht.)
(osoita, että determinantti on 0, ja silloin on äärettömän monta ratkaisua.)

TAPAUS 1 λ_1 ja λ_2 ovat reaaliset, erisuuret ja samanmerkkiset.

Voidaan olettaa $\lambda_1 > \lambda_2$. Lauseen 3.1 nojalla jokainen ratkaisupari on muotoa

$$(x(t), y(t)) = \left(c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t},\ c_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}\right) \qquad (4.6)$$

missä $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ja $\{\alpha_2, \beta_2\}$ ovat yhtälöparin (3.3) ei-triviaaleja ratkaisuja vastaavasti arvoilla $\lambda = \lambda_1$ ja $\lambda = \lambda_2$ ja c_1, c_2 ovat vakioita.

TAPAUS 1 (a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (molemmat juuret negatiivisia)

Selvästi kaikki ratkaisut lähestyvät origoa kun $t \to \infty$. Ratojen tutkimiseksi tarkastellaan esim. tapausta $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. Silloin $\beta_2 x = \alpha_2 y$, joten rata on suora viiva (puolisuora). Vastaavasti tapauksen $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ rata on suora $\beta_1 x = \alpha_1 y$. Muitten ratojen tutkimiseksi oletetaan, että $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.
Silloin

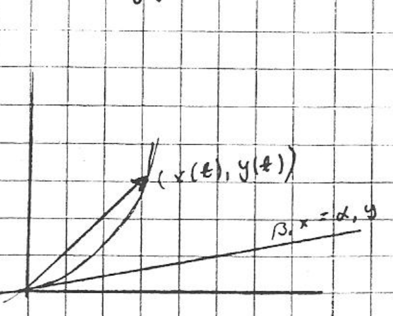
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}} \qquad (4.7)$$

ja jakamalla $e^{\lambda_1 t}$:llä saamme

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} \longrightarrow \frac{c_1\beta_1}{c_1\alpha_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \quad \text{kun } t \to \infty$$

25.10.2002

Origoa lähestyttäessä ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran $\beta_1 x = \alpha_1 y$ suuntaa.



Samoin tavoin nähdään, että annettaessa $t \to -\infty$ ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran $\beta_2 x = \alpha_2 y$ suuntaa. On selvää, että vakioratkaisu $(0,0)$ on asymptoottisesti stabiili.
Sanomme, että origo on stabiili risteys (stable node).

TAPAUS 1 (b). $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ (molemmat juuret positiivisia)

Vakioratkaisua lukuunottamatta jokaisen ratapisteen $(x(t), y(t))$ etäisyys origosta kasvaa rajatta, kun $t \to \infty$. Siis $(0,0)$ on epästabiili. Radat ovat muuten samanlaiset kuin tapauksessa 1(a) mutta vastakkaissuuntaiset.
Sanomme, että origo on epästabiiliristeys. (unstable node).
Kun $t \to -\infty$ radat lähestyvät origoa ja ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran $\beta_2 x = \alpha_2 y$ suuntaa.
Annettaess $t \to +\infty$ ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy vastaavasti suoran $\beta_1 x = \alpha_1 y$ suuntaa.

(vihje harjoituksiin. Tangentin suunta on $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Vertaa analyysin kursseihin)

TAPAUS 2. λ_1 ja λ_2 ovat reaaliset ja vastakkaismerkkiset.

Voidaan olettaa $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$. Yleinen ratkaisu on edelleen muotoa (4.6). Tapauksessa $c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$ pätee $\beta_2 x = \alpha_2 y$ ja $(x(t), y(t))$ lähestyy origoa kun $t \to \infty$.

Tapauksessa $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ pätee $\beta_2 x = \alpha_2 y$, ja $(x(t), y(t))$ liikkuu tällä suoralla origosta poispäin kun $t \to \infty$, mutta lähestyy origoa kun $t \to -\infty$.

Yleinen tapaus, jossa $c_1 \neq 0$ ja $c_2 \neq 0$, on monimutkaisempi. Kirjoittamalla (4.7) muotoilun

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}$$

$$= \frac{c_1\beta_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\beta_2}{c_1\alpha_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\alpha_2}$$

nähdään, että annettua $t \to \infty$ [vast. $t \to -\infty$] $y(t)/x(t)$ lähestyy arvoa β_1/α_1 [vast. β_2/α_2].
Kummassakin tapauksessa ratapisteen $(x(t), y(t))$ etäisyys origosta kasvaa rajatta sillä $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0,0)$.

Radalla on asymptoottina suora $\beta_1 x = \alpha_1 y$ [vast. $\beta_2 x = \alpha_2 y$], kun $t \to \infty$ [vast. $t \to -\infty$]

Lauseen 2.1 nojalla vakioratkaisu $(0,0)$ on ainoa systeemin (4.4) ratkaisu, jota vastaava rata kulkee origon kautta. Suoralla $\beta_2 x = \alpha_2 y$ sijaitsevat radat lähestyvät kuitenkin origoa kun $t \to \infty$; kaikkien muiden ratojen suhteen origo on "luotaantyöntävä". Ratakuvion perusteella sanomme, että origo on satulapiste. Se on selvästi epästabiili.

TAPAUS 3 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (reaalinen kaksoisjuuri)

Käsittelemme erikseen tapaukset $\lambda < 0$ ja $\lambda > 0$.

TAPAUS 3 (a) $\lambda < 0$

Lauseen 3.2 nojalla on kaksi mahdollisuutta sen mukaan toteutuuko yhtälöpari (3.8) identtisesti vai ei. Jos (3.8) toteutuu identtisesti, niin

$$a_{11} = a_{22} = \lambda \quad \text{ja} \quad a_{21} = a_{12} = 0$$

Systeemi (4.4) on silloin

$$x' = \lambda x$$
$$y' = \lambda y$$

ja ratkaisut ovat muotoa $(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t})$. Rata toteuttaa siis yhtälön

$$c_2 x = c_1 y,$$

joten kysymyksessä on origon kautta kulkeva suora. Ehdosta $\lambda > 0$ seuraa

$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to 0} y(t)$, joten origo on asymptoottisesti stabiili.

Sanomme tässä tapauksessa, että origo on tähdenmuotoinen stabiili risteys.

Jos (3.8) ei toteudu identtisesti, niin lauseen 3.2 perusteella yleinen ratkaisu on muotoa

$$(x(t), y(t)) = \left(\left[c_1 \alpha_1 + c_2(\alpha_2 + \alpha_1 t)\right] e^{\lambda t}, \left[c_1 \beta_1 + c_2(\beta_2 + \beta_1 t)\right] e^{\lambda t}\right) \quad (4.8)$$

Silloin

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + c_2 \beta_1 t}{c_1 \alpha + c_2 \alpha_2 + c_2 \alpha_1 t} = \frac{(c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2)/t + c_2 \beta_1}{(c_1 \alpha + c_2 \alpha_2)/t + c_2 \alpha_1},$$

joten

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Lisäksi

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{t \to \infty} y(t) = 0 \quad \text{ja origo on asymptoottisesti stabiili.}$$

Rajapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran $\beta_1 x = \alpha_1 y$ suuntaa, kun $t \to \pm\infty$.

TAPAUS 3(b) $\lambda > 0$

Radat ovat samanlaiset kuin tapauksessa 3(a) mutta vastakkaissuuntaiset, sillä pisteen $(x(t), y(t))$ etäisyy origosta kasvaa rajatta kun $t \to \infty$. Origo on epästabiili risteys.

TAPAUS 4 λ_1 ja λ_2 eivät ole reaalisia.

Olkoon $\lambda_1 = a + ib$ ja $\lambda_2 = a - ib$; oletamme niin että $b \neq 0$. Lauseen 3.3 nojalla yleinen ratkaisu on

$$(x(t), y(t)) = \Big(e^{at}\big[c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)\big],$$
$$e^{at}\big[c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)\big]\Big), \qquad (4.9)$$

missä $(A_1 + iA_2, B_1 + iB_2)$ on jokin yhtälöryhmän (3.3) ei-triviaali kompleksinen ratkaisu arvolla $\lambda = \lambda_1$.
Merkitsemällä

$$k_1 = c_1 A_1 + c_2 A_2, \quad k_2 = -c_1 A_2 + c_2 A_1,$$
$$k_3 = c_1 B_1 + c_2 B_2, \quad k_4 = -c_1 B_2 + c_2 B_1,$$

voidaan (4.9) kirjoittaa

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt) \\ y(t) &= e^{at}(k_3 \cos bt + k_4 \sin bt) \end{aligned} \qquad (4.10)$$

29.10.2002

Esitetään tason pisteet $(k_1, -k_2)$ ja $(k_3, -k_4)$ napakoordinaattimuodossa:

$$k_1 = A \cos \alpha_1, \quad k_3 = B \cos \alpha_2$$
$$-k_2 = A \sin \alpha_1, \quad -k_4 = B \sin \alpha_2 \qquad (4.11)$$

missä $A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, $B = \sqrt{k_3^2 + k_4^2}$ ja α_1, α_2 sijaitsevat välillä $[0, 2\pi]$. Yhtälöistä (4.10) ja (4.11) seuraa

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{at}(\cos\alpha_1 \cos bt - \sin\alpha_1 \sin bt) = Ae^{at}\cos(bt + \alpha_1) \\ y(t) &= Be^{at}(\cos\alpha_2 \cos bt - \sin\alpha_2 \sin bt) = Be^{at}\cos(bt + \alpha_2) \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Lauseen 3.3 todistuksessa totesimme, että $A_1^2 + A_2^2 > 0$.

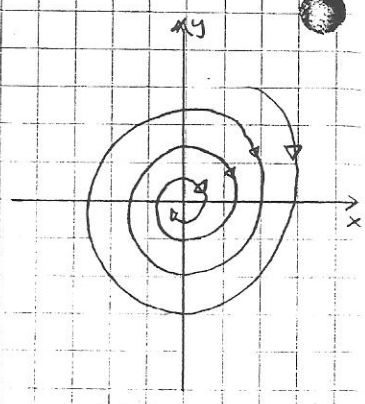
Koska $A^2 = k_1^2 + k_2^2 = (c_1 A_1 + c_2 A_2)^2 + (-c_1 A_2 + c_2 A_1)^2$

$$= c_1^2(A_1^2 + A_2^2) + c_2^2(A_1^2 + A_2^2) = (c_1^2 + c_2^2)(A_1^2 + A_2^2),$$

niin A häviää vain jos $c_1^2 + c_2^2 = 0$, so. jos kysymyksessä on triviaaliratkaisu $x(t) = y(t) = 0$. Samalla tavoin nähdään, että ei-triviaalin ratkaisun tapauksessa myös $B \neq 0$, ja alkuarvotehtävän 1-käsitteisyyden perusteella $\cos(bt + \alpha_1)$ ja $\cos(bt + \alpha_2)$ eivät häviä samanaikaisesti millään t:n arvolla.

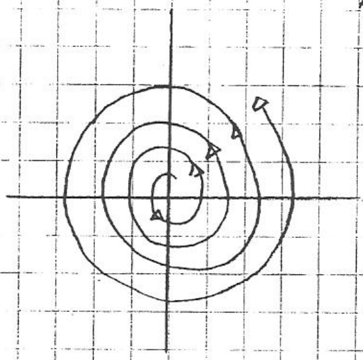
TAPAUS 4 (a) . $a<0$

Yhtälöiden (4.12) esittämä käyrä on spiraalimuotoinen, ja ehdon $a<0$ nojalla ratapiste $(x(t), y(t))$ lähestyy origoa kun $t \to \infty$. Origo on siis asymptoottisesti stabiili; sanomme, että se on stabiili spiraalipiste.



Stable focus

TAPAUS 4 (b) $a>0$



Radat ovat samanlaiset kuin tapauksessa 4 (a) mutta vastakkaissuuntaiset. Pisteen $(x(t), y(t))$ etäisyys origosta kasvaa rajatta kun $t \to \infty$. Origo on epästabiili spiraalipiste

unstable focus

TAPAUS 4 (c) $a=0$

Yhtälöista (4.12) seuraa nyt

$$(x(t), y(t)) = (A\cos(bt+\alpha_1), B\cos(bt+\alpha_2)) \qquad (4.13)$$

Funktioilla $x(t)$ ja $y(t)$ on siten jaksona $2\pi/b$, joten pisteestä (x_0, y_0) hetkellä $t=t_0$ alkava rata palaa takaisin samaan pisteeseen hetkellä $t=t_0+2\pi/b$. Radat ovat siis suljettuja käyriä ja toteuttavat yhtälön

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(bt+\alpha_1) + \cos^2(bt+\alpha_2) \qquad (4.14)$$

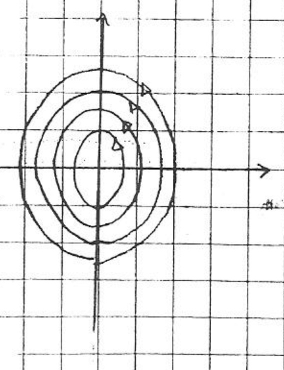
Erikoistapauksessa $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ yhtälön (4.14) oikea puoli on

$$\cos^2 bt + \sin^2 bt = 1$$

jolloin yhtälö esittää ellipsiä, jonka akseleina ovat x- ja y-akselit.

Myös yleisessä tapauksessa (4.14) esittää ellipsiä, joka kiertää origon ympäri. Origo on näin ollen stabiili, mutta ei asymptoottisesti stabiili, sillä radat kiertävät origoa mutta eivät lähesty sitä.

Sanomme tällöin, että origo on keskus



Yläolevien stabiilisuustarkastelujen tulokset voidaan koota yhteen seuraavasti.

Lause 4.1

Olkoot λ_1 ja λ_2 vakiokertoimisen systeemin

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

karakteristisen yhtälön (4.5) juuret. Oletetaan, että $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$, jolloin origo on ainoa kriittinen piste. Silloin

(a) origo on stabiili, jos λ_1 ja λ_2 ovat puhtaasti imaginaarisia

(b) origo on asymptoottisesti stabiili, jos $Re\,\lambda_1 < 0$ ja $Re\,\lambda_2 < 0$.

(c) origo on epästabiili kaikissa muissa tapauksissa.

Ratojen luonne origon lähellä käy ilmi seuraavasta taulukosta

λ_1, λ_2	kriittinen piste
reaaliset, erisuuret, negatiiviset	stabiili risteys
reaaliset, erisuuret, positiiviset	epästabiili risteys
reaaliset, vastakkaismerkkiset	satulapiste (epästabiili)
reaaliset, yhtäsuuret, negatiiviset	stabiili risteys
reaaliset, yhtäsuuret, positiiviset	epästabiili risteys
kompleksiset, reaaliosa negatiivinen	stabiili spiraalipiste
kompleksiset, reaaliosa positiivinen	epästabiili spiraalipiste
puhtaasti imaginaariset	keskus (stabiili)

Esim. 4.6

Systeemin
$$x' = x - 3y$$
$$y' = x - y$$

karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + 2 = 0$ juuret ovat $\pm\sqrt{2}\,i$. Origo on siis stabiili ja keskus.

Esim. 4.7

Systeemin
$$x' = 4x - y$$
$$y' = 6x - 3y$$

karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ juuret ovat 3 ja -2. Origo on siis satulapiste ja niin ollen epästabiili.

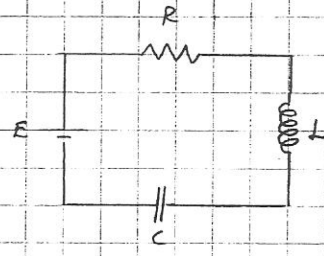
Esim. 4.8

Systeemin
$$x' = -4x - y$$
$$y' = x - 2y$$

karakteristisen yhtälön $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ on kaksoisjuuri $\lambda = -3$. Origo on siis stabiili risteys ja myös asymptoottisesti stabiili.

Esim. 4.9

Kuvan osoittaman RLC-piirin virranvoimakkuus I toteuttaa diff. yhtälön



$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = 0$$

joka voidaan palauttaa systeemiksi

$$I' = y$$
$$y' = -\frac{1}{CL} I - \frac{R}{L} y$$

Karakteristisella yhtälöllä

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$$

on juuret

$$\lambda_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \qquad \lambda_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$$

Kriittinen piste $(0,0)$ luonne riippuu diskriminantin $R^2 - 4L/C$ merkistä:

(i) Jos $R^2 - 4L/C > 0$, niin λ_1 ja λ_2 ovat reaaliset, erisuuret ja negatiiviset; tällöin origo on stabiili risteys.

(ii) Jos $R^2 - 4L/C = 0$ niin $\lambda_1 = \lambda_2 = -R/2L$, joten origo on jälleen stabiili risteys

(iii) Jos $R^2 - 4L/C < 0$, niin λ_1 ja λ_2 ovat kompleksilukuja, joilla on negatiivinen reaaliosa; origo on tällöin stabiili spiraalipiste.

Kaikissa tapauksissa kriittinen piste on asymptoottisesti stabiili, ja virran voimakkuus lähestyy siten nollaa kun $t \to \infty$.

5. EPÄLINEAARISTEN SYSTEEMIEN STABIILISUUS

Tarkastellaan autonomista epälineaarista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \qquad (5.1)$$

missä f ja g ovat kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita. Oletamme, että $f(0,0) = g(0,0) = 0$, jolloin origo on kriittinen piste. Muodostetaan f:lle ja g:lle Taylorin kehitelmät

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + x D_1 f(0,0) + y D_2 f(0,0) + f_1(x,y) \\ g(x,y) &= g(0,0) + x D_1 f(0,0) + y D_2 f(0,0) + g_1(x,y) \end{aligned} \qquad (5.2)$$

missä

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \tfrac{1}{2}(x D_1 + y D_2)^2 f(\theta_1 x, \theta_1 y) \\ g_1(x,y) &= \tfrac{1}{2}(x D_1 + y D_2)^2 g(\theta_2 x, \theta_2 y) \end{aligned} \qquad (5.3)$$

ja x:stä ja y:stä riippuvat luvut θ_1, θ_2 sijaitsevat välillä $(0,1)$.

$\left[(xD_1 + yD_2)^2 = x^2 D_{11} + y^2 D_{22} + 2xy D_{12}\right]$

Koska $f(0,0) = g(0,0) = 0$, kehitelmät (5.2) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_{11} x + a_{12} y + f_1(x,y), \\ g(x,y) &= a_{21} x + a_{22} y + g_1(x,y) \end{aligned}$$

missä $a_{11} = D_1 f(0,0)$, $a_{12} = D_2 f(0,0)$, a_{21} $D_1 g(0,0)$ ja $a_{22} = D_2 g(0,0)$. Jäännöstermi pätee

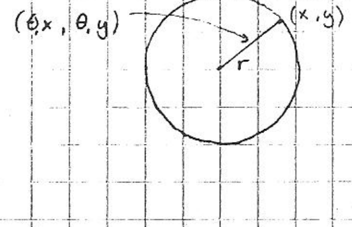
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \qquad (5.4)$$

Tämä nähdään siirtymällä napakoordinaatteihin

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Kaavoissa (5.3) esiintyvät funktion f toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat nimittäin jatkuvuuden perusteella rajoitettuja origon ympäristössä:

$$|D_{11} f(\theta_1 x, \theta_1 y)| + 2|D_{12} f(\theta_1 x, \theta_1 y)| + |D_{22} f(\theta_1 x, \theta_1 y)| \le M < \infty$$

kun r on kyllin pieni. Tällaisilla r:n arvoilla



$$\begin{aligned} |f_1(x,y)| &= \tfrac{1}{2}\left| x^2 D_{11} f(\theta_1 x, \theta_1 y) + 2xy D_{12} f(\theta_1 x, \theta_1 y) + y^2 D_{22} f(\theta_1 x, \theta_1 y)\right| \\ &\le \frac{r^2}{2} \cdot |\cos^2\theta\, D_{11} f(\theta_1 x, \theta_1 y)| + r^2 |\cos\theta \sin\theta\, D_{12} f(\theta_1 x, \theta_1 y)| \\ &\quad + \frac{r^2}{2} |\sin^2\theta\, D_{22} f(\theta_1 x, \theta_1 y)| \\ &\le \frac{r^2}{2} M \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\left| \frac{f_1(x,y)}{r} \right| \le \frac{r}{2} M \longrightarrow 0, \text{ kun } r \to 0$$

Samoin tavoin näytetään, että myös $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

Seuraavaksi oletamme lisäksi, että

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \quad ; \qquad (5.5)$$

tämä merkitsee sitä, että kuvauksen (f,g) Jacobin determinantti

$$\begin{vmatrix} D_1 f & D_2 f \\ D_1 g & D_2 g \end{vmatrix}$$ on origossa nollasta eroava.

Esim. 5.1 Systeemi

$$x' = 2x + 3y + x^3$$
$$y' = x - 2y - y^{4/3}$$

toteuttaa ehdot (5.4) ja (5.5), sillä

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^{4/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Käymme tarkastelemaan systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + f_1(x,y) \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + g_1(x,y) \end{aligned} \qquad (5.6)$$

joka toteuttaa ehdot (5.4) ja (5.5), ja vastaavaa lineaarista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Molemmilla systeemeillä on kriittinen piste $(0,0)$. Sen luonne voidaan päätellä seuraavasta lauseesta, jonka todistus sivuutetaan.

Lause 5.1

Olkoot λ_1 ja λ_2 lineaarisen systeemin (5.7) liittyvän karakteristisen yhtälön juuret.

(i) Systeemien (5.6) ja (5.7) origossa sijaitsevilla kriittisillä pisteillä on sama tyyppi, mikäli

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ja origo on (5.7):n risteys
(b) $\lambda_1 = \lambda_2$ ja origo ei ole (5.7):n tähdenmuotoinen risteys.
(c) origo on (5.7):n satulapiste
(d) origo on (5.7):n spiraalipiste

(ii) Systeemien (5.6) ja (5.7) origossa sijaitsevat kriittiset pisteet eivät aina ole samantyyppiset, mikäli

(e) $\lambda_1 = \lambda_2$ ja origo on (5.7):n tähdenmuotoinen risteys; silloin (0,0) on joko (5.6):n risteys tai (5.6):n spiraalipiste.

(f) origo on (5.7):n keskus; silloin (0,0) on joko (5.6):n keskus tai (5.6):n spiraalipiste.

Epälineaarisen systeemin (5.6) stabiilisuutta voidaan tutkia seuraavan lauseen avulla, jonka todistus myös sivuutetaan.

Lause 5.2

(i) Jos origo on asymptoottisesti stabiili systeemissä (5.7), se on asymptoottisesti stabiili myös systeemissä (5.6)

(ii) Jos origo on epästabiili systeemissä (5.7), se on epästabiili myös systeemissä (5.6)

(iii) Jos origo on systeemissä (5.7) stabiili mutta ei asymptoottisesti stabiili, niin systeemissä (5.6) origo voi olla joko asymptoottisesti stabiili, stabiili tai epästabiili.

Huom Lauseen 5.2 tulos (ii) pätee myös tapauksessa, jossa ehto (5.5) ei ole täytetty. Tällainen tilanne esiintyy myös esimerkissä 5.3.

Lauseet 5.3 ja 5.2 on helppo uskoa sen perusteella, että lähellä origoa systeemit (5.6) ja (5.7) ovat likipitäen samat: rajoitettaessa sopivaan origon ympäristöön voidaan ajatella, että epälineaarinen systeemi (5.6) syntyy lineaarisesta systeemistä (5.7), kun yhtälöissä tapahtuu pieni häiriö.

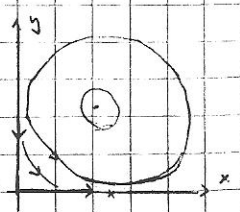
Esim. 5.2 § 1:ssä tarkasteltuja Lotkan-Volteran yhtälöitä

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta_1 x - \delta_{11} x^2 - \delta_{12} xy \\
y' &= -\beta_2 y + \delta_{21} xy - \delta_{22} y^2
\end{aligned}
\qquad (5.8)
$$

voidaan origon ympäristössä approksimoida vastaavalla lineaarisella systeemillä

$$
\begin{aligned}
x' &= \beta_1 x \\
y' &= -\beta_2 y
\end{aligned}
\qquad (5.9)
$$

jonka yleinen ratkaisu on $(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\beta_1 t}, c_2 e^{-\beta_2 t})$



12.11.2002 Ehdot (5.4) ja (5.5) ovat selvästi voimassa (koska $\beta_1 \neq 0$ ja $\beta_2 \neq 0$).

jatkuu ⟹

Lineaarisen systeemin (5.9) karakteristisella yhtälöllä on vastakkaismerkkiset reaalijuuret $\lambda_1 = \beta_1$ ja $\lambda_2 = -\beta_2$. Origo on siten (epästabiili) satulapiste. Lauseen 5.2 nojalla origo on epästabiili myös systeemissä (5.8), ja lauseen 5.1 perusteella (0,0) on myös (5.8):n satulapiste.

Esim. 5.3 Systeemillä

$$x' = -2xy = f(x,y) \qquad (5.10)$$
$$y' = -x + y + xy - y^3 = g(x,y)$$

on kolme kriittistä pistettä

$$\begin{cases} -2xy = 0 \\ -x+y+xy-y^3 = 0 \end{cases} \qquad y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y - y^3 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

Ne ovat siis (0,0), (0,1) ja (0,−1), jotka löydetään ratkaisemalla yhtälöpari $-2xy = -x+y+xy-y^3 = 0$. Tutkimme systeemissä erikseen kunkin kriittisen pisteen ympäristössä:

1. (0,0) Vastaava lineaarinen systeemi

$$x' = 0 \qquad (5.11)$$
$$y' = -x + y$$

Siihen liittyvällä karakteristisella yhtälöllä $\lambda^2 - \lambda = 0$ on juuret $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Origo on epästabiili systeemissä (5.11) (Harjoitus 5, teht. 4. ratkaise systeemi), joten lausetta 5.2 seuraavan huomautuksen nojalla origo on epästabiili myös systeemissä (5.10).

2. (0,1) Kriittinen piste saadaan origoon suorittamalla muuttujan vaihto $x = x$, $z = y - 1$. Silloin (5.10) tulee muotoon

$$x' = -2x(z+1)$$
$$z' = -\cancel{x} + z + 1 + x(z+\cancel{1}) - (z+1)^3$$
$$= z + 1 + xz - (z^3 + 3z^2 + 3z + 1)$$
$$= -2z + xz - 3z^2 - z^3$$

ja vastaava lineaarinen systeemi on

$$x' = -2x$$
$$z' = -2z$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, ja origo on tähdenmuotoinen stabiili risteys. Lauseen 5.2 nojalla (0,1) on systeemin (5.10) asymptoottisesti stabiili kriittinen piste, ja lauseen 5.1. c) perusteella se on joko (5.10):n risteys tai (5.10):n spiraalipiste.

12.11.2002 3.

3. $(0,-1)$: Nyt tarvittava tason siirto määritellään yhtälöillä $x = x$, $z = y+1$. Systeemin (5.10) yhtälöt ovat

$$
\begin{aligned}
x' &= -2x(z-1) \\
z' &= -x + z - 1 + x(z-1) - (z-1)^3 \\
&= -2x + z - \cancel{1} + xz - (z^3 - 3z^2 - 3z - \cancel{1}) \\
&= -2x - 2z + xz + 3z^2 - z^3
\end{aligned}
$$

ja vastaava lineaarinen systeemi

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x \\
z' &= -2x - 2z
\end{aligned}
$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, joten $(0,-1)$ on (5.10):n epästabiili satulapiste.

19.11.2002

Esim. 5.4 Esimerkissä 1.2 tarkastelimme vaimentamattoman heilurin diff.-yhtälöä

$$\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$$

Asettamalla $\mu = \theta'$ saadaan systeemi

$$
\begin{aligned}
\theta' &= \mu \\
\mu' &= -\omega^2 \sin\theta
\end{aligned}
\qquad (5.12)
$$

jonka kriittiset pisteet ovat $(k\pi, 0)$, missä $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Koska

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^2}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

niin kriittistä pistettä $(0,0)$ vastaava lineaarinen systeemi on

$$
\begin{aligned}
\theta' &= \mu \\
\mu' &= -\omega^2\theta
\end{aligned}
$$

Tälle systeemille origo on keskus (harj. 6, teht. 2), joten lauseesta 5.2 ei voida päättää mitään origon stabiilisuudesta systeemissä (5.12).
Kriittisen pisteen $(\pi, 0)$ luonne saadaan sen sijaan selville suorittamalla muuttujan vaihto $z = \theta - \pi$, jolloin (5.12) saa muodon

$$
\begin{aligned}
z' &= \mu \\
\mu' &= -\omega^2 \sin(z+\pi) = -\omega^2 \sin z \cos\pi = \omega^2 \sin z,
\end{aligned}
$$

ja vastaava lineaarinen systeemi on

$$
\begin{aligned}
z' &= \mu \\
\mu' &= \omega^2 z
\end{aligned}
$$

Karakteristisen yhtälön $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ juuret ovat $\lambda_1 = \omega$ ja $\lambda_2 = -\omega$.
Näin ollen origo on satulapiste, joten lauseen 5.1 nojalla $(\pi, 0)$ on epästabiili satulapiste myös epälineaarisessa systeemissä (5.12).

Energiaperiaatteen avulla voidaan osoittaa, että origo on todella keskus. Lauseen 5.1 nojalla origo on nimittäin joko keskus tai spiraalipiste. Systeemin konservatiivisuudesta seuraa kuitenkin, että sen kokonaisenergia ei kasva eikä pienene. Sen vuoksi origo ei voi olla spiraalipiste, sillä stabiilin [vast. epästabiilin] spiraalipisteen tapauksessa kokonaisenergian tulisi pienetä [vast. kasvaa]. Näin ollen origon on oltava keskus.

Koska funktiolla $\sin\theta$ on jaksona 2π, niin kriittisellä pisteellä $(k\pi, 0)$ on sama tyyppi

(a) origon kanssa, jos k on parillinen
(b) pisteen $(\pi, 0)$ kanssa, jos k on pariton.

Esim. 5.5 Tarkastellaan edellisen esimerkin heiluria, mutta oletetaan että heilahtelua on vaimentamassa kulmanopeuteen θ' verrannollinen voima. Jos verrannollisuuskerroin on vakio $\varepsilon > 0$ saadaan diff. yhtälö

$$\theta'' + \varepsilon \cdot \theta' + \omega^2 \sin\theta = 0$$

26.11.2002

Yhtäpitävä systeemi

$$\begin{aligned} \theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \sin\theta - \varepsilon\mu \end{aligned} \qquad (5.13)$$

Fysikaalisesti on ilmeistä, että origo on asymptoottisesti stabiili kriittinen piste. Tämän todistamiseksi tarkastellaan vastaavaa lineaarista systeemiä

$$\begin{aligned} \theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \theta - \varepsilon\mu \end{aligned} \qquad (5.14)$$

$\sin\theta = \underline{\theta} - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$

jonka karakteristisella yhtälöllä $\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$ on juuret

$$\lambda_1 = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = \frac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\omega^2}}{2}$$

(vrt. esim 4.9)

Origo on systeemissä (5.14) siten

- stabiili risteys, jos $\varepsilon \geq 2\omega$
- stabiili spiraalipiste, jos $\varepsilon < 2\omega$

Lauseen 5.2 perusteella origo on systeemissä (5.13) aina asymptoottisesti stabiili.

6.1 Ljapunovin lause

Määr.

Olkoon $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvasti määritelty funktio ja $V(0,0) = 0$. Sanomme, että V on positiivisesti definiitti, jos $V(x,y) > 0$ kaikille $(x,y) \neq (0,0)$.

Jos $V(x,y) < 0$ kaikille $(x,y) \neq 0$, sanomme että V on negatiivisesti definiitti.

Jos $V(x,y) \geq 0$ [vast. $V(x,y) \leq 0$] kaikille $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sanomme että V on positiivisesti semidefiniitti [vast. negatiivisesti semidefiniitti].

Jos V ei ole positiivisesti eikä negatiivisesti semidefiniitti, V on indefiniitti.

Esim. 6.1

(a) Funktio $V(x,y) = x^2 + y^2$ on positiivisesti definiitti.

(b) $V(x,y) = -(x^2+y^2)$ negatiivisesti definiitti

(c) $V(x,y) = x^2$ positiivisesti semidefiniitti, sillä $V(0,a) = 0$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

(d) $V(x,y) = -y^2$ negatiivisesti semidefiniitti

(e) $V(x,y) = xy$ indefiniitti, sillä $V(a,a) = a^2 > 0$ ja $V(a,-a) = -a^2 < 0$ kaikille $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Analyysin kurssilla:

Lause 6.1

Funktio (neliömuoto)

$$V(x,y) = x^2 + axy + by^2 \quad \text{on}$$

(a) positiivisesti definiitti, jos ja vain jos $4b - a^2 > 0$

(b) positiivisesti semidefiniitti, jos ja vain jos $4b - a^2 \geq 0$

(c) indefiniitti, jos $4b - a^2 < 0$.

[Todistuksen hahmottelua: $x^2 + axy + by^2 = (x + \frac{a}{2}y)^2 + \frac{1}{4}(4b - a^2)y^2$
$\Rightarrow$ Lause seuraa]

Huom. Vastaava lause negatiivisesti definiiteille ja semidefiniiteille neliömuodoille seuraa siitä, että $V(x,y)$ on negat. [semi]definiitti jos ja vain jos $-V(x,y)$ on positiivisesti [semi] definiitti.

Esim. 6.2 (a) Funktio $x^2 - xy + 2y^2$ on positiivisesti definiitti, sillä $4b - a^2 = 7 > 0$

(b) $V(x,y) = -x^2 + 4xy - 4y^2$ on negatiivisesti semidefiniitti, sillä $-V(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ on positiivisesti semidefiniitti ($4b - a^2 = 0$)

(c) $x^2 + 4xy - 4y^2$ on indefiniitti, sillä $4b - a^2 = -32 < 0$.

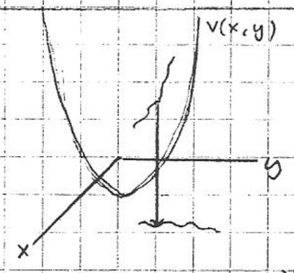
Tarkastellaan autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y) \end{aligned} \qquad (6.1)$$

jolla on kriittinen piste origossa. Olkoon $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva positiivisesti definiitti funktio. Määritellään funktion V <u>derivaatta systeemin (6.1) ratoja pitkin</u> yhtälöllä

$$V'(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y) \qquad (6.2)$$

Sanomme, että V on systeemin (6.1) <u>Ljapunovin funktio</u>, jos $V'(x,y)$ on negatiivisesti semidefiniitti.



$$t \mapsto (x(t), y(t)) \xrightarrow{V} V(x(t), y(t))$$

Lause 6.2 (Ljapunovin lause)
Olkoon $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva positiivisesti definiitti funktio

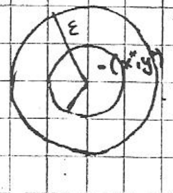
(i) jos V on systeemin (6.1) Ljapunovin funktio, niin origo on stabiili

(ii) jos $V'(x,y)$ on negatiivisesti definiitti, niin origo on asymptoottisesti stabiili

(iii) Jos $V'(x,y)$ on positiivisesti definiitti, niin origo on epästabiili

Tod.

(i) Annetaan $\varepsilon > 0$ ja merkitään



$$m = \min \{ V(x,y) ; d[(x,y),(0,0)] = \varepsilon \} ;$$

Tämä minimi on olemassa, sillä V on jatkuva ja ympyrä $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ on kompakti. Edelleen $m > 0$, koska V on positiivisesti definiitti.

Koska $\lim_{(x,y) \to (0,0)} V(x,y) = V(0,0) = 0$, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$\delta < \varepsilon$ ja $V(x,y) \le \frac{m}{2}$ aina kun $d[(x,y),(0,0)] \le \delta$.

Stabiilisuuden (4.2) todistamiseksi valitaan (x^*, y^*) siten, että $d[(x^*, y^*),(0,0)] \le \delta$.

Sovelletaan väliarvolausetta funktioon $f(t) = V(x(t,x^*), y(t,y^*))$, missä $x(t,x^*)$ ja $y(t,y^*)$ määritellään kuin § 4:ssä; saadaan

$$f(t) - f(0) = t f'(\xi),$$

missä

$$f'(\xi) = V'(x(\xi, x^*), y(\xi, y^*)).$$

Koska $V'(x,y)$ on negatiivisesti semidefiniitti, niin $f'(\xi) \le 0$ joten siis

$$f(t) - f(0) \le 0 \quad \text{kaikille } t \ge 0.$$

Näin ollen $V(x(t,x^*), y(t,y^*)) \le V(x^*, y^*) \le \frac{m}{2}$

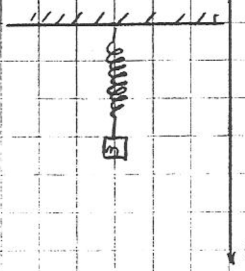
kaikille $t \ge 0$, joten mikään pisteistä $(x(t,x^*), y(t,y^*))$ ei voi sijaita ympyrällä.

Määritellään $g(t) = x(t,x^*)^2 + y(t,y^*)^2$; silloin g on jatkuva arvoilla $t \ge 0$. Edelleen $g(0) = (x^*)^2 + (y^*)^2 \le \delta^2 < \varepsilon^2$ ja g ei saa arvoa ε^2. Näin ollen $g(t) \le \varepsilon^2$ kaikille $t \ge 0$ (harj. teht. Botzanan lause? Tai jokin sellainen), joten

$$d[(x(t,x^*), y(t,y^*)),(0,0)] \le \varepsilon \quad \text{kaikille } t \ge 0.$$

Ehto (4.2) on täytetty, joten origo on stabiili.

Esim. 6.3



Jouseen ripustetun massan liikettä kuvaa vaimennetun värähtelyliikkeen diff. yhtälö

$$x'' + \varepsilon x' + \mu x = 0 \qquad (6.3)$$

missä ε on vaimennussuhde ja μ riippuu jousivakiosta. Oletamme, että ε ja μ ovat vakioita ja että $\mu = 1$. Silloin (6.3) voidaan korvata systeemillä

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - \varepsilon y \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Funktio $V(x,y) = x^2 + y^2$ on tämän systeemin Ljapunovin funktio, sillä V on pos. definiitti ja

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = 2xy + 2y(-x - \varepsilon y) = -2\varepsilon y^2$$

on negatiivisesti semidefiniitti.
Lauseesta 6.2 seuraa siis, että origo on stabiili.

Huom. Ljapunovin funktio on usein verrannollinen systeemin kokonaisenergiaan. Esimerkissä 6.3 potentiaalienergian $\frac{1}{2} m x^2$ ja liike-energian $\frac{1}{2} m y^2$ summa $\frac{1}{2} m(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m V(x,y)$.

Systeemissä (6.4) origo on itse asiassa asymptoottisesti stabiili (vrt. vastaavaan systeemiin (5.14) esimerkissä 5.5). Tätä ei kuitenkaan nähdä lauseen 6.2 perusteella käytettäessä funktiota $V(x,y) = x^2 + y^2$.

Esim. 6.4

Edellisessä esimerkissä jousivoima oli verrannollinen tasapainokohdasta mitattuun poikkeamaan x. Epälineaarinen jousi syntyy, kun ko. voima on muotoa $-f(x)$, missä $f(x)$ on jokin x:n epälineaarinen funktio. Jos vaimennussuhde ε oletetaan nollaksi, systeemin liikeyhtälö on silloin

$$x'' + f(x) = 0. \qquad (6.5)$$

Oletetaan, että f on jatkuva ja että

$$f(0) = 0 \quad \text{ja} \quad x\,f(x) > 0 \quad \text{kaikille} \quad x \neq 0 \qquad (6.6)$$

so. x ja $f(x)$ ovat samanmerkkiset. Korvataan (6.5) systeemillä

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -f(x) \end{aligned} \qquad (6.7)$$

Systeemillä (6.7) on kriittinen piste vain origossa. Kokonaisenergia on verrannollinen lausekkeeseen

$$V(x,y) = F(x) + y^2/2,$$

missä $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ edustaa potentiaalienergiaa ja $y^2/2$ liike-energiaa.

Funktio $V(x,y)$ on positiivisesti definiitti, sillä x ja $f(x)$ oletetaan samanmerkkisiksi ehdossa (6.6). Edelleen V on systeemin (6.7) Ljapunovin funktio, sillä

$$V'(x,y) = F'(x)x' + yy' = f(x)y + y(-f(x)) = 0$$

Lause 6.2 $\Rightarrow$ origo on stabiili.

Sopivan Ljapunovin funktion löytäminen voi olla vaikeaa erityisesti silloin, kun systeemin kokonaisenergiaa ei kyetä arvioimaan. Usein kannattaa kuitenkin kokeilla tyyppiä

$$V(x,y) = x^2 + axy + by^2$$

olevia neliömuotoja.

<u>Esim. 6.3</u> 17.12.2002

Tark. systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= xy^2 + x^2y + x^3 \\ y' &= y^3 - x^3 \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Funktion $V(x,y) = x^2 + axy + by^2$ derivaatta systeemin (6.6) ratoja pitkin on

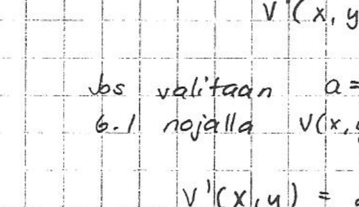
$$V'(x,y) = (2x + ay)(xy^2 + x^2y + x^3) + (ax + 2by)(y^3 - x^3)$$

Jos valitaan $a = 0$ ja $b = 1$, niin $4b - a^2 = 4 > 0$, ja lauseen 6.1 nojalla $V(x,y)$ on posit. definiitti. Edelleen

$$\begin{aligned} V'(x,y) &= 2x(xy^2 + \cancel{x^2y} + x^3) + 2y(y^3 - \cancel{x^3}) \\ &= 2(x^2y^2 + x^4 + y^2) \end{aligned}$$

Siis myös $V'(x,y)$ on positiivisesti definiitti, joten lauseen 6.2 perusteella origo on epästabiili.

<u>Lause 6.2</u> V pos. def.
(ii) $V'(x,y)$ negat. defit $\Rightarrow$ origo on asymptoottisesti stabiili



Apulause

Olkoon $h(t)$ arvoilla $t \geq 0$ määritelty derivoituva funktio siten, että $h'(t) \leq 0 \leq h(t)$ kaikille $t \geq 0$. Silloin

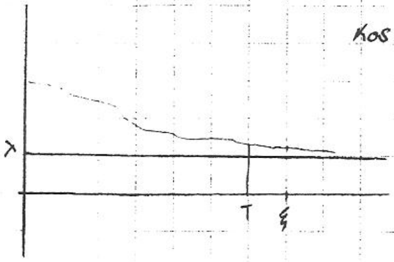
$$\limsup_{t\to\infty} h'(t) = 0$$

Tod. Funktio $h(t)$ on pienenevä ja alhaalta rajoitettu, joten $\exists$ raja-arvo

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} h(t).$$

Annetaan $\varepsilon > 0$ ja valitaan $T \geq 0$ s.e. $h(T) - \lambda \leq \varepsilon$.
väliarvolause $\Rightarrow$

$$\exists\, \xi \geq T \text{ s.e. } h(T+1) - h(T) = h'(\xi)$$



Koska h on pienenevä, niin $\lambda = \inf_{t\geq 0} h(t)$ ja

$$\lambda \leq h(T+1) \leq h(T) \leq \lambda + \varepsilon$$

Näin ollen $\quad -\varepsilon \leq h(T+1) - h(T) \leq 0$
joten siis $\quad -\varepsilon \leq h'(\xi) \leq 0.$

Tästä seuraa väite. □

Lauseen 6.2. (ii)

Todistus

Kohdan (i) perusteella origo on stabiili. Näin ollen jokaista kokonaislukua $n = 1, 2, \ldots$ kohden $\exists\, \delta_n > 0$ s.e. $\delta_n \leq 1$ ja

$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0,0)] \leq 2^{-n} \text{ kaikille } t \geq 0 \qquad (2)$$

aina kun $d[(x^*, y^*), (0,0)] \leq \delta_n$.

Annetaan $\varepsilon > 0$ ja valitaan (x^*, y^*) s.e

$$d[(x^*, y^*), (0,0)] \leq \delta_1 .$$

Riittää näyttää, että $\exists\, T > 0$ s.e.

$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0,0)] \leq \varepsilon \quad \text{kun } t \geq T \qquad (3)$$

Kiinnitetään n s.e. $2^{-n} \leq \varepsilon$ ja merkitään

$$M = \max \{ V'(x,y) \,;\, \delta_n \leq d[(x,y), (0,0)] \leq 1 \} \qquad (4)$$

Silloin $M < 0$, koska $V'(x,y)$ on negatiivisesti definiitti.

Funktio $h(t) = V(x(t, x^*), y(t, y^*))$ toteuttaa apulauseen ehdot, sillä

$$h'(t) = V'(x(t, x^*), y(t, y^*)) \leq 0 \quad \text{kaikilla } t \geq 0.$$

Näin ellei $\limsup_{t \to \infty} h'(t) = 0$, joten $\exists\, T > 0$ s.e. $h'(T) > M$

Silloin $V'(x(T, x^*), y(T, y^*)) > M$, mikä on (4):n perusteella mahdollista vain jos joko

$d[x(T, x^*), y(T, y^*), (0,0)] \leq \delta_n$

tai $d[(x(T, x^*), y(T, y^*), (0,0)] > 1$

Jälkimmäinen vaihtoehto ei kuitenkaan (2):n perustella tule kysymykseen koska

$$d[(x^*, y^*), (0,0)] \leq \delta,$$

siis $d[(x(T, x^*), y(T, y^*), (0,0)] \leq \delta_n$.

$\Rightarrow \quad d[x(t, x^*), y(t, y^*), (0,0)] \leq \varepsilon$ kun $t \geq T$ $\square$

Dynaamiset systeemit
3.11.2000

1. Etsi kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua systeemille

$$\begin{aligned} x' &= 7x + 6y \\ y' &= 2x + 6y. \end{aligned}$$

2. Selvitä systeemin

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 3y \\ y' &= x - 3y \end{aligned}$$

kriittisen pisteen luonne ja hahmottele systeemin radat.

3. Etsi systeemin

$$\begin{aligned} x' &= 1 - xy \\ y' &= x - y^3 \end{aligned}$$

kriittiset pisteet ja määritä niiden luonne ja stabiilisuusominaisuudet tutkimalla kunkin kriittisen pisteen kohdalla vastaavaa lineaarista systeemiä.

4. Määrittele autonomisen systeemin

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

Ljapunovin funktio $V(x, y)$ ja todista, että jokaiselle systeemin ratkaisuparille $\big(x(t), y(t)\big)$ funktio $t \mapsto V\big(x(t), y(t)\big)$ on pienenevä.

1. VAKIOKERTOIMINEN SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = 7x + 6y \\ y' = 2x + 6y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN (*) KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - Tr(A) + \det(A)$$

$$= \lambda^2 - 13\lambda + 30 = 0 \quad \rightsquigarrow \lambda = \frac{13}{2} \pm \frac{\sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 30}}{2} = \frac{13}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ REAALISTEN ERILLISTEN (POSITIIVISTEN) KAKSOISJUURTEN TAPAUS

$\rightsquigarrow$ KAKSI LIN. RIIPPUMATONTA RATKAISUPARIA

$$\{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \ \& \ \{x_2, y_2\} = \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\},$$

MISSÄ LUVUT $\{\alpha_i, \beta_i\}$ OVAT <u>JOITAKIN</u> YHTÄLÖIDEN

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

EI-TRIVIAALEJA RATKAISUJA

1) $i = 1$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 7\alpha_1 + 6\beta_1 = 10\alpha_1 \\ 2\alpha_1 + 6\beta_1 = 10\beta_1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow 2\alpha_1 = 4\beta_1 \iff \alpha_1 = 2\beta_1$$

$$\rightsquigarrow 6\beta_1 = 3\alpha_1 \rightsquigarrow 10\alpha_1 = 10\alpha_1 \rightsquigarrow \alpha_1 = 2 \rightsquigarrow \beta_1 = 1$$

2) $i = 2$

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} 7\alpha_2 + 6\beta_2 = 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 + 6\beta_2 = 3\beta_2 \end{cases} \iff 3\beta_2 = -2\alpha_2 \iff 6\beta_2 = -4\alpha_2$$

$$\rightsquigarrow 3\alpha_2 = 3\alpha_2 \rightsquigarrow \alpha_2 = 3$$

$$\rightsquigarrow 3\beta_2 = -6 \iff \beta_2 = -2$$

SAADAAN LIN. RIIPPUMATTOMAT RATKAISUPARIT:

$$\{x_1, y_1\} = \{2e^{10t}, e^{10t}\} \quad \& \quad \{x_2, y_2\} = \{3e^{3t}, -2e^{3t}\}$$

LIN. RIIPPUMATTOMUUS

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2e^{10t} & e^{10t} \\ 3e^{3t} & -2e^{3t} \end{vmatrix} = -4e^{13t} - 3e^{13t} = -7e^{13t} \neq 0$$

o.k

(2.) $\begin{cases} x' = -2x + 3y \\ y' = x - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\bar{x}}$

<u>KRIITTISET PISTEET:</u>

$A\bar{x} = 0$:n $\Rightarrow$ $\det(A) = 3 \neq 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$

VAKIOKERTOIMISEN SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - Tr(A) + \det(A)$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} < 0 \\ \lambda_2 = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} < 0 \end{cases}$$

KYSEESSÄ ON ERILLISTEN NEGATIIVISTEN REAALISTEN JUURIEN TAPAUS. $\Longrightarrow$ ORIGO ON ASYMPTOOTTISESTI STABIILI PISTEYS. (2.4.1)

YHTÄLÖLLÄ ON KAKSI LIN. RIIPPUMATONTA RATKAISUA

$$\{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \ \& \ \{x_2, y_2\} = \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$$

, MISSÄ $\{\alpha_i, \beta_i\}$:t OVAT YHTÄLÖPARIEN: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$, $i = 1$

<u>JOITAKIN</u> EI TRIVIAALEJA RATKAISUJA. YHTÄLÖN YLEINEN RATKAISU ON:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \beta_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

TARKASTELLAAN SITTEN OSAMÄÄRÄÄ y/x KUN $t \to \infty$ & $t \to -\infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}} = \frac{\cancel{c_1}\beta_1}{\cancel{c_1}\alpha_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

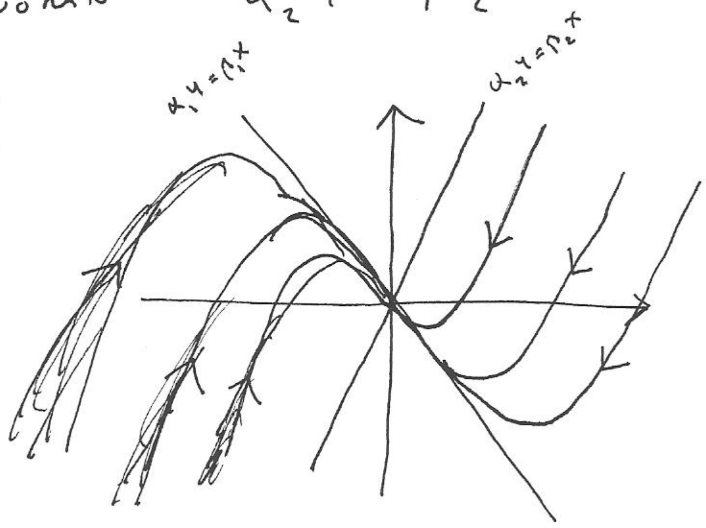
(KOSKA $\lambda_2 < \lambda_1$ NIIN $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ & $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$)

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to -\infty} \frac{c_1\beta_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2\beta_2}{c_1\alpha_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2\alpha_2} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

TS. ORIGOSSA RADAN SUUNTA LÄHESTYY SUORAA

$\alpha_1 y_1 = \beta_1 x$ & MENTÄESSÄ POIS ORIGOSTA SUUNTA LÄHESTYY SUORAN $\alpha_2 y = \beta_2 x$ SUUNTAA.

RADAT

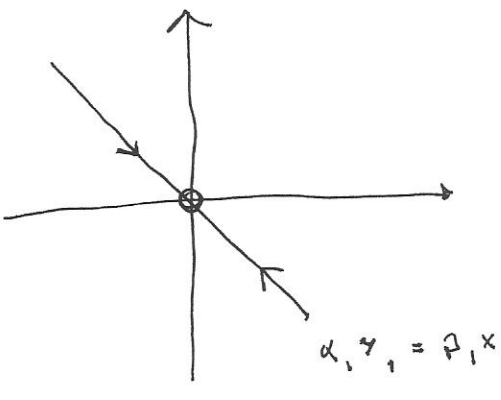


ERIKOISTAPAUKSISSA, MISSÄ $c_i = 0$ SAADAAN:

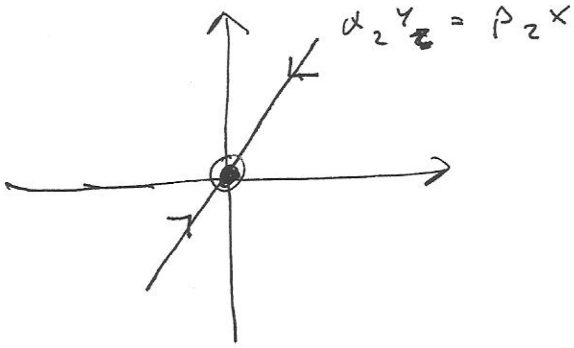
1) JOS $c_1 = 0$ RATA ON SUORA VIIVA: $\beta_2 X = \alpha_2 Y$

2) JOS $c_2 = 0$ RATA ON SUORA VIIVA: $\beta_1 x = \alpha_1 y$

$c_2 = 0$



$c_1 = 0$



3. EPÄLIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = 1 - xy = f(x,y) \\ y' = x - y^3 = g(x,y) \end{cases} \qquad (1)$$

KRIITTISET PISTEET:

$$\begin{cases} f(x,y) = 1 - xy = 0 \iff 1 = xy \\ g(x,y) = x - y^3 = 0 \iff x = y^3 \end{cases} \longrightarrow y^4 = 1 \longrightarrow y = \pm 1$$

↳ KRIITTISET PISTEET: $(x,y) = (1,1) = P_1$ & $(x,y) = (-1,-1) = P_2$

PISTE P_1

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO:

$$\tilde{x} = x - 1 \longrightarrow \tilde{x} + 1 = x$$
$$\tilde{y} = y - 1 \longrightarrow \tilde{y} + 1 = y$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \tilde{x}' = x' = 1 - xy = 1 - (\tilde{x}+1)(\tilde{y}+1) = 1 - \tilde{x}\tilde{y} - \tilde{x} - \tilde{y} - 1 \\ \tilde{y}' = y' = x - y^3 = \tilde{x} + 1 - (\tilde{y}+1)^3 = \tilde{x} - \tilde{y}^3 - 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{y} \end{cases} \qquad (2)$$

SYSTEEMIÄ (2) VASTAAVA LIN. SYSTEEMI ON

$$\begin{cases} \tilde{x}' = -\tilde{x} - \tilde{y} \\ \tilde{y}' = \tilde{x} - 3\tilde{y} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

↳ LIN. SYSTEEMIÄ VASTAAVA KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$\iff (\lambda + 2)^2 = 0 \longrightarrow \lambda = -2$$

KYSEESSÄ ON NEGATIIVISEN KAKSOISJUUREN TAPAUS $\Rightarrow$ PISTE $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$ ON LIN. SYSTEEMISSÄ STABIILI RISTEYS (EI TÄHDEN MUOTOINEN SILLÄ $a_{11} \neq a_{22}$). NÄIN OLLEN $(0,0)$ ON SYSTEEMISSÄ (2) MYÖS STABIILI RISTEYS. $\Rightarrow$ $(1,1)$ ON SYSTEEMISSÄ (1) STABIILI RISTEYS.

PISTE P_2

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO

$$\begin{cases} \tilde{x} = x+1 \rightsquigarrow x = \tilde{x} - 1 \\ \tilde{y} = y+1 \rightsquigarrow y = \tilde{y} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{x}' &= x' = 1 - xy = 1 - (\tilde{x}-1)(\tilde{y}-1) = -\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x} + \tilde{y} \\ \tilde{y}' &= y' = x - y^3 = \tilde{x} - 1 - (\tilde{y}-1)^3 = \tilde{x} - \tilde{y}^3 + 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{y} \end{aligned} \qquad (3)$$

SYSTEEMIÄ (3) VASTAAVA LIN. SYSTEEMI ON

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= \tilde{x} + \tilde{y} \\ \tilde{y}' &= \tilde{x} - 3\tilde{y} \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN POLYNOMI ON

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-2}{2} \pm \frac{\sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 + \sqrt{5} > 0 \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{5} < 0 \end{cases}$$

KYSEESSÄ ON VASTAKKAISMERKKISTEN REAALISTEN JUURTEN TAPAUS $\Longrightarrow$ $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$ ON LIN. SYSTEEMISSÄ EPÄSTABIILI SATULAPISTE NÄIN OLLEN SE ON MYÖS SYSTEEMISSÄ (3) EPÄSTABIILI SATULAPISTE $\Longrightarrow$ PISTE $(-1,-1)$ ON SYSTEEMISSÄ (1) EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

(4.)

AUTONOMINEN SYSTEEMI:

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

JOS SYSTEEMILLÄ (*) ON KRIITTINEN PISTE ORIGOSSA TS. $f(0,0) = g(0,0) = 0$, NIIN SYSTEEMIN (*) LJAPONOVIN FUNKTIO ~~...~~ $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ON JATKUVASTI DERIVOITUVA POSIT. DEFINIITTI FONKTIO $(V(x,y) > 0 \;\forall (x,y) \neq (0,0))$ JOLLE ON VOIMASSA

$$V' = V_x x' + V_y y' = V_x f(x,y) + V_y g(x,y) \leq 0$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

(TS. FUNKTION V DERIVAATTA $\frac{d}{dt} V$ SYSTEEMIN (*) RATOJA PITKIN ON NEGATIIVISESTI SEMIDEFINIITTI)

FUNKTIO $V(t)$ ON ~~.......~~ VÄHENEVÄ, JOS EHDOSTA $t_1 < t_2$ SEURAA $V(t_1) \geq V(t_2)$

V.A.L

$$\Rightarrow V(t_2) - V(t_1) = V'(\xi)\overbrace{(t_2 - t_1)}^{>0}, \quad \xi \in]t_1, t_2[$$

~~.........~~ $V'(t) = V_x(x(t), y(t)) f(x(t), y(t))$

$$+ V_y(x(t), y(t))\, g(x(t), y(t)) \leq 0 \;\forall_{(x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow V'(t) \leq 0 \quad \forall (x(t), y(t)), \; t \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$V(t_2) - V(t_1) \leq 0 \quad \forall \; t \in \mathbb{R}$$

Dynaamiset systeemit
1.12.2000

1. Hahmottele systeemin

$$x' = 2x$$
$$y' = y$$

radat.

2. Etsi systeemin

$$x' = \sin(x + y)$$
$$y' = y$$

kriittiset pisteet ja määritä (mikäli mahdollista) niiden luonne ja stabiilisuusominaisuudet tutkimalla kunkin kriittisen pisteen kohdalla vastaavaa lineaarista systeemiä.

3. Populaatiossa on D kpl kaksi kromosomia sisältäviä soluja ja U kpl neljä kromosomia sisältäviä soluja. Populaation lisääntymistä mallinnetaan systeemillä

$$D' = (\lambda - \mu)D$$
$$U' = \mu D + \nu U$$

missä λ, μ ja ν ovat positiivisia vakioita. Osoita, että tapauksessa $\lambda > \mu + \nu$ kaksi kromosomia sisältävien solujen suhteellinen osuus koko populaatiosta lähestyy alkupisteestä (D_0, U_0) riippumatonta raja-arvoa, kun $t \to \infty$. Määritä tämä raja-arvo.

4. Etsi systeemille

$$x' = y$$
$$y' = -x - y^3$$

jokin Ljapunovin funktio.

1.

(1.12.2000)

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN (*) KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ (LUENNOILLA ESITETYSTÄ DETERMINANTTIMENETELMÄSTÄ)

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

TAPAUS 1 (KAKSI ERISUURTA REAALISTA JUURTA)

(*):LLÄ ON LIN. RIIPPUMATTOMAT RATKAISUT

$$\begin{cases} \{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \\ \{x_2, y_2\} = \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\} \end{cases}$$

, MISSÄ $\{\alpha_1, \beta_1\}$ & $\{\alpha_2, \beta_2\}$ OVAT YHTÄLÖPARIEN

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

JOITAKIN EI-TRIVIAALEJA RATKAISUJA.

1) $i = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha_1 = 2\alpha_1 \\ \beta_1 = 2\beta_1 \rightsquigarrow \beta_1 = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ERÄS EI.TRIV. RATKAISU $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{1, 0\}$

2) $i = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2\alpha_2 = \alpha_2 \rightsquigarrow \alpha_2 = 0 \\ \beta_2 = \beta_2 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ERÄS EI.TRIV. RATKAISU $\{\alpha_2, \beta_2\} = \{0, 1\}$

KOSKA SYSTEEMI ON LINEAARINEN YLEINEN RATKAISU ON

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{t} \end{pmatrix}$$

TARKASTELLAAN OSAMÄÄRÄÄ $\frac{y}{x}$, KUN t LÄHESTYY POSITIIVISTA JA NEGATIIVISTA ÄÄRETÖNTÄ.

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{c_2 e^{t}}{c_1 e^{2t}} = \lim\limits_{t\to\infty} K e^{-t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{t\to-\infty} K e^{-t} = \pm\infty \end{cases}$$

(RIIPPUEN K:N MERKISTÄ)

2> LÄHESTYTTÄESSÄ $+\infty$:NTÄ RATOJEN ETÄISYYS ORIGOSTA KASVAA ÄÄRETTÖMYYKSIIN & RADAN SUUNTA LÄHESTYY SUORAN $y=0$ SUUNTAA. LÄHESTYTTÄESSÄ $-\infty$:NTÄ RADAT LÄHESTYVÄT ORIGOA & RADAN SUUNTA LÄHESTYY SUORAN $x=0$ SUUNTAA.

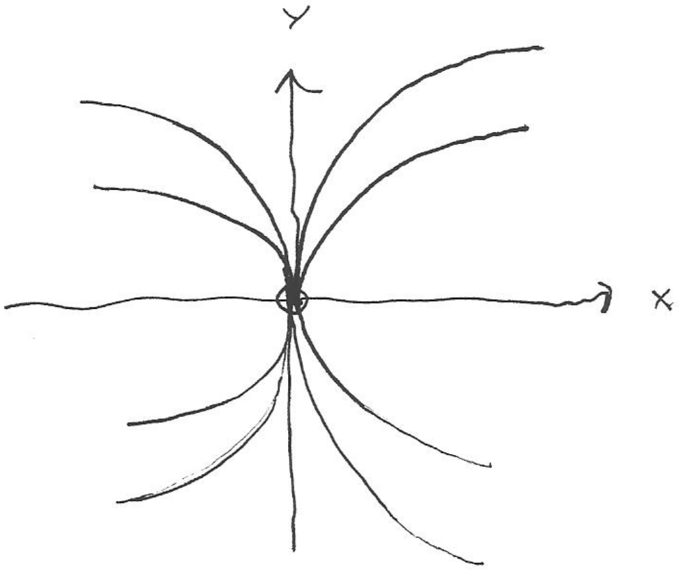
LÄHEMPI TARKASTELU OSOITTAA:

$$|x| = |c_1| e^{2t} \iff \ln(|x|) = \ln(e^{2t-K})$$

$$\iff \ln(|x|) = 2t + K \iff t = \frac{\ln(|x|)}{2} + A$$

$$2> \ y = c_2 e^{\frac{\ln(|x|)}{2} + A} = B[e^{\ln(|x|)}]^{\frac{1}{2}} = B|x|^{\frac{1}{2}}$$

RADAT



(2.) EPÄLIN. SYSTEEMI (1.12.2000)

$$\begin{cases} x' = \sin(x+y) = f(x,y) \\ y' = y = g(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

KRIITTISET PISTEET:

$$\begin{cases} f(x,y) = \sin(x+y) = 0 \iff \sin(x) = 0 \iff x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ g(x,y) = y = 0 \nearrow \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{Z}$$

FUNKTION $\sin(x)$ JAKSOLLISUUDEN NOJALLA $(T = 2\pi)$ PISTEILLÄ $(2n\pi, 0)$ ON SAMA KUONNE KUIN PISTEELLÄ $(0,0)$ JA PISTEILLÄ $((2n+1)\pi, 0)$ SAMA KUIN PISTEELLÄ $(\pi, 0)$

PISTE $(0,0)$

f & g OVAT KAKSI KERTAA JATKUVASTI DERIVOITUVIA, JOTEN NIILLE SAADAAN TAYLORIN KEHITELMÄT

$$\begin{cases} x' = f(0,0) + x D_1 f(0,0) + y D_2 f(0,0) + f_1(x,y) \\ y' = g(0,0) + x D_1 g(0,0) + y D_2 g(0,0) + g_1(x,y) \end{cases}$$

MISSÄ f_1:ILLE & g_1:ILLE ON VOIMASSA; $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g_1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

EPÄLIN. SYSTEEMIÄ $(*)$ APROKSIMOIVA LIN. SYSTEEMI ON ORIGON YMPÄRISTÖSSÄ:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(0,0) & D_2 f(0,0) \\ D_1 g(0,0) & D_2 g(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & \cos(0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\bar{x} \qquad (\det A = 1 \neq 0)$$

LIN. SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 =$

$\hookrightarrow \lambda = 1 \implies$ YHTÄLÖLLÄ ON REAALINEN POSITIIVINEN KAKSOISJUURI

(LISÄKSI ORIGO EI OLE LIN. SYSTEEMIN TÄHDEN MUOTOINEN RISTEYS, SILLÄ TÄLLÖIN PITÄISI OLLA $a_{11} = a_{22} = \lambda$ & $a_{12} = a_{21} = 0$, MUTTA NYT $a_{12} = 1$). LIN. SYSTEEMISSÄ ORIGO ON EPÄSTABIILI RISTEYS JA LAUSEEN 5.1 PERUSTEELLA SE ON MYÖS EPÄLIN. SYSTEEMIN EPÄSTABIILI RISTEYS.

$\hookrightarrow$ ~~KAIK~~ KRIITTISET PISTEET $(2n\pi, 0)$ OVAT EPÄLIN. SYSTEEMIN $(*)$ EPÄSTABIILEJA RISTEYKSIÄ.

PISTE $(\pi, 0)$

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO

$$\begin{cases} x = z + \pi \quad \rightarrow \quad z = x - \pi \\ y = y \end{cases}$$

(TS. SIJOITUSTA $(x, y) = (\pi, 0)$ VASTAA SIJOITUS $(z, y) = (0, 0)$)

$$\begin{cases} \cancel{z}' = x' = \sin(x+y) = \sin((z+\pi)+y) = f^*(z,y) \\ y' = \qquad y = g^*(z,y) \end{cases} \quad (**)$$

EPÄLIN. SYSTEEMIÄ $(**)$ APROKSIMOIVA LIN. SYSTEEMI PISTEEN $(z, y) = (0,0)$ YMPÄRISTÖSSÄ ON

$$\begin{pmatrix} z' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f^*(0,0) & D_2 f^*(0,0) \\ D_1 g^*(0,0) & D_2 g^*(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \cos(\pi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$$

LIN. SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON: $(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow$ VASTAKKAISMERKKISET REAALISET JUURET $\Rightarrow$

ORIGO ON LAUSEEN 5.1 PERUSTEELLA SYSTEEMIN $(**)$ EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

$\Rightarrow$ PISTEET $((2n+1)\pi, 0)$ OVAT SYSTEEMIN $(*)$ EPÄSTABIILEJA SATULAPISTEITÄ.

③ $\begin{pmatrix} D' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix}$ (*) 1.12.2000

OSOITETTAVA:

RAJA-ARVO $\lim_{t \to \infty} \dfrac{D(t)}{D(t)+U(t)}$ EI RIIPU

ALKUARVOISTA $D(0) = D_0$ & $U(0) = U_0$, KUN $\lambda > \mu + \nu$

LIN. SYSTEEMIN (*) KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ:

$((\lambda-\mu) - x)(\nu - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda - \mu \\ x_2 = \nu \end{cases}$

KOSKA $\lambda > \mu + \nu \Leftrightarrow \lambda - \mu > \nu$ KYSEESSÄ ON REAALISTEN ERILLISTEN JUURTEN TAPAUS. LIN. RIIPPUMATTOMAT RATKAISUT

$\{D_1, U_1\} = \{\alpha_1 e^{x_1 t}, \beta_1 e^{x_1 t}\}$, $\{D_2, U_2\} = \{\alpha_2 e^{x_2 t}, \beta_2 e^{x_2 t}\}$

1) $\begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (\lambda-\mu) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow (\lambda-\mu)\alpha_1 = (\lambda-\mu)\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = 1$

$\Rightarrow \mu + \nu\beta_1 = (\lambda-\mu)\beta_1 \Leftrightarrow \beta_1 = \dfrac{\mu}{(\lambda-\mu)-\nu}$

2) $\begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda-\mu)\alpha_2 = \nu\alpha_2 \\ \mu\alpha_2 + \cancel{\nu\beta_2} = \cancel{\nu\beta_2} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \beta_2 = 1$

$\begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} D_1 \\ U_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} D_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{(\lambda-\mu)t} \\ c_1 \beta_1 e^{(\lambda-\mu)t} + c_2 e^{\nu t} \end{pmatrix}$

$D(0) = D_0 \Rightarrow c_1 = D_0$

$U(0) = U_0 \quad D_0\beta_1 + c_2 = U_0 \rightarrow c_2 = U_0 - D_0\beta_1$

ALKUEHDOT TOTEUTTAVA RATKAISU

$\Rightarrow \begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0 e^{(\lambda-\mu)t} \\ D_0 \beta_1 e^{(\lambda-\mu)t} + (U_0 - D_0\beta_1) e^{\nu t} \end{pmatrix}$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{D(t)}{D(t) + U(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{D_0 e^{(\lambda-\mu)t}}{D_0 e^{(\lambda-\mu)t} + D_0 \beta_1 e^{(\lambda-\mu)t} + (U_0 - D_0\beta_1) e^{\nu t}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\dfrac{D_0 e^{(\lambda-\mu)t} + D_0 \beta_1 e^{(\lambda-\mu)t} + (U_0 - D_0\beta_1) e^{\nu t}}{D_0 e^{(\lambda-\mu)t}}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{1 + \beta_1 + \left(\dfrac{U_0 - D_0\beta_1}{D_0}\right) \underbrace{e^{((\nu+\mu)-\nu)t}}_{\longrightarrow 0}}$$

$$= \frac{1}{1 + \beta_1} \qquad \text{o.k.}$$

4. 1.12.2020

SYSTEEMI:

$$\begin{cases} x' = y & = f(x,y) \\ y' = -x - y^3 & = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

(AINOA KRIITTINEN PISTE ORIGOSSA $f(0,0) = g(0,0) = 0$)

LÖYDETTÄVÄ JATKUVASTI DERIVOITUVA POSITIIVISESTI DEFINIITTI FUNKTIO $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ JOLLE $V(0,0) = 0$ JA JOLLE

$$V'(x,y) = V_x x' + V_y y' = V_x f(x,y) + V_y g(x,y)$$

ON NEGATIIVISESTI SEMIDEFINIITTI.

(TS. $V'(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$)

YRITE: $V(x,y) = x^2 + axy + by^2$

$$\Rightarrow V' = (2x + ay)y + (2by + ay)(-x - y^3)$$

$$= 2xy + ay^2 - 2bxy - 2by^4 - axy - ay^4$$

VALIT $b = 1$ & $a = 0$

$$= -2y^4 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

TS. $V(x,y) = x^2 + y^2$ ON SYSTEEMIN $(*)$ ERÄS LJAPUNOVIN FUNKTIO

(LJAPUNOVIN LAUSEEN PERUSTEELLA ORIGO ON TÄLLÖIN STABIILI KRIITTINEN PISTE)

Dynaamiset systeemit
22.9.2000

1. Määrittele homogeenisen lineaarisen systeemin

$$x' = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y$$
$$y' = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y$$

ratkaisujen $\{x_1(t), y_1(t)\}$ ja $\{x_2(t), y_2(t)\}$ Wronskin determinantti $W(t)$. Todista, että ratkaisut ovat lineaarisesti riippumattomat, jos $W(t) \neq 0$.

2. Ratkaise systeemi

$$x' = 0$$
$$y' = -x + y$$

ja siihen liittyvä karakteristinen yhtälö. Etsi kriittiset pisteet ja osoita, että radat ovat suoria viivoja. Osoita, että origo on epästabiili kriittinen piste.

3. Osoita, että origo on systeemin

$$x' = (\sin x)(\cos x) + y^2$$
$$y' = y^2 - x - x^3 + 3y$$

kriittinen piste ja määritä ratkaisujen asymptoottinen käyttäytyminen origon ympäristössä.

4. Todista Ljapunovin lauseen avulla, että origo on systeemin

$$x' = xy^2 - \frac{x^3}{2}$$
$$y' = -\frac{y^3}{2} + \frac{yx^2}{5}$$

asymptoottisesti stabiili kriittinen piste.

1. HOMOG. LINEAARINEN SYSTEEMI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN $(*)$ KAHDEN RATKAISON $\{x_1, y_1\}$ & $\{x_2, y_2\}$ WRONSKIN DETERMINANTTI ON

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2$$

VÄITE:

JOS $W(t) \neq 0$ RATKAISUT OVAT LIN. RIIPPUMATTOMAT

TOD.

AT: OLET RATKAISUT OVAT LIN. RIIPPUVIA

$\Longrightarrow \exists\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ s.e

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow W(t) = x_1 y_2 - y_1 x_2 = c x_2 y_2 - c y_2 x_2$$

$= 0$ RR $\Longrightarrow$

JOS $W(t) \neq 0$ RATKAISUT $\{x_1, y_1\}$ & $\{x_2, y_2\}$ OVAT LIN. RIIPPUMATTOMIA $\square$

$$y = c_2 e^t + c_1$$

$$y' = c_2 e^t = \underbrace{c_2 e^t + c_1}_{= y} - \underbrace{c_1}_{= x}$$

$$= y - x$$

2.

LIN. SYSTEEMI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN (*) KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = 0$$

KYSEESSÄ ON REAALISTEN ERILLISTEN JUURTEN TAPAUS.

$$\{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \ \& \ \{x_2, y_2\} = \{\alpha_2 e^{\lambda_1 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \leadsto \alpha_1 = 0, \ \leadsto \beta_1 = 1$$

$$\searrow \{x_1, y_1\} = \{0, e^t\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \leadsto -\alpha_2 + \beta_2 = 0$$

$$\leadsto \alpha_2 = \beta_2 = 1$$

$$\searrow \{x_2, y_2\} = \{1, 1\}$$

$\Rightarrow$ YLEINEN RATKAISU ON $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 e^t + c_2 \end{pmatrix}$

KRIITTISET PISTEET: $-x + y = 0 \Rightarrow y = x$

$\leadsto$ RADAT OVAT SUORIA, JOS SYSTEEMILLÄ ON KRIITTISIÄ PISTEITÄ.

$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_2 = x_0$$

$$y(0) = y_0 \Rightarrow c_1 + x_0 = y_0 \Rightarrow c_1 = y_0 - x_0$$

$$\searrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ (y_0 - x_0)e^t + x_0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$

$$\lim_{t \to \infty} d((x(t,x_0), y(t,y_0)), (0,0)) \geq \lim_{t \to \infty}$$

$$|y(t,y_0)| = \lim_{t \to \infty} \sqrt{(c_1 e^t + c_2)^2} = \infty$$

$\Rightarrow \exists$ t_0 s.e kun $t \geq t_0 > 0$

$$d((x(t,x_0), y(t,y_0)), (0,0)) \geq M$$

$\Rightarrow$ (0,0) ON EPÄSTABIILI KRIITTINEN PISTE.

3. EPÄLIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = \sin(x)\cos(x) + y^2 = f(x,y) = \frac{1}{2}\sin(2x) + y^2 \\ y' = y^2 - x - x^3 + 3y \quad = g(x,y) = y^2 - x - x^3 + 3y \end{cases} \quad (*)$$

$$f(0,0) = \frac{1}{2}\sin(0) + 0^2 = 0$$

$$g(0,0) = 0^2 - 0 - 0^3 + 3 \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ ORIGO ON SYSTEEMIN (ERÄS) KRIITTINEN PISTE

FUNKTIOT f & g OVAT 2 KERTAA JATKUVASTI DERIVOITUVIA $\Rightarrow$ NIILLÄ ON OLEMASSA TAYLORIN KEHITELMÄT

$$\begin{cases} f(x,y) = \overbrace{f(0,0)}^{=0} + x D_1 f(0,0) + y D_2 f(0,0) + f_1(0,0) \\ g(x,y) = \underbrace{g(0,0)}_{=0} + x D_1 g(0,0) + y D_2 g(0,0) + g_1(0,0) \end{cases}$$

, MISSÄ f_1:LLE & g_1:LLE ON VOIMASSA

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ARVIOIDAAN SYSTEEMIÄ (*) ORIGON YMPÄRISTÖSSÄ KEHITELMÄSTÄ SAATAVALLA LIN. SYSTEEMILLÄ.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f(0,0) & D_2 f(0,0) \\ D_1 g(0,0) & D_2 g(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & 2y \\ -1-3x^2 & 2y+3 \end{pmatrix}_{(0,0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LIN. SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \pm 1 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \lor \lambda_2 = 1$$

KYSEESSÄ ON POSITIIVISTEN REAALIJUURTEN TAPAUS $\Rightarrow$ LUENTOJEN LAUSEEN 4.1 PERUSTEELLA ORIGO ON EPÄSTABIILI RISTEYS. $\Rightarrow$ LAUSEEN 5.1 PERUSTEELLA ORIGO ON EPÄSTABIILI KRIITTINEN PISTE MYÖS (*):SSÄ

$\Longrightarrow$ KUN $t \to \infty$ RATKAISUN $(x(t), y(t))$

ETÄISYYS ORIGOSTA KASVAA RAJATTA.

(4.) EPÄLIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = xy^2 - \frac{x^3}{2} = f(x,y) \\ y' = -\frac{y^3}{2} + \frac{yx^2}{5} = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

LÖYDETTÄVÄ POSITIIVISESTI DEFINIITTI JATKUVASTI DERIVOITUVA FUNKTIO $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ S.E $\frac{d}{dt} V(x,y)$ ON NEGATIIVISESTI DEFINIITTI. & $V(0,0) = 0$

YRITE: $V = x^2 + axy + by^2$

$$V'(x,y) = V_x x' + V_y y' = V_x f(x,y) + V_y g(x,y)$$

$$= (2x + ay)(xy^2 - \frac{x^3}{2}) + (2by + ax)(-\frac{y^3}{2} + \frac{yx^2}{5})$$

$$= -x^4 - \frac{3}{10} a x^3 y + (2 + \frac{2}{5} b) x^2 y^2 + \frac{1}{2} a x y^3 - b y^4$$

VALIT $a = 0$ $\Rightarrow$

$$V' = -x^4 + (2 + \frac{2}{5} b) x^2 y^2 - b y^4 = -(x^4 - (2 + \frac{2}{5} b) x^2 y^2 + b y^4)$$

$$= -((x^2 + cy^2)^2) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$$

VAKIO c SAADAAN YHTÄLÖSTÄ:

$$x^4 - (2 + \frac{2}{5} b) + by^4 = (x^2 + cy^2)^2 = x^4 + 2cx^2y^2 + c^2 y^4$$

$$\Rightarrow b = c^2 > 0 \quad \rightsquigarrow$$

$$-\left(2+\frac{2}{5}c^2\right) = 2c$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{5}c^2 + 2c + 2 = 0$$

$$c = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

VALIT. $G = \left(-\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 > 0$

$$\Longrightarrow V(x,y) = x^2 + Gy^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$$

TS. ON LÖYTYNYT JATKUVASTI DERIVOITUVA FUNKTIO

$$V(x,y) = x^2 + Gy^2 > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$$

$$\& \quad V'(x,y) = -\left(\left(x^2 + \sqrt{G}\,y^2\right)\right) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$$

$\Rightarrow$ LJAPUNOVIN LAUSEEN NOJALLA $(0,0)$ ON SYSTEEMIN $(*)$ ASYMPTOOTTISESTI STABIILI KRIITTINEN PISTE.

Dynaamiset systeemit
25.8.2000

1. Etsi kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua systeemille

$$\begin{aligned} x' &= -15x + 3y \\ y' &= 9x - 9y. \end{aligned}$$

2. Selvitä systeemin

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x + y \end{aligned}$$

kriittisen pisteen luonne ja hahmottele systeemin radat.

3. Etsi systeemin

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 4x - x^3 \end{cases}$$

kriittiset pisteet ja määritä (mikäli mahdollista) niiden luonne ja stabiilisuusominaisuudet tutkimalla kunkin kriittisen pisteen kohdalla vastaavaa lineaarista systeemiä.

4. Etsi jokin Ljapunovin funktio systeemille

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - \varepsilon y \end{aligned}$$

kun ε on positiivinen vakio.

1.

LINEAARINEN VAKIOKERTOIMINEN YHTÄLÖ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN (*) KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ:

$$\det \begin{pmatrix} -15-\lambda & 3 \\ 9 & -9-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 24\lambda + 108 = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda = -12 \pm \frac{\sqrt{24^2 - 108 \cdot 4}}{2} = -12 \pm 6$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -6 \\ \lambda_2 = -18 \end{cases}$$

KYSEESSÄ ON ERILLISTEN REAALIJUURTEN TAPAUS:

$$\begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -15\alpha_1 + 3\beta_1 = -6\alpha_1 \Leftrightarrow 9\alpha_1 = 3\beta_1 \\ 9\alpha_1 - 9\beta_1 = -6\beta_1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow -6\beta_1 = -6\beta_1 \rightarrow \beta_1 = 3 \rightarrow \alpha_1 = 1$$

$$\{\alpha_1, \beta_1\} = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 3 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = -18 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} -15\alpha_2 + 3\beta_2 = -18\alpha_2 \rightarrow -18\alpha_2 = -18\alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = +1 \\ 9\alpha_2 - 9\beta_2 = -18\beta_2 \Leftrightarrow 9\alpha_2 = -9\beta_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 = -\beta_2 \rightarrow \beta_2 = $$

$$\{\alpha_2, \beta_2\} = \{+1, -1\}$$

$\Longrightarrow$

KAKSI LIN. RIIPPUMATONTA RATKAISUA

$$\{x_1, y_1\} = \{e^{-6t}, 3e^{-6t}\}, \quad \{x_2, y_2\} = \{e^{-18t}, -e^{18t}\}$$

2. VAKIOKERTOIMINEN LIN. YHTÄLÖ:

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \qquad (*)$$

VAKIOKERTOIMISEN LIN. YHTÄLÖN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

REAALISEN POSITIIVISEN KAKSOISJUUREN TAPAUS.

$\Rightarrow$ SYSTEEMIN $(*)$ AINOA KRIITTINEN PISTE $(x,y)=(0,0)$ ON EPÄSTABIILI RISTEYS.

YKSI RATKAISU ON MUOTOA $\{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda t}, \beta_1 e^{\lambda t}\}$

MISSÄ $\{\alpha_1, \beta_1\}$ ON YHTÄLÖN

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$ ERÄITÄ EI-TRIVIAALEJA RATKAISUJA

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 = \alpha_1\\ \alpha_1 + \beta_1 = \beta_1\end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 1$$

$$\{x_1, y_1\} = \{0, e^t\}$$

TOINEN LIN. RIIPPUMATON RATKAISU ON MUOTOA

$$\{x_2, y_2\} = \{(\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda t}, (\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda t}\}$$

$$x_2' = \alpha_2 e^t = \alpha_2 e^t = x_2$$

$$y_2' = e^t + \cancel{(\beta_2 + t)e^t} = x_2 + y_2 = \alpha_2 e^t + \cancel{(\beta_2 + t)e^t}$$

$$\{\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0\}$$

$$\Rightarrow \{x_2, y_2\} = \{e^t, te^t\}$$

YLEINEN RATKAISU ON MUOTOA

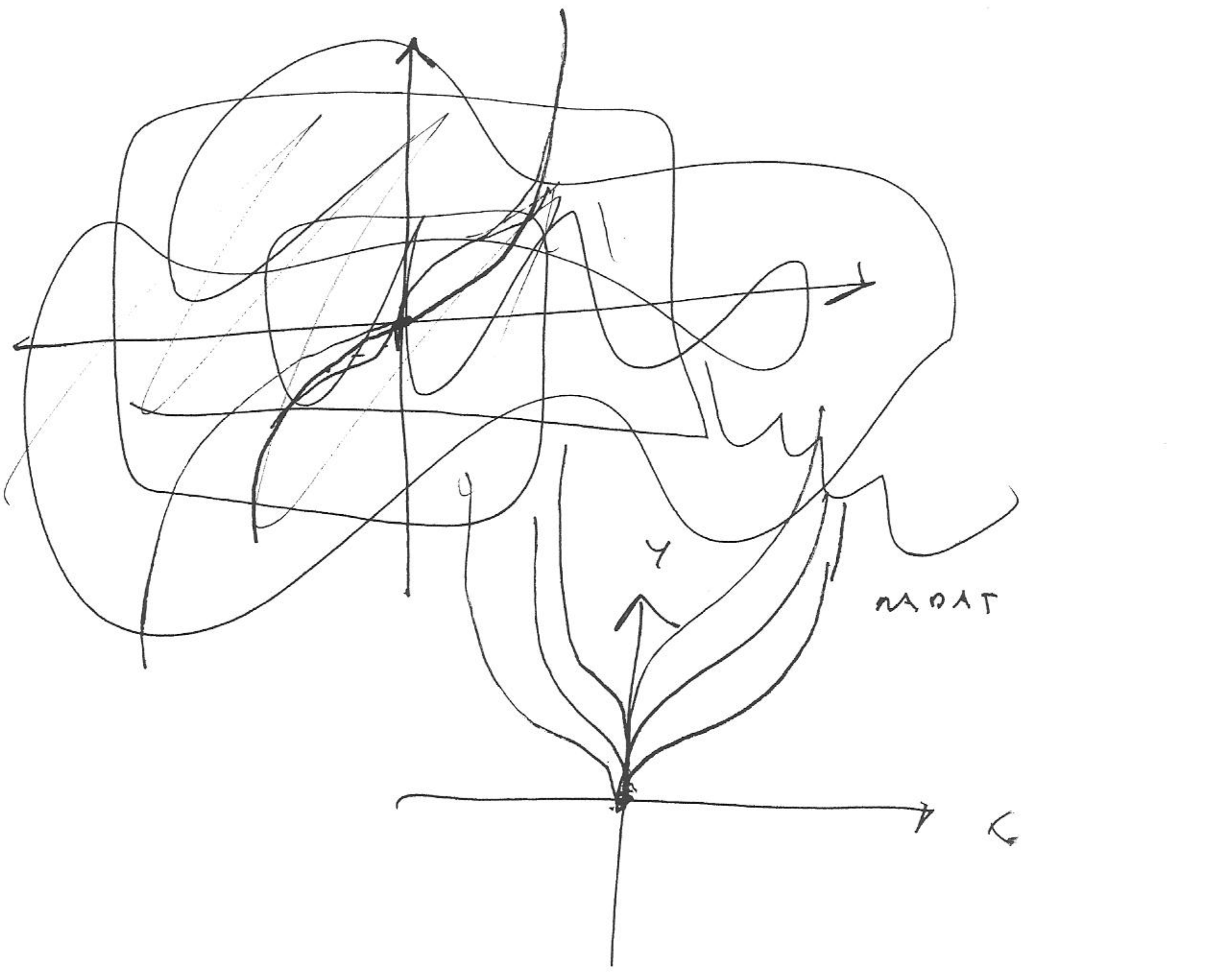
$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 e^t \\ c_1 e^t + c_2 t e^t \end{pmatrix}$$

$$\frac{y^*}{x^*} = \frac{c_1 e^t + c_2 t e^t}{c_2 e^t} = K + t \qquad \left(K = \frac{c_1}{c_2}\right)$$

TARKASTELLAAN OSAMÄÄRÄÄ y^*/x^* KUN $t \to \infty$ & $t \to -\infty$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y^*}{x^*} = \infty, \qquad \lim_{t \to -\infty} \frac{y^*}{x^*} = -\infty$$

(LISÄKSI $\lim_{t \to \infty} |x(t)| = \lim_{t \to \infty} |y(t)| = \infty$, JOTEN KYSEESSÄ ON TODELLA EPÄSTABIILI KRIITTINEN PISTE). KUN $t \to \infty$ & $t \to -\infty$ RATOJEN SUUNTA LÄHESTYY SUORAN $X = 0$ SUUNTAA.



3. EPÄLIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = y = f(x,y) \\ y' = 4x - x^3 = x(4-x^2) = g(x,y) \end{cases} \qquad (*)$$

KRIITTISET PISTEET:

$$\begin{cases} f(x,y) = y = 0 \\ g(x,y) = 4x - x^3 = x(4-x^2) = 0 \implies x=0,\ x=2,\ x=-2 \end{cases}$$

$P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,0)$, $P_3 = (-2,0)$

PISTE P_1

TARKASTELLAAN LINEARISOITUA SYSTEEMIÄ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

SYSTEEMIÄ VASTAAVA LINEARISOITU SYSTEEMI ON

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2$$

KYSEESSÄ ON VASTAKKAISMERKKISTEN REAALIJUURTEN TAPAUS. LAUSEEN 4.1 NOJALLA $(0,0)$ ON LIN. SYSTEEMIN EPÄSTABIILI SATULAPISTE $\implies$ LAUSEEN 5.1 NOJALLA $(0,0)$ ON MYÖS SYSTEEMIN $(*)$ EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

PISTE P_2

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - 2 \iff x = \tilde{x} + 2 \\ \tilde{y} = y \end{cases}$$

$$\tilde{x}' = x' = y = \tilde{y}$$
$$\tilde{y}' = y' = x(4-x^2) = (\tilde{x}+2)(4-(\tilde{x}+2)^2) = -\tilde{x}^3 - 6\tilde{x}^2 - 8\tilde{x} \qquad (**)$$

$(**)$ VASTAAVA LIN. SYSTEEMI SEN KRIITTISEN PISTEEN $(\tilde{x},\tilde{y}) = (0,0)$ YMPÄRISTÖSSÄ.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$ $\to$ SYSTEEMIÄ VASTAAVA KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 8 \implies \lambda = \pm i\sqrt{8}$$

KYSEESSÄ ON TAPAUS MISSÄ KYI:N JUURET OVAT PUHTAASTI IMAGINÄÄRISIÄ LIITTOLUKUJA (TS. $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0$)

$\Longrightarrow$ PISTE $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$

ON LIN. SYSTEEMIN (STABIILI) KESKUS.

$\Rightarrow$ LAUSEIDEN S.1 & S.2 NOJALLA $(0,0)$ VOI OLLA SYSTEEMISSÄ (**) STABIILI (KESKUS) TAI STABIILI/EPÄSTABIILI SPIRAALIPISTE.

$\Rightarrow$ $(2,0)$ ON SYSTEEMISSÄ (*) JOKO STABIILI KESKUS TAI STABIILI/EPÄSTABIILI SPIRAALIPISTE.

PISTE P_3

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO

$$\tilde{x} = x + 2 \iff x = \tilde{x} - 2$$
$$\tilde{y} = y$$

$$\begin{cases} \tilde{x}' = x' = y = \tilde{y} \\ \tilde{y}' = y' = x(4 - x^2) = (\tilde{x} - 2)(4 - (\tilde{x} - 2)^2) = -\tilde{x}^3 + 6\tilde{x} - 8\tilde{x} \end{cases} \quad (***)$$

SYSTEEMIÄ (***) VASTAAVA LIN. SYSTEEMI ON

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ PISTETTÄ P_3 VASTAA SAMA LIN. SYSTEEMI KUIN PISTETTÄ P_2 $\Rightarrow$ PISTE $(-2,0)$ ON SYSTEEMISSÄ (*) JOKO STABIILI KESKUS TAI STABIILI/EPÄSTABIILI SPIRAALIPISTE.

4.

SYSTEEMI: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - \varepsilon y \end{cases}$, $\varepsilon > 0$ (*)

(AINOA) KRIITTINEN PISTE $(x,y) = (0,0)$

LÖYDETTÄVÄ JATKUVASTI DERIVOITUVA POSITIIVISESTI DEFINIITTI FUNKTIO $V(x,y): \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ (TS. $V(x,y) > 0 \;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$) JA JONKA DERIVAATTA $\frac{d}{dt}V$ SYSTEEMIN RATOJA PITKIN ON NEGATIIVISESTI SEMIDEFINIITTI (TS. $V' \geq 0 \;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

<u>YRITE</u> $V(x,y) = x^2 + axy + by^2$

$V'(x,y) = V_x x' + V_y y' = (2x + ay)y + (2by + ax)(-x - \varepsilon$

$= 2xy + ay^2 - 2bxy - 2b\varepsilon y^2 - ax^2 - a\varepsilon xy$

VALITAAN $a = 0$ & $b = 1$

$\Longrightarrow V'(x,y) = -2b\varepsilon y^2 = -2\varepsilon y^2 \leq 0 \;\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow V(x,y) = x^2 + y^2$ ON SYSTEEMIN (*) ERÄS LJAPUNOVIN FUNKTIO.

Dynaamiset systeemit
6.11.1992

1. Etsi kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua systeemille

$$x' = 3x + 2y$$
$$y' = -5x + y.$$

2. Määrittele täsmällisesti, milloin autonomisen systeemin

$$x' = f(x, y)$$
$$y' = g(x, y)$$

kriittinen piste on a) stabiili, b) asymptoottisesti stabiili. Anna esimerkki systeemistä, jonka jokainen kriittinen piste on stabiili mutta ei asymptoottisesti stabiili.

3. Etsi systeemin

$$x' = -x + 2x^3$$
$$y' = 2y + y^3$$

kriittiset pisteet ja määritä (mikäli mahdollista) niiden luonne ja stabiilisuusominaisuudet tutkimalla kunkin kriittisen pisteen kohdalla vastaavaa lineaarista systeemiä.

4. Etsi vaimentamatonta heiluria kuvaavalle systeemille

$$\theta' = \mu$$
$$\mu' = -\omega^2 \sin\theta$$

jokin Ljapunovin funktio ja tutki sen avulla origon stabiilisuutta.

(1.)

LINEAARINEN HOMOGEENINEN VAKIOKERTOIMINEN SYSTEEMI

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

LIN. VAKIOKERTOIMISEN SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ:

$$\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 2\\ -5 & 1-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \pm \frac{\sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-36}}{2}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 = 2+3i & = a+bi\\ \lambda_2 = 2-3i\end{cases}$$

KARAKTERISTISEN YHTÄLÖN JUURET OVAT IMAGINÄÄRISIÄ LIITTOLUKUJA.
LASKETAAN OMINAISARVOA λ_1 VASTAAVA OM. VEKTORI

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = (2+3i)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$$

$$3\alpha_1 + 2\beta_1 = (2+3i)\alpha_1 \Leftrightarrow 2\beta_1 = (-1+3i)\alpha_1$$

$$-5\alpha_1 + \beta_1 = (2+3i)\beta_1 \quad \Leftrightarrow \quad -10\alpha_1 + 2\beta_1 = (2+3i)2\beta_1$$

$$-10\alpha_1 = (1+3i)2\beta_1 = (1+3i)(-1+3i)\alpha_1 = -1\cdot(1+3i)(1-3i)\alpha_1$$

$$= -1\cdot\|1+3i\|^2\alpha_1 \Leftrightarrow -10\alpha_1 = -10\alpha_1 \qquad \alpha_1 = 2$$

$$\Rightarrow \beta_1 = -1+3i$$

$$\alpha_1 = A_1 + A_2 i, \quad \beta_1 = B_1 + B_2 i, \quad \lambda_1 = a+bi$$

KAKSI LIN. RIIPPUMATONTA RATKAISUA

$$\{x_1, y_1\} = \{e^{at}(A_1\cos bt - A_2 \sin bt),\ e^{at}(B_1\cos bt - B_2\sin bt)\}$$

$$\{x_2, y_2\} = \{e^{at}(A_1\sin bt + A_2\cos bt),\ e^{at}(B_1\sin bt + B_2\cos bt)\}$$

TS.

$$\{x_1, y_1\} = \{2e^{2t}\cos(3t),\ e^{2t}(-\cos(3t) - 3\sin(3t))\}$$

$$\{x_2, y_2\} = \{2e^{2t}\sin(3t),\ e^{2t}(-\sin(3t) + 3\cos(3t))\}$$

2. TARKASTELLAAN AUTONOMISTA SYSTEEMIÄ

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$$,

JOKA TOTEUTTAA ALKUEHDOT

$$\begin{cases} x(0) = x^* \\ y(0) = y^* \end{cases}$$

SYSTEEMIN KRIITTINEN PISTE (x_0, y_0) ON

1) <u>STABIILI</u>, JOS $\forall \; \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta_\varepsilon > 0$ S.E

$$\| (x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0) \| \leq \varepsilon \quad \forall \quad t \geq 0$$

KUNHAN $\| (x^*, y^*), (x_0, y_0) \| \leq \delta_\varepsilon$

TS. JOS PISTEEN (x^*, y^*) ETÄISYYS PISTEESTÄ (x_0, y_0) ON PIENEMPI TAI YHTÄSUURI KUIN δ_ε NIIN ALKUEHDOT (*) TOTEUTTAVIEN RATKAISUJEN $(x(t), y(t))$ ETÄISYYS KRIITTISESTÄ PISTEESTÄ (x_0, y_0) PYSYY PIENEMPÄNÄ TAI YHTÄSUURENA KUN ε KAIKILLA $t \geq 0$.

2) <u>ASYMPTOOTTISESTI STABIILI</u>, JOS (x_0, y_0) ON STABIILI & JOS $\exists \; \delta > 0$ S.E

$$\lim_{t \to \infty} \| (x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0) \| = 0$$

KUNHAN $\| (x^*, y^*), (x_0, y_0) \| \leq \delta$

<u>TS.</u> JOS PISTE (x_0, y_0) ON STABIILI JA JOS LISÄKSI ON OLEMASSA POSITIIVINEN LUKU δ SITEN, ETTÄ KUN PISTEEN (x^*, y^*) ETÄISYYS KRIITTISESTÄ PISTEESTÄ (x_0, y_0) ON PIENEMPI TAI YHTÄSUURI KUIN δ NIIN ALKUEHDOT (*) TOTEUTTAVIEN RATKAISUJEN $(x(t), y(t))$ ETÄISYYS PISTEESTÄ (x_0, y_0) MENEE KOHTI NOLLAA.

KUN $t \to \infty$.

~~[illegible]~~

ESIMERKIKSI SYSTEEMIN

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(AINOA) KRIITTINEN PISTE $x = y = 0$ ON STABIILI

SILLÄ SEN KARAKTERISTISEN YHTÄLÖN JUURET

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

JUURET ($\lambda = \pm i$) OVAT PUHTAASTI IMAGINÄÄRISIÄ (L. 4.1).

3. EPÄLIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = -x + 2x^3 = f(x,y) \\ y' = 2y + y^3 = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

KRIITTISET PISTEET:

$$f(x,y) = -x + 2x^3 = 0, \quad x = 0, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g(x,y) = 2y + y^3 = 0, \quad y = 0 \quad \left(y = \pm i/\sqrt{2} \text{ EI KÄY, SILLÄ } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \right)$$

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

P_1

SYSTEEMIÄ (*) APPROKSIMOIVA LIN. SYSTEEMI PISTEEN (0,0) YMPÄRISTÖSSÄ ON

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LIN. SYSTEEMIN KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = 2 \quad \& \quad \lambda_2 = -1$$

$\Rightarrow$ ERILLISTEN VASTAKKAISMERKKISTEN JUURTEN TAPAUS

$\Rightarrow$ PISTE $(x,y) = (0,0)$ ON LIN. SYSTEEMISSÄ EPÄSTABIILI SATULAPISTE $\Rightarrow$ LAUSEEN 5.1 NOJALLA SE ON EPÄSTABIILI MYÖS SYSTEEMISSÄ (*)

PISTE P_2

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO

$$\begin{cases} \tilde{x} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{y} = y \end{cases}$$

$$\tilde{x}' = x' = x(1-2x^2) = \left(\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - 2\left(\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

$$= -2\tilde{x}^3 - 3\tilde{x}^2\sqrt{2} - 2\tilde{x} \qquad (**)$$

$$\tilde{y}' = y' = 2y + y^3 = 2\tilde{y} + \tilde{y}^3$$

SYSTEEMIÄ (**) VASTAAVA LIN. SYSTEEMI ON

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

LIN. SYSTEEMIN KY:

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2 \ \& \ \lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow$ PISTE $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$ ON SYSTEEMISSÄ (**) EPÄSTABIILI SATULAPISTE $\Rightarrow$ PISTE $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ON SYSTEEMISSÄ (*) EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

PISTE P_3

MUUTTUJAN VAIHTO

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{y} = y \end{cases}$$

$$\tilde{x}' = x' = x(1-2x^2) = \left(\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - 2\left(\tilde{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

$$= -2\tilde{x}^3 + 3\tilde{x}^2\sqrt{2} - 2\tilde{x} \qquad (***)$$

$$\tilde{y}' = y' = 2y + y^3 = 2\tilde{y} + \tilde{y}^3$$

SYSTEEMIÄ (***) VASTAAVA LIN. SYSTEEMI ON

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ PISTE $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ ON SYSTEEMISSÄ (*) EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

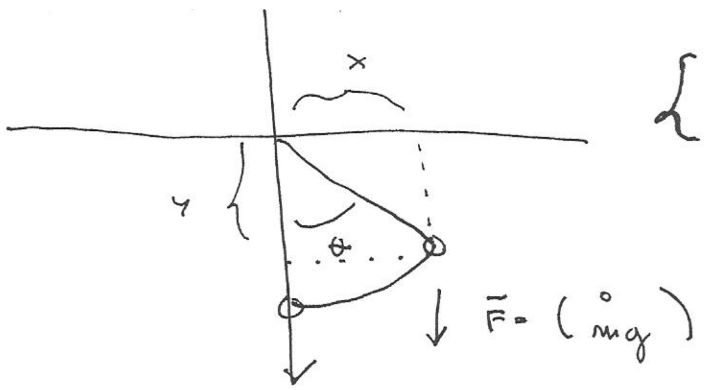
4.

VAIMENTAMATONTA HEILURIA KUVAAVA EPÄLIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} \theta' = \mu \\ \mu' = -\omega^2 \sin\theta \end{cases} \quad (*)$$

LÖYDETTÄVÄ JATKUVASTI DERIVOITUVA POSITIIVISESTI DEFINIITTI FUNKTIO $V(\mu, \theta) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s.e FUNKTION V derivaatta $\frac{d}{dt} V$ SYSTEEMIN $(*)$ RATOJA PITKIN ON NEGATIIVISESTI SEMIDEFINIITTI.

LUENNOILLA ESITETYN HYPOTEESIN MUKAAN LJAPUNOVIN FUNKTIO ON YLEENSÄ (SUORAAN?) VERRANNOLLINEN SYSTEEMIN KOK. ENERGIAAN.



$$\begin{cases} x = l \sin\theta \\ y = l \cos\theta \end{cases}$$

$$-\nabla U = \bar{F} \Rightarrow U = -mgy + C = -mgl\cos\theta + C.$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$E = T + U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + C$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = \frac{E}{ml^2} = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \underbrace{\frac{g}{l}}_{>0 = \omega^2} \cos\theta + C = \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos\theta + C$$

$$= \frac{\mu^2}{2} - \omega^2 \cos\theta + C.$$ VALITAAN $\tilde{E}$ s.e

$$\tilde{E}(0,0) = 0 \Rightarrow C = \omega^2 \quad \Longrightarrow$$

$$\tilde{E}(\mu,\theta) = \frac{1}{2}\mu^2 + \omega^2 \underbrace{(1-\cos(\theta))}_{\geq 0} = V(\mu,\theta)$$

$$> 0 \quad \forall (\mu,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$$

$$V' = V_\theta \theta' + V_\mu \mu' = V_\theta \mu + V_\mu (-\omega^2 \sin\theta)$$

$$= \omega^2 \sin(\theta)\mu + \mu(-\omega^2 \sin\theta) = 0 \leq 0$$

$$\forall (\mu,\theta) \in \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow$ TS. V ON JATKUVASTI DERIVOITUVA ,

$V > 0 \quad \forall (\mu,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$ & $V' \leq 0 \quad \forall (\mu,\theta) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow$ V ON SYSTEEMIN (*) LJAPUNOVIN FUNKTIO

& LJAPUNOVIN LAUSEEN NOJALLA ORIGO $(\theta,\mu)=(0,0)$

ON SYSTEEMIN (*) STABIILI KRIITTINEN PISTE.

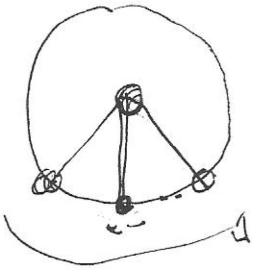
$$\theta'' = -\omega^2 \sin\theta$$

$$-\frac{d}{d\theta} U = -\omega^2 \sin\theta \qquad \mu = \dot{\theta}$$

$$c =$$

$$U = -\omega^2 \cos\theta + C$$

$$T = \frac{1}{2}\mu^2$$



$$E(0,0) = 0$$

$$\frac{1}{2}\underbrace{\mu}_{0}^{2} + (-\omega^2 \cos\underbrace{\theta}_{\theta} + C) = 0$$

$$c = \omega^2 \qquad \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$E(\mu,\theta) = \frac{1}{2}\underbrace{\mu^2}_{\geq 0} + \omega^2 \underbrace{(1 - \cos\theta)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\forall (\mu,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \{0,$$

$$E' = E_\theta \theta' + E_\mu \underline{\mu'}$$

$$\omega^2 \sin\theta\, \mu + \mu \cdot (-\omega^2 \sin\theta) = 0$$

$$\leq 0 \quad \forall (\mu,\theta) \in \mathbb{R}^2$$

Dynaamiset systeemit
16.2.2001

1. Etsi kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua systeemille

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x + 3y. \end{aligned}$$

2. Selvitä systeemin

$$\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= -x - 3y \end{aligned}$$

kriittisen pisteen luonne ja hahmottele systeemin radat.

3. Tarkastellaan yhtälöä

$$x'' + ax' + x + x^2 = 0,$$

missä $0 < a < 2$. Korvaa yhtälö autonomisella systeemillä sijoittamalla $x' = y$. Osoita, että origo on saadun systeemin stabiili spiraalipiste ja että $(-1, 0)$ on satulapiste.

4. Osoita Ljapunovin lauseen avulla, että origo on systeemin

$$\begin{aligned} x' &= -6x^2y \\ y' &= 6x^3 - 3y^3 \end{aligned}$$

stabiili kriittinen piste.

1.

LINEAARINEN VAKIOKERTOIMINEN HOMOGEENINEN SYSTEEMI

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIÄ (*) VASTAAVA KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 2$ $\Rightarrow$ REAALINEN KAKSOISJUURINEN TAPAUS

YKSI RATKAISU ON MUOTOA $\{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda t}, \beta_1 e^{\lambda t}\}$, MISSÄ KERTOIMET $\{\alpha_1, \beta_1\}$ TOTEUTTAVAT YHTÄLÖN

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1 \\ -\alpha_1 + 3\beta_1 = 2\beta_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2\beta_1 = 2\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1 = 1$$

$$\Rightarrow \{x_1, y_1\} = \{e^{2t}, e^{2t}\}$$

TOISEN RATKAISUN KANSSA LIN. RIIPPUMATON RATKAISU ON MUOTOA

$$\{x_2, y_2\} = \{(\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda t}, (\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda t}\}$$
$$= \{(\alpha_2 + t)e^{2t}, (\beta_2 + t)e^{2t}\}$$

$$x_2' = e^{2t} + 2(\alpha_2 + t)e^{2t} = x_2 + y_2 = 2te^{2t} + (\alpha_2+\beta_2)e^{2t}$$
$$\Leftrightarrow (1+2\alpha_2)e^{2t} = (\alpha_2+\beta_2)e^{2t} \Leftrightarrow 1 + 2\alpha_2 = \alpha_2 + \beta_2$$

$$y_2' = e^{2t} + 2\alpha_2 e^{2t} + 2te^{2t} = -(\alpha_2 + t)e^{2t} + 3(\beta_2 + t)e^{2t}$$
$$\Leftrightarrow (1+2\alpha_2)e^{2t} = (3\beta_2 - \alpha_2)e^{2t} \Leftrightarrow 1 + 2\alpha_2 = 3\beta_2 - \alpha_2$$

$$\Downarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha_2 = \alpha_2 + \beta_2 \Rightarrow -\alpha_2 = 1 - \beta_2 \Rightarrow \alpha_2 = -1 \\ 1 + 2\beta_2 = 3\beta_2 - \alpha_2 \Leftrightarrow 1 + 2\beta_2 = 1 + 2\beta_2 \Rightarrow \beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

TOINEN LIN. RIIPPUMATON RATKAISU ON

$$\{x_2, y_2\} = \{(t-1)e^{2t}, te^{2t}\}.$$

(2.) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

VAKIOKERTOIMISTA SYSTEEMIÄ VASTAAVA KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \pm \frac{\sqrt{12}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{ts} \begin{cases} \lambda_1 = -1 + \sqrt{3} > 0 \\ \lambda_2 = -1 - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

(VASTAKKAISMERKKISTEN REAALIJUURTEN TAPAUS)

$\Rightarrow$ LAUSEEN 4.1 PERUSTEELLA SYSTEEMIN AINOA KRIITTINEN PISTE $(x,y) = (0,0)$ ON EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

YHTÄLÖLLÄ ON KAKSI LIN. RIIPPUMATONTA RATKAISUA

$$\{x_1, y_1\} = \{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \ \& \ \{x_2, y_2\} = \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$$

$(\lambda_1 > 0 > \lambda_2)$

MISSÄ LUVUT $\{\alpha_i, \beta_i\}$ OVAT JOITAKIN YHTÄLÖPARIEN

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2$$

EI-TRIVIAALEJA RATKAISUJA. $\Rightarrow$ TÄLLÖIN SYSTEEMIN (*) YLEINEN RATKAISU ON MUOTOA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \beta_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

KUN $c_2 = 0$ KUN $c_1 = 0$

$$\frac{y}{x} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \Leftrightarrow y = \frac{\beta_1}{\alpha_1} x, \quad \frac{y}{x} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Leftrightarrow y = \frac{\alpha_2}{\beta_2} x$$

YLEINEN TAPAUS $c_1 \neq 0$ & $c_2 \neq 0$

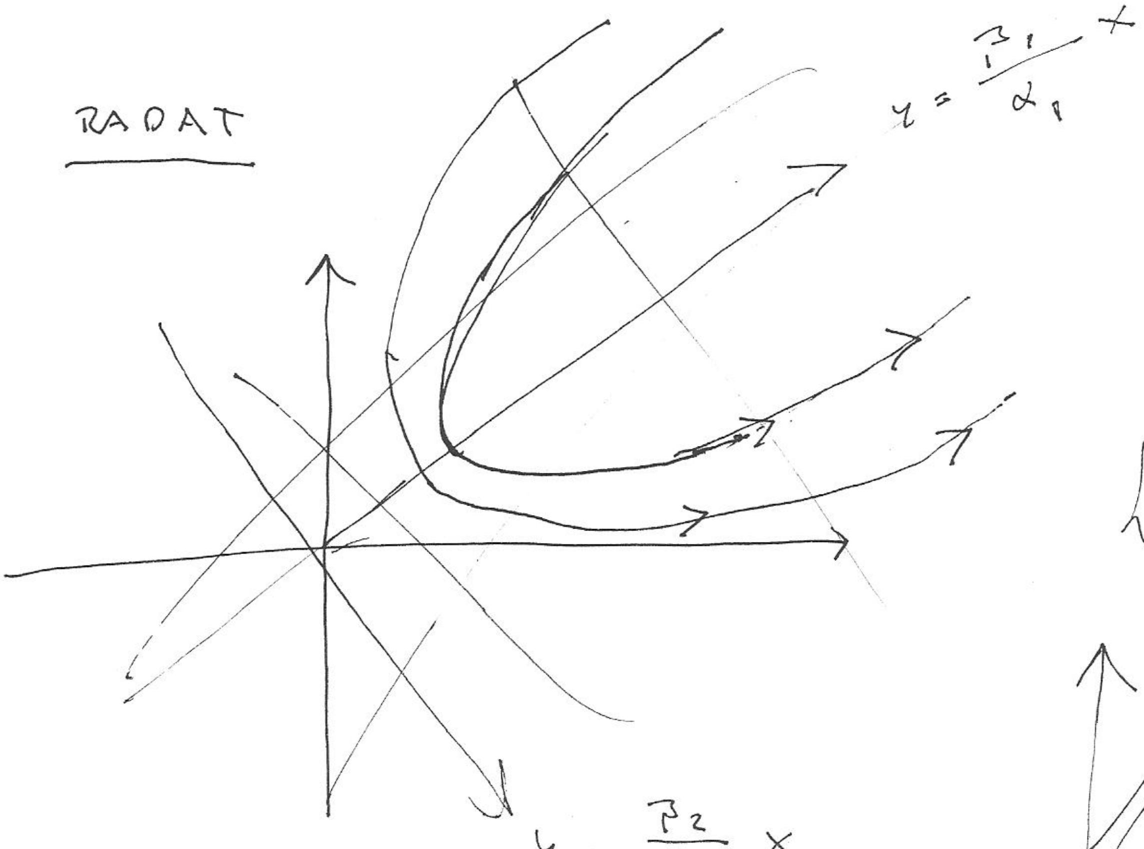
$$\frac{y}{x} = \frac{c_1\beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1\beta_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\beta_2}{c_1\alpha_1 e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\alpha_2} \Longrightarrow \lim_{t\to-\infty} \frac{y}{x} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

$\Rightarrow$ KUN PISTEEN $\{x(t), y(t)\}$ ETÄISYYS ORIGOSTA KASVAA RADAN SUUNTA LÄHESTYY SUORAN $y = \frac{\beta_1}{\alpha_1} x$ SUUNTAA. KUN PISTEEN $\{x(t), y(t)\}$ ETÄISYYS ORIGOSTA PIENENEE RADAN SUUNTA LÄHESTYY SUORAN $y = \frac{\beta_2}{\alpha_2} x$ SUUNTAA

RADAT



RADAT

3.

AUTONOMINEN EPÄLINEAARINEN HOMOGEENINEN DY:

$$x'' + ax' + x + x^2 = 0 \qquad (*)$$

(*):ä VASTAA EPÄLIN. AUTONOMINEN SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = y & = f(x,y) \\ y' = -ay - x - x^2 & = g(x,y) \end{cases} \qquad (**)$$

SYSTEEMILLÄ ON KRIITTISET PISTEET $(0,0) = P_1$ & $(-1,0) = P_2$

(~~[illegible]~~ $f(0,0) = g(0,0) = f(-1,0) = g(-1,0) = 0$)

PISTE P_1

SYSTEEMIÄ (**) VASTAAVA LIN. SYSTEEMI ON

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

↳ SYSTEEMIÄ VASTAAVA KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + 1$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4} = -\frac{1}{2}a \pm i\sqrt{a^2 - 4}$$

KUN $0 < a < 2$

$\Rightarrow$ KARAKTERISTISEN YHTÄLÖN JUURET OVAT IMAGINÄÄRISIÄ LUKUJA ($\&$ $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$) $\Rightarrow$ L. 4.1 PERUSTEELLA $(0,0)$ ON LIN. SYSTEEMIN (ASYMP.) STABIILI SPIRAALIPISTE $\Rightarrow$ L. 5.1 PERUSTEELLA $(0,0)$ ON MYÖS SYSTEEMIN (**) (ASYMPTOOTTISESTI) STABIILI SPIRAALIPISTE.

PISTE P_2

TEHDÄÄN MUUTTUJAN VAIHTO

$$\begin{cases} \tilde{x} = x+1 \iff x = \tilde{x}-1 \\ \tilde{y} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}' = x' = y \\ \tilde{y}' = y' = -ay - x - x^2 = -a\tilde{y} - (\tilde{x}-1) - (\tilde{x}-1)^2 \end{cases}$$

$$= -a\tilde{y} - \tilde{x} + \cancel{1} - \tilde{x}^2 + 2\tilde{x} - \cancel{1} \quad (\ast\ast\ast)$$

VASTAAVA
LIN. SYSTEEMI

$$= -a\tilde{y} - \tilde{x} - \tilde{x}^2 + 2\tilde{x} = -a\tilde{y} + \tilde{x} - \tilde{x}^2$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} \tilde{x}' \\ \tilde{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ SYSTEEMIÄ VASTAAVA KY: $\Rightarrow$ $\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -a-\lambda \end{pmatrix}$

$$= \lambda^2 + a\lambda - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sqrt{a^2+4} - a}_{>0 \ \forall a>0}\Big) > 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2+4} < 0$$

$\Rightarrow$ PISTE $(\tilde{x},\tilde{y}) = (0,0)$ ON LIN. SYSTEEMIN (EPÄSTABIILI) SATULAPISTE $\Rightarrow$ $(\tilde{x},\tilde{y}) = (0,0)$ ON SYSTEEMIN $(\ast\ast\ast)$ EPÄSTABIILI SATULAPISTE $\Rightarrow$ PISTE $(-1,0)$ ON SYSTEEMIN $(\ast)$ EPÄSTABIILI SATULAPISTE.

4.

$$\begin{cases} x' = -6x^2 y = f(x,y) \\ y' = 6x^3 - 3y = g(x,y) \end{cases} \quad (*)$$

LÖYDETTÄVÄ FUNKTIO $V(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, JOKA ON JATKUVASTI DERIVOITUVA, POSITIIVISESTI DEFINIITTI & JONKA DERIVAATTA $\frac{d}{dt} V(x,y)$ SYSTEEMIN RATOJA PITKIN ON NEGATIIVISESTI SEMIDEFINIITTI.

$$V'(x,y) = V_x X' + V_y Y' = V_x f(x,y) + V_y g(x,y)$$

YRITE: $V(x,y) = x^2 + axy + by^2$

$$\Rightarrow V' = (2x + ay)\cdot(-6x^2 y) + (2by + ax)\cdot(6x^3 - 3y^2)$$
$$= -12x^3 y - 6ax^2 y^2 + 12bx^3 y - 6by^4 + ax^4 - 3axy^3$$

VALITAAN $a = 0$ & $b = 1$

$$= -6by^4 = -6y^4 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

LISÄKSI $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \{0,0\}$

$\Rightarrow V(x,y) = x^2 + y^2$ ON SYSTEEMIN $(*)$ LJAPUNOVIN FUNKTIO $\Rightarrow$ LJAPUNOVIN LAUSEEN NOJALLA ORIGO ON SYSTEEMIN $(*)$ STABIILI KRIITTINEN PISTE.

Dynaamiset systeemit
20.10.2000

1. Etsi kaksi lineaarisesti riippumatonta ratkaisua systeemille

$$x' = 4x - 2y$$
$$y' = 5x + 2y.$$

2. Selvitä systeemin

$$x' = 2x$$
$$y' = 2y$$

kriittisen pisteen luonne ja hahmottele systeemin radat.

3. Etsi systeemin

$$x' = x - x^2 + 2y + 3$$
$$y' = -x + 2y$$

kriittiset pisteet ja määritä niiden luonne ja stabiilisuusominaisuudet tutkimalla kunkin kriittisen pisteen kohdalla vastaavaa lineaarista systeemiä.

4. Tarkastellaan epälineaarisen jousen differentiaaliyhtälöä

$$x'' + f(x) = 0$$

missä $f(x)$ on jatkuva ja samanmerkkinen kuin x. Korvaa yhtälö autonomisella systeemillä sijoittamalla $x' = y$. Osoita Ljapunovin lauseen avulla, että origo on saadun systeemin stabiili kriittinen piste.

1. VAKIOKERTOIMINEN SYSTEEMI:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN (*) KY:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{2} \pm \frac{\sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2} = 3 \pm 3i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 + 3i \\ \lambda_2 = 3 - 3i \end{cases}$$

KYSEESSÄ ON LUENTOJEN TAPAUS 3:

SYSTEEMIN (*) KY:N JUURET IMAGINÄÄRISIÄ LIITTOLUKUJA. $\Longrightarrow$

OLK. $\{\alpha_1, \beta_1\}$ JOKIN YHTÄLÖPARIN

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

EI TRIVIAALI RATKAISU & MERKITÄÄN

$\alpha_1 = A_1 + iA_2$ & $\beta_1 = B_1 + iB_2$ MERKITÄÄN

LISÄKSI $\lambda_1 = a + ib$ $(b \neq 0)$.

TÄLLÖIN PARIT

$$\{x_1, y_1\} = \{e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt),\ e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt)\}$$

$$\{x_2, y_2\} = \{e^{at}(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt),\ e^{at}(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)\}$$

OVAT SYSTEEMIN (*) LIN. RIIPPUMATTOMIA RATKAISUJA

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = (3+3i) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha_1 - 2\beta_1 = (3+3i)\alpha_1 \Rightarrow 2\beta_1 = (1-3i)\alpha_1 \\ 5\alpha_1 + 2\beta_1 = (3+3i)\beta_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10\alpha_1 + 2 \cdot 2\beta_1 = (3+3i)\, 2\beta_1 \Leftrightarrow 10\alpha_1 = (1+3i)\, 2\beta_1$$

$$= (1+3i)(1-3i)\alpha_1 = |1+3i|\,\alpha_1 = 10\alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = 2$$

$$\Rightarrow 2\beta_1 = (1-3i)\alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = 1 - 3i$$

TS. ARVOA $\lambda_1 = 3 + 3i$ VASTAAVA (ERÄS) OMINAISVEKTORI

ON $\{\alpha_1, \beta_1\} = \{2, 1 + 3i\}$ $\Longrightarrow$ SYSTEEMIN ~~[illegible]~~

(ERÄÄT) LIN. RIIPPUMATON RATKAISUPARIT OVAT

$$\{x_1, y_1\} = \{e^{3t}\cdot(2\cos(3t)), e^{3t}(1\cdot\cos(3t) - 3\cdot\sin(3t))\}$$

$$\{x_2, y_2\} = \{e^{3t}\cdot 2\cdot\sin(3t), e^{3t}(1\cdot\sin(3t) - 3\cdot\cos(3t))$$

2. LIN. SYSTEEMI

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (*)$$

SYSTEEMIN (*) KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ ON:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

KYSEESSÄ ON POSITIIVISEN KAKSOISJUUREN TAPAUS, JOTEN SYSTEEMIN AINOA KRIITTINEN PISTE $(0,0)$ ON LUONTEELTAAN EPÄSTABIILI RISTEYS.

LISÄKSI TARKASTELTAESSA YHTÄLÖÄ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \qquad (**)$$

HUOMATAAN, ETTÄ OMINAISARVOA 2 VASTAA 2 LIN. RIIPPUMATONTA OMINAISVEKTORIA.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TS. YHTÄLÖPARI (**) TOTEUTUU IDENTTISESTI $\Rightarrow$ SYSTEEMILLÄ (*) $\exists$ LIN. RIIPPUMATTOMAT RATKAISUT

$\{x_1, y_1\} = (e^{2t}, 0)$ & $\{x_2, y_2\} = \{0, e^{2t}\}$

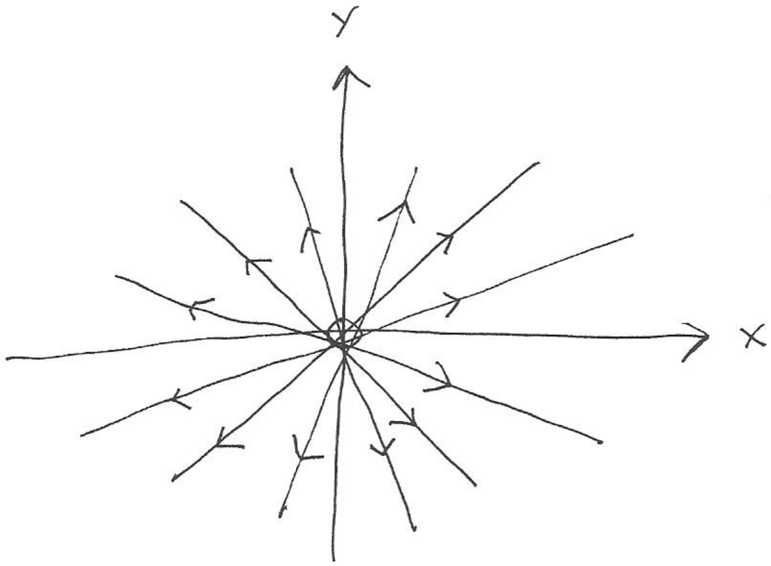
JOLLOIN (*):N YLEINEN RATKAISU ON

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

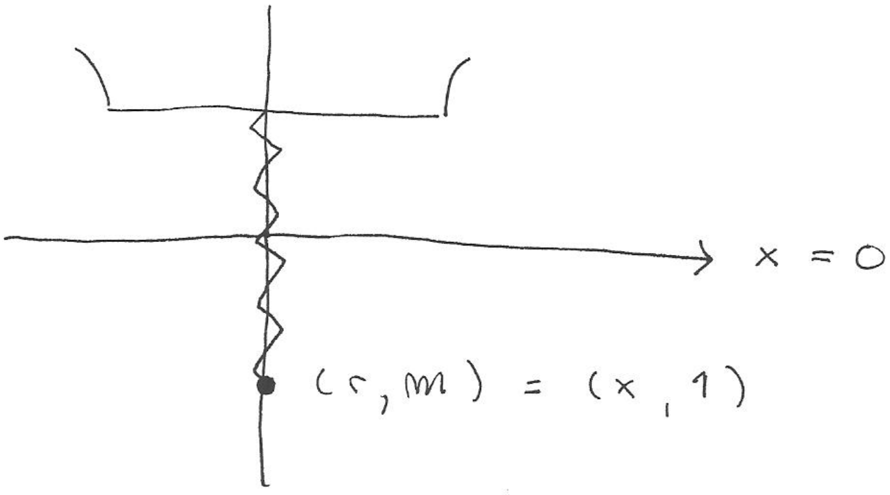
1) $\frac{y}{x} = \frac{c_2}{c_1} \iff c_1 y = c_2 x$

2) SYSTEEMIN RADAT OVAT ORIGON KAUTTA KULKEVIA SUORIA.

MOAT



4. EPÄLIN. JOUSI



HIUKKASEN LIIKETTÄ KUVAA DIFF. YHTÄLÖ:

$$x'' = -f(x) \qquad (*)$$

, MISSÄ f ON JVA & $x f(x) > 0$. YHTÄLÖÄ $(*)$ VASTAA SYSTEEMI:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) \end{cases} \qquad (**)$$

(KOSKA TEHTÄVÄSSÄ OLETETAAN, ETTÄ $(x,y) = (0,0)$ ON KRIITTINEN PISTE NIIN $f(0) = 0$)

LUENNOILLA ESITETYN HYPOTEESIN MUKAAN LJAPUNOVIN FUNKTIO ON USEIN (SUORAAN?) VERRANNOLLINEN SYSTEEMIN. KOK. ENERGIAAN.

$E(x, x') = E(x,y) = T(y) + U(x)$, MISSÄ $T(y)$ ON NELIÖMUOTO $\frac{1}{2} y^2$ & $U(x)$ ON VERRANNOLLINEN HIUKKASEN ETÄISYYTEEN PISTEESTÄ $x = 0$ s.e.

$$U(x) = -\int_0^x -f(s)\,ds = \int_0^x f(s)\,ds > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}/\{0\}$$

SILLÄ JOS $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^x f(s)\,ds > 0$

JOS $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ & $U(x) = \int_x^0 f(s)\,ds = -\int_0^x \underbrace{f(s)}_{<0}\,ds \not> 0$??

$$\Rightarrow E(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2/\{0,0\}$$

LISÄKSI

$$V'(x,y) = V_x X' + V_y Y' = V_x Y + V_y(-f(x))$$

$$= f(x)Y + Y(-f(x)) = 0 \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow$ $E(x,y)$ ON JATKUVASTI DERIVOITUVA POSIT. DEF. FUNKTIO, JOLLE $V(0,0) = 0$ & JOLLE $V'(x,y)$ ON NEGATIIVISESTI SEMIDEFINIITTI.

$\Longrightarrow$ V ON SYSTEEMIN (**) LJAPUNOVIN FUNKTIO & LJAPUNOVIN LAUSEEN NOJALLA KRIITTINEN PISTE $(0,0)$ ON TÄLLÖIN STABIILI.