

# 3317342 Dynaamiset systeemit

Timo Erkama  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-käännös  
Juha-Matti Huusko  
Marko Lamminsalo  
Itä-Suomen yliopisto  
28. marraskuuta 2012

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Lineaariset systeemit</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Vakiokertoimiset systeemit</b>	<b>12</b>
3.1	2 reaalista erisuuruista juurta $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ . . . . .	12
3.2	Reaalinen kaksoisjuuri $\lambda_1 = \lambda_2$ . . . . .	14
3.3	Ei reaalisia juuria . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Lineaaristen systeemien stabiilisuus</b>	<b>20</b>
4.1	Tapaus 1: $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat reaaliset, erisuuret ja samanmerkkiset . . . . .	23
4.2	Tapaus 2: $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat reaaliset ja vastakkaismerkkiset . . . . .	24
4.3	Tapaus 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (reaalinen kaksoisjuuri) . . . . .	25
4.4	Tapaus 4: $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ eivät ole reaalisia . . . . .	26
4.5	Yhteenveto . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Epälineaaristen systeemien stabiilisuus</b>	<b>31</b>
<b>6</b>	<b>Ljapunovin lause</b>	<b>38</b>

# 1 Johdanto

Mielivaltaisesti annetun differentiaaliyhtälön ratkaisua ei yleensä voida esittää suljetussa muodossa. Sen vuoksi on tarpeen tutkia differentiaaliyhtälöitä kvalitatiivisesti ja etsiä tietoa ratkaisujen käyttäytymisestä tuntematta ratkaisuja eksplisiittisesti.

**Esimerkki 1.1.** Tarkastellaan yhtälöitä

(a)  $x'' + 3x' + 2x = 0$

(b)  $x'' - 3x' + 2x = 0$

(c)  $x'' + x = 0$ .

Yleiset ratkaisut ovat

(a)  $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

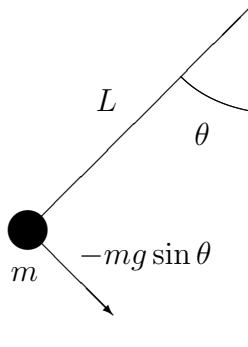
(b)  $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$

(c)  $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ .

Selvästi kaikki yhtälön (a) ratkaisut lähestyvät nollaa kun  $t \rightarrow \infty$ , kaikki yhtälön (b) ratkaisut kasvavat (tai pienenevät) rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$  ja kaikki yhtälön (c) ratkaisut ovat jaksollisia, jaksona  $2\pi$ .

Yllä olevassa esimerkissä differentiaaliyhtälöt olivat lineaarisia. Epälineaaristen yhtälöiden käyttäytymisestä voidaan saada tietoa approksimoimalla annettua differentiaaliyhtälöä sopivalla lineaarisella yhtälöllä.

**Esimerkki 1.2.** Tarkastellaan heiluria, jonka pituus on  $L$  ja joka heilahtelee vapaasti.



Vaimentamatonta heilahtelua kuvaa epälineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0, \quad (1.1)$$

missä  $\omega^2 = \frac{g}{L}$ . Koska

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1,$$

niin pienillä kulman  $\theta$  arvoilla yhtälöä (1.1) voidaan approksimoida lineaarisella yhtälöllä

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0. \quad (1.2)$$

Yhtälön (1.2) yleinen ratkaisu on jaksollinen:

$$\theta(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Myöhemmin vertaamme näitä ratkaisuja yhtälön (1.1) ratkaisuihin.

**Esimerkki 1.3.** Epälineaarilla ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöllä

$$x' = -x + x^2 \quad (1.3)$$

on kaksi vakioratkaisua  $x = 0$  ja  $x = 1$ , kuten nähdään heti sijoittamalla. Jos  $x$  on lähellä nollaa, yhtälön epälineaarinen termi  $x^2$  on pieni verrattuna lineaariseen termiin  $-x$ , sillä

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Sen vuoksi on luonnollista verrata yhtälön (1.3) ratkaisuja lineaarisen yhtälön

$$x' = -x \quad (1.4)$$

ratkaisuihin. Yhtälön (1.4) yleinen ratkaisu on

$$x(t) = x(0)e^{-t}.$$

Epälineaarinen yhtälö (1.3) voidaan ratkaista erottamalla muuttujat. Kirjoittamalla  $x' = \frac{dx}{dt}$  ja kertomalla puolittain termillä  $\frac{dt}{-x+x^2}$  saadaan yhtälö

$$\frac{dx}{-x+x^2} = dt,$$

josta edelleen puolittain integroimalla

$$\int \frac{dx}{-x+x^2} = \int dt = t + c_0.$$

Yhtälön vasemmanpuoleisen integraalin arvoksi saadaan nyt osamurtohajotelmaa käyttämällä

$$\int \frac{dx}{-x+x^2} = \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln(x-1) - \ln x = \ln \frac{x-1}{x}.$$

Yhtälö 1.3 voidaan siis esittää muodossa

$$\ln \frac{x-1}{x} = t + c_0,$$

josta edelleen

$$\frac{x-1}{x} = e^{t+c_0} = Ce^t, \quad (1.5)$$

missä  $C = e^{c_0}$ . Voidaan olettaa, että  $x(0) \neq 0$ , sillä tapauksessa  $x(0) = 0$  saadaan (yksi-käsitteisyyslauseen nojalla) triviaaliratkaisu  $x(t) \equiv 0$ . Sijoittamalla yhtälöön (1.5)  $t = 0$  saadaan

$$\frac{x(0) - 1}{x(0)} = C.$$

Sijoittamalla nyt saatu vakion  $C$  arvo yhtälöön 1.5 saadaan

$$\frac{x(t) - 1}{x(t)} = \frac{x(0) - 1}{x(0)} e^t,$$

josta edelleen seuraa

$$x(t) = \frac{x(0)}{x(0)(1 - e^t) + e^t}. \quad (1.6)$$

Ratkaisu on määritelty vain jos nimittäjä on nolasta eroava, so.

$$x(0)(1 - e^t) + e^t \neq 0.$$

Toisin sanoen

$$e^t \neq \frac{x(0)}{x(0) - 1} = \frac{1}{C},$$

jolloin siis

$$t \neq \ln \frac{x(0)}{x(0) - 1} = -\ln C.$$

Huomataan, että  $|x(0)|$ :n ollessa pieni ratkaisu (1.6) on likimain  $x(0)e^{-t}$ , so. lineaarisen yhtälön (1.4) ratkaisu. Tehtävän kvalitatiivinen tarkastelu jakautuu kahteen osaan riippuen saadun vakion  $C$  arvosta:

1°) Jos  $0 < x(0) < 1$ , niin yhtälön (1.5) jälkeisen päättelyn nojalla  $C < 0$ . Näin ollen

$$e^t \neq \frac{1}{C}$$

kaikille  $t$ , joten ratkaisu (1.6) on määritelty kaikilla muuttujan  $t$  arvoilla ja lähestyy nollaa kun  $t \rightarrow \infty$ . Tällöin yhtälöiden (1.3) ja (1.4) ratkaisuille on sama asymptoottinen käyttäytyminen.

2°) Jos  $x(0) > 1$ , niin tällöin  $C \geq 0$ . Tässä tapauksessa emme ole enää lähellä triviaaliratkaisua  $x \equiv 0$  ja yhtälö (1.4) ei ole enää hyvä approksimaatio yhtälölle (1.3). Tapauksessa  $x(0) = 1$  saadaan väliratkaisu  $x \equiv 1$ . Tapauksessa  $x(0) > 1$  on  $0 < C < 1$  ja  $-\ln C > 0$ , joten ratkaisu (1.6) kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow -\ln C$ .

Sanomme, että yhtälön (1.3) ratkaisu  $x = 0$  on *asymptoottisesti stabiili*, kun taas ratkaisu  $x = 1$  on *epästabiili*.

Seuraavassa tutkimme paljon ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöpareja, jotka voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x, y) \\y' &= g(t, x, y)\end{aligned}\tag{1.7}$$

missä  $f$  ja  $g$  ovat muuttujien  $t$ ,  $x$  ja  $y$  jatkuvasti differentioituvia funktioita, jotka on määritelty jossakin  $\mathbb{R}^3$ :n alueessa

$$D: \quad a < t < b, \quad c < x < d, \quad e < y < h.$$

Voidaan todistaa, että jokaisen  $D$ :n pisteen  $(t_0, x_0, y_0)$  kautta kulkee täsmälleen yksi systeemin (1.7) integraalikäyrä, jonka parametriesitys  $t \mapsto (x(t), y(t))$  on määritelty jollakin  $t_0$ :n sisältävällä välillä.

Sanomme, että systeemi (1.7) on *autonominen* (ajasta riippumaton), jos funktiot  $f$  ja  $g$  eivät riipu muuttujasta  $t$ . Muussa tapauksessa (1.7) on *epäautonominen*.

#### Esimerkki 1.4. Systeemi

$$\begin{aligned}x' &= -x^2 + y \\y' &= -x + y^2\end{aligned}$$

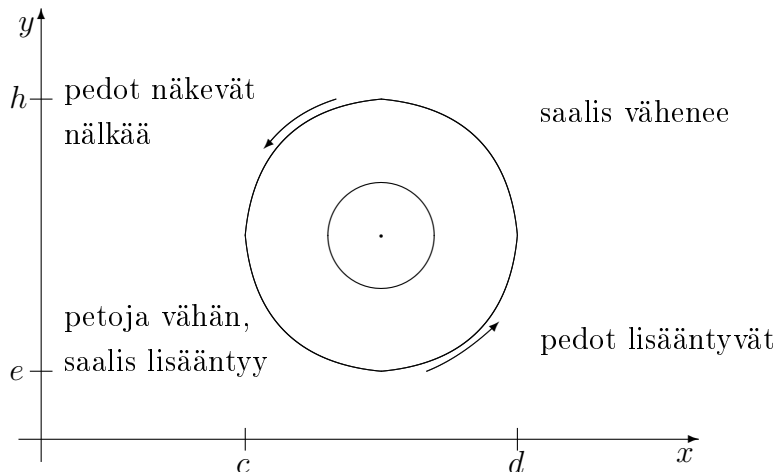
on autonominen, kun taas systeemi

$$\begin{aligned}x' &= ty \\y' &= -x\end{aligned}$$

on epäautonominen.

Systeemin (1.7) yksityisratkaisut  $t \mapsto (x(t), y(t))$  ovat käyriä  $xy$ -tasossa. Tämä on systeemin *faasitaso*, ja jokainen ratkaisukäyrä on systeemin *rata*. Systeemistä saadaan usein paljon tietoa tutkimalla sen ratoja.

Esimerkiksi biologiassa kahden eläinlajin populaatiota voidaan kuvata seuraavanlaisella systeemillä, missä funktiot  $x(t)$  ja  $y(t)$  merkitsevät vastaavasti saalis- ja petopopulaatiota tietyllä ajanhetkellä  $t$ .



Systeemin mallina ovat niin sanotut Lotkan-Volterran yhtälöt

$$\begin{aligned}x' &= \beta_1 x - \delta_{11} x^2 - \delta_{12} xy \\y' &= -\beta_2 y - \delta_{21} xy - \delta_{22} y^2.\end{aligned}$$

**Esimerkki 1.5.** Tarkastellaan harmonista värähtelijää, jonka differentiaaliyhtälö on

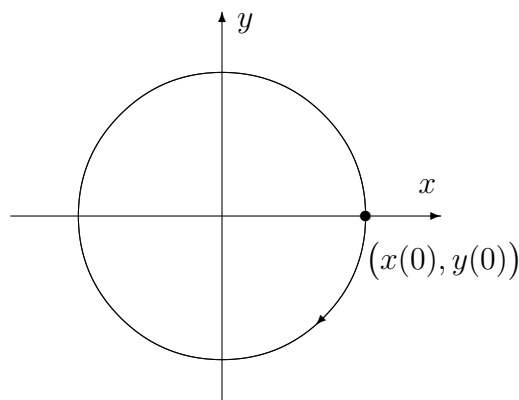
$$x'' + x = 0$$

ja alkuehdot  $x(0) = 1$  ja  $x'(0) = 0$ . Yhtälö voidaan korvata autonomisella systeemillä

$$\begin{cases}x' = y \\y' = -x\end{cases}$$

ja alkuehdoilla  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ . Systeemin rata voidaan saada selville kahdella tavalla:

**1. tapa** Tiedetään, että alkuarvotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu  $(x(t), y(t)) = (\cos t, -\sin t)$ . Koska  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ , systeemin rata toteuttaa yhtälön  $x^2 + y^2 = 1$ , joka esittää ympyrää  $xy$ -tasossa.



**2. tapa** Rata saadaan selville myös ratkaisematta systeemiä. Soveltamalla ketjusääntöä

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$$

systeemin differentiaaliyhtälöihin saadaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y}.$$

Erotetaan muuttujat,

$$y dy = -x dx,$$

ja integroidaan, saadaan

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1,$$

josta edelleen

$$x^2 + y^2 = C,$$

missä  $C = 2C_1$ . Vakion  $C$  määrittämiseksi todetaan, että hetkellä  $t = 0$  on  $x = 1$  ja  $y = 0$ , joten

$$C = x(0)^2 + y(0)^2 = 1.$$

Radan säde riippuu siis alkuehdoista.

**Esimerkki 1.6.** Tarkastellaan edelleen harmonista värähtelijää uusien alkuehdoin

$$x(t_0) = 1 \quad \text{ja} \quad y(t_0) = 0.$$

Ratkaisu on jälleen yksikäsitteinen; se on

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t - t_0), -\sin(t - t_0)).$$

Siis

$$x^2 + y^2 = \cos^2(t - t_0) + \sin^2(t - t_0) = 1,$$

joten saatiin sama rata kuin edellisessä esimerkissä.

Yleisemmin voidaan todistaa, että *kaikille autonomisille systeemeille* rata (pistejoukkona) riippuu vain alkuarvoista  $x(t_0)$  ja  $y(t_0)$  mutta on muuten *riipumaton alkuhetkestä*  $t_0$ .

**Lause 1.1.** *Autonomisen systeemin*

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \tag{1.8}$$

*alkuehtoja*  $x(t_0) = x_0$  ja  $y(t_0) = y_0$  *vastaava rata ei riipu luvun*  $t_0$  *arvosta.*

*Todistus.* Olkoot  $\{x(t), y(t)\}$  ja  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  systeemin (1.8) ratkaisuja, jotka toteuttavat vastaavasti alkuehdot

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0 & \quad \text{ja} \quad x_1(t_1) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 & \quad \quad \quad y_1(t_1) = y_0 \end{aligned}$$

Olkoon  $\tau = t + (t_0 - t_1)$ . Tällöin yhtälöiden  $x_2(t) = x(\tau)$  ja  $y_2(t) = y(\tau)$  määrittelemä funktiopari  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  on systeemin (1.8) ratkaisu, sillä

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= x'(\tau) = f(x(\tau), y(\tau)) = f(x_2(t), y_2(t)) \\ y_2'(t) &= y'(\tau) = g(x(\tau), y(\tau)) = g(x_2(t), y_2(t)). \end{aligned}$$

Lisäksi  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  toteuttaa alkuehdot

$$\begin{aligned} x_2(t_1) &= x(t_0) = x_0 \quad \text{ja} \\ y_2(t_1) &= y(t_0) = y_0, \end{aligned}$$

joten alkuarvot tehtävän yksikäsitteisyyden nojalla

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_1(t) \quad \text{ja} \\ y_2(t) &= y_1(t) \end{aligned}$$



kaikille  $t \geq t_1$ .

Jokainen ratkaisukäyrän  $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$  piste on arvoilla  $t \geq t_1$  siis muotoa

$$(x_2(t), y_2(t)) = (x(\tau), y(\tau))$$

ja kuuluu siten käyrälle  $t \mapsto (x(t), y(t))$ .

Samalla tavalla nähdään kääntäen, että jokainen käyrän  $t \mapsto (x(t), y(t))$  piste kuuluu arvoilla  $t \geq t_0$  käyrälle  $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ .  $\square$

Seuraava esimerkki osoittaa, että epäautonomisella systeemillä ei ole Lauseen 1.1 ominaisuutta.

**Esimerkki 1.7.** Tarkastellaan epäautonomista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x & x(t_0) &= 1, \\ y' &= y & y(t_0) &= 2. \end{aligned}$$

Yhtälöt ovat riippumattomia, joten ratkaisu on helppo laskea:

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t}{t_0}, 2e^{t-t_0}\right).$$

Koska  $t = t_0x$ , rata toteuttaa yhtälön  $y = 2e^{t_0(x-1)}$ . Rata riippuu siten oleellisesti alkuehdestä  $t_0$ .

## 2 Lineaariset systeemit

Tässä luvussa tarkastelemme kahden ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön muodostamaa systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y + f_1(t) \\y' &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y + f_2(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

ja vastaavaa homogeenista systeemiä (so.  $f_1 = f_2 = 0$ )

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y \\y' &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Tällaisen systeemin *ratkaisulla* tarkoitetaan kahden derivoituvan funktion paria  $\{x(t), y(t)\}$ , joka toteuttaa systeemin yhtälöt (jollakin  $t$ -akselin välillä). Voidaan todistaa

**Lause 2.1.** *Oletetaan, että funktiot  $a_{11}(t)$ ,  $a_{12}(t)$ ,  $a_{21}(t)$ ,  $a_{22}(t)$ ,  $f_1(t)$  ja  $f_2(t)$  ovat jatkuvia. Silloin jokaista pistettä  $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^3$  kohden on olemassa täsmälleen yksi systeemin (2.1) ratkaisu  $\{x(t), y(t)\}$ , joka toteuttaa ehdot  $x(t_0) = x_0$  ja  $y(t_0) = y_0$ .*

Funktiopari  $\{x_3(t), y_3(t)\}$  on parien  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  *lineaarikombinaatio*, jos on olemassa vakiot  $c_1$  ja  $c_2$  siten, että seuraavat kaksi yhtälöä ovat voimassa:

$$\begin{aligned}x_3(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\y_3(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Nähdään helposti

**Lause 2.2.** *Jos  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  ovat homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisuja, niin kaikki niiden lineaarikombinaatiot ovat myös systeemin (2.2) ratkaisuja.*

**Esimerkki 2.1.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= -x + 6y \\y' &= x - 2y.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Sijoittamalla nähdään, että tällä systeemillä on ratkaisut  $\{-2e^{-4t}, e^{-4t}\}$  ja  $\{3e^t, e^t\}$ . Jos  $c_1$  ja  $c_2$  ovat mielivaltaisia vakioita, niin Lauseen (2.2) nojalla pari

$$\{-2c_1e^{-4t} + 3c_2e^t, c_1e^{-4t} + c_2e^t\}$$

on myös systeemin (2.4) ratkaisu.

Sanomme, että kaksi funktioparia  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  ovat *lineaarisesti riippumattomia*, jos yhtälöpari

$$\begin{aligned}c_1x_1(t) + c_2x_2(t) &= 0 \\c_1y_1(t) + c_2y_2(t) &= 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

toteutuu kaikilla  $t$ :n arvoilla vain mikäli  $c_1 = c_2 = 0$ .

Määritellään kahden ratkaisun  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  Wronskin determinantti yhtälöllä

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t). \quad (2.6)$$

**Lause 2.3.** *Olkoot  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisuja, joiden Wronskin determinantti on nollasta eroava kaikilla  $t$ :n arvoilla. Silloin (2.3) on systeemin (2.2) yleinen ratkaisu, so. jokaista systeemin (2.3) ratkaisua  $\{x^*, y^*\}$  kohden on olemassa vakiot  $c_1$  ja  $c_2$  siten, että*

$$\begin{aligned} x^*(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \\ y^*(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \end{aligned} \quad (2.7)$$

*Todistus.* Valitaan  $t = t_0$  ja tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{aligned} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) &= x^*(t_0) \\ c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y^*(t_0), \end{aligned} \quad (2.8)$$

jossa tuntemattomina ovat  $c_1$  ja  $c_2$ . Tämän yhtälön determinantti  $W(t_0)$  on oletuksen nojalla nollasta eroava, joten parilla (2.8) on täsmälleen yksi ratkaisu  $\{c_1, c_2\}$ . Lauseen (2.2) nojalla

$$\{c_1x_1(t) + c_2x_2(t), c_1y_1(t) + c_2y_2(t)\}$$

on systeemin (2.2) ratkaisu, ja yhtälöparin (2.8) perusteella se toteuttaa pisteessä  $t_0$  samat alkuehdot kuin  $\{x^*(t), y^*(t)\}$ . Ratkaisun yksikäsitteisyydestä (Lause 2.1) seuraa näin ollen, että systeemi (2.7) toteutuu kaikilla  $t$ :n arvoilla.  $\square$

**Esimerkki 2.2.** Esimerkissä 2.1 Wronskin determinantti on

$$W(t) = \begin{vmatrix} -2e^{-4t} & e^{-4t} \\ 3e^t & e^t \end{vmatrix} = -2e^{-3t} - 3e^{-3t} = -5e^{-3t} \neq 0.$$

Systeemin (2.4) yleinen ratkaisu löytyy niin, kuten Lauseessa 2.3.

Lauseen 2.3 soveltamista helpottaa

**Lause 2.4.** *Olkoot  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  homogeenisen systeemin 2.2 ratkaisuja välillä  $\Delta$ . Oletetaan, että vastaavalla Wronskin determinantilla  $W(t)$  on nollakohta välillä  $\Delta$ . Silloin  $W(t) \equiv 0$  välillä  $\Delta$ .*

*Todistus.* Koska  $W(t) = x_1y_2 - x_2y_1$ , niin

$$\begin{aligned} W'(t) &= x_1y_2' + x_1'y_2 - x_2y_1' - x_2'y_1 \\ &= x_1(a_{21}x_2 + a_{22}y_2) + (a_{11}x_1 + a_{12}y_1)y_2 \\ &\quad - x_2(a_{21}x_1 + a_{22}y_1) - (a_{11}x_2 + a_{12}y_2)y_1 \\ &= a_{11}x_1y_2 + a_{22}x_1y_2 - a_{11}x_2y_1 - a_{22}x_2y_1 \\ &= (a_{11} + a_{22})(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= (a_{11} + a_{22})W(t). \end{aligned}$$

Ratkaisemalla näin saatu differentiaaliyhtälö  $W(t)$ :n suhteen saadaan

$$W(t) = W(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t [a_{11}(u) + a_{22}(u)] du \right] \quad (t \in \Delta). \quad (2.9)$$

Tästä seuraa väite. □

**Huomautus.** Lauseesta 2.4 seuraa, että joko  $W(t) \neq 0$  kaikille  $t \in \Delta$  tai  $W(t) = 0$  kaikilla  $t \in \Delta$ . Lausetta 2.3 voidaan siten soveltaa heti, kun tiedetään, että  $W(t)$  on nolasta eroava jollakin  $t$ :n arvolla.

**Lause 2.5.** *Homogeenisen systeemin (2.2) ratkaisut  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  ovat lineaarisesti riippumattomat, jos ja vain jos  $W(t) \neq 0$ .*

*Todistus.* Osoitetaan väite kahdessa osassa.

(a) Oletetaan, että  $W(t_0) = 0$ ; silloin avaruuden  $\mathbb{R}^2$  vektorit  $(x_1(t_0), y_1(t_0))$  ja  $(x_2(t_0), y_2(t_0))$  ovat lineaarisesti riippuvia (ks. lineaarialgebra). Siis on olemassa vakiot  $c_1$  ja  $c_2$  siten, että  $c_1^2 + c_2^2 > 0$  ja

$$\begin{aligned} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) &= 0 \\ c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Merkitään

$$\begin{aligned} x^* &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ y^* &= c_1 y_1 + c_2 y_2. \end{aligned}$$

Lauseen 2.2 nojalla  $\{x^*(t), y^*(t)\}$  on systeemin (2.2) ratkaisu ja yhtälöparin (2.10) perusteella se toteuttaa pisteessä  $t_0$  samat alkuehdot kuin triviaaliratkaisu  $x(t) = y(t) = 0$ . Ratkaisun yksikäsitteisyydestä (Lause 2.1) seuraa näin ollen, että  $x^*(t) = y^*(t) = 0$  kaikilla  $t$ :n arvoilla. Silloin  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  eivät ole lineaarisesti riippumattomia.

(b) Oletetaan kääntäen, että  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  ja  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  eivät ole lineaarisesti riippumattomia. Silloin on olemassa vakiot  $c_1$  ja  $c_2$  siten, että  $c_1^2 + c_2^2 > 0$  ja

$$\begin{aligned} c_1 x_1 + c_2 x_2 &= 0 \\ c_1 y_1 + c_2 y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Jos esimerkiksi  $c_1 \neq 0$ , niin merkitsemällä  $c = -\frac{c_2}{c_1}$  tästä seuraa  $x_1 = cx_2$  ja  $y_1 = cy_2$ . Näin ollen

$$W(t) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = cx_2 y_2 - cx_2 y_2 = 0.$$

□

Lauseiden 2.2 - 2.5 tuloksista seuraa yhteenvetona:

Olko  $\{x_1, y_1\}$  ja  $\{x_2, y_2\}$  lineaarisen homogeenisen systeemin

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(t)x + a_{12}(t)y \\ y' &= a_{21}(t)x + a_{22}(t)y. \end{aligned} \quad (2.11)$$

ratkaisuja ja  $W(t)$  vastaava Wronskin determinantti. Silloin

$$\{c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2\}$$

on systeemin (2.11) yleinen ratkaisu, jos  $W(t) \neq 0$ , so. jos ratkaisut  $\{x_1, y_1\}$  ja  $\{x_2, y_2\}$  ovat lineaarisesti riippumattomat.

Epähomogeenisen systeemin (2.1) yleistä ratkaisua koskeva peruslause on

**Lause 2.6.** *Olkoon  $\{x_p, y_p\}$  jokin systeemin (2.1) yksityisratkaisu ja olkoon  $\{c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2\}$  vastaavan homogeenisen systeemin (2.11) yleinen ratkaisu. Silloin*

$$\{c_1x_1 + c_2x_2 + x_p, c_1y_1 + c_2y_2 + y_p\}$$

on epähomogeenisen systeemin (2.1) yleinen ratkaisu.

**Esimerkki 2.3.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= 3x + 3y + t \\y' &= -x - y + 1.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Vastaavalla homogeenisella systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= 3x + 3y \\y' &= -x - y\end{aligned}$$

on ratkaisut  $\{1, -1\}$  ja  $\{-3e^{2t}, e^{2t}\}$ . Epähomogeenisella systeemillä (2.12) on yksityisratkaisu

$$\left\{-\frac{1}{4}(t^2 + 9t + 3), \frac{1}{4}(t^2 + 7t)\right\}.$$

Systeemin (2.12) yleinen ratkaisu on siis

$$\{x(t), y(t)\} = \left\{c_1 - 3c_2e^{2t} - \frac{1}{4}(t^2 + 9t + 3), -c_1 + c_2e^{2t} + \frac{1}{4}(t^2 + 7t)\right\}.$$

### 3 Vakiokertoimiset systeemit

Tarkastellaan vakiokertoimista homogeenista yhtälöryhmää

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y \\y' &= a_{21}x + a_{22}y,\end{aligned}\tag{3.1}$$

missä  $x$  ja  $y$  ovat reaalimuuttujan  $t$  derivoituvia funktioita. Tässä luvussa esitämme ns. determinanttimenetelmän, jonka avulla löydetään systeemin (3.1) yleinen ratkaisu.

Tavallisten lineaaristen homogeenisten vakiokertoimisten differentiaaliyhtälöiden teoria huomioonottaen on luonnollista etsiä ryhmälle (3.1) muotoa  $\{\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t}\}$  olevia ratkaisuja, missä  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\lambda$  ovat vakioita.

Sijoittamalla  $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$  ja  $y(t) = \beta e^{\lambda t}$  systeemiin (3.1) saadaan

$$\begin{aligned}x' &= \alpha \lambda e^{\lambda t} = a_{11}\alpha e^{\lambda t} + a_{12}\beta e^{\lambda t} \\y' &= \beta \lambda e^{\lambda t} = a_{21}\alpha e^{\lambda t} + a_{22}\beta e^{\lambda t}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Jakamalla luvulla  $e^{\lambda t}$  saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta &= 0 \\a_{21}\alpha - (a_{22} - \lambda)\beta &= 0,\end{aligned}\tag{3.3}$$

jolle haluaisimme löytää ei-triviaaleja ratkaisuja  $\{\alpha, \beta\}$ . Tällöin ratkaisuja löytyy (ks. lineaarialgebra) täsmälleen silloin, kun yhtälöryhmän determinantti

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12}\tag{3.4}$$

häviää. Ehdosta  $\mathcal{D} = 0$  seuraa toisen asteen yhtälö

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.\tag{3.5}$$

Tämä on systeemin (3.1) *karakteristinen yhtälö*. Tarkastelemme nyt erikseen tapauksia, joissa yhtälön (3.5) reaalisten juurien lukumäärä on 2, 1 tai 0.

#### 3.1 2 reaalista erisuuruista juurta $\lambda_1$ ja $\lambda_2$

Olkoon  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  jokin ryhmän (3.3) ei-triviaali ratkaisu arvolla  $\lambda = \lambda_1$  ja olkoon  $\{\alpha_2, \beta_2\}$  jokin tällainen ratkaisu arvolla  $\lambda = \lambda_2$ . Silloin ryhmällä (3.1) on ei-triviaalit ratkaisuparit

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \quad \text{ja} \quad \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}.\tag{3.6}$$

Lineaarisen riippumattomuuden tutkimiseksi tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \\ c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \end{cases}$$

josta saadaan edelleen

$$\begin{aligned}c_1\alpha_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} &= -c_2\alpha_2 \\c_1\beta_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} &= -c_2\beta_2\end{aligned}$$

Koska luvut  $-c_2\alpha_2$  ja  $-c_2\beta_2$  ovat vakioita, täytyy olla

$$\begin{aligned}c_1\alpha_1 &= 0 = c_2\alpha_2 \\c_1\beta_1 &= 0 = c_2\beta_2\end{aligned}$$

Koska  $\alpha_1^2 + \beta_1^2 > 0$  ja  $\alpha_2^2 + \beta_2^2 > 0$ , niin tästä seuraa  $c_1 = c_2 = 0$ . Siis ratkaisut (3.6) ovat lineaarisesti riippumattomat.

Olemme todistaneet seuraavan lauseen:

**Lause 3.1.** *Jos yhtälöllä (3.5) on kaksi eri juurta, niin yhtälöryhmällä (3.1) on lineaarisesti riippumattomat ratkaisut*

$$\{\alpha_1e^{\lambda_1t}, \beta_1e^{\lambda_1t}\} \quad \text{ja} \quad \{\alpha_2e^{\lambda_2t}, \beta_2e^{\lambda_2t}\},$$

missä  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  ja  $\{\alpha_2, \beta_2\}$  ovat yhtälöparin (3.3) ei-triviaaleja ratkaisuja vastaavasti arvoilla  $\lambda = \lambda_1$  ja  $\lambda = \lambda_2$ .

**Esimerkki 3.1.** Tarkastellaan Esimerkin 2.1 systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= -x + 6y \\y' &= x - 2y.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Tässä  $a_{11} = -1$ ,  $a_{12} = 6$ ,  $a_{21} = 1$  ja  $a_{22} = -2$ . Kirjoittamalla yhtälöt (3.4)–(3.5) saadaan

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 6 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda)(2 + \lambda) - 6 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0,$$

josta saadaan ratkaisut  $\lambda_1 = -4$  ja  $\lambda_2 = 1$ .

Arvolla  $\lambda_1 = -4$  yhtälöryhmä (3.3) on

$$\begin{aligned}3\alpha_1 + 6\beta_1 &= 0 \\ \alpha_1 + 2\beta_1 &= 0\end{aligned}$$

Molemmat yhtälöt toteutuvat, kun  $\alpha_1 = -2\beta_1$ , joten esimerkiksi  $\{-2, 1\}$  on (eräs) ratkaisu. Ensimmäinen ratkaisupari on siis  $\{-2e^{-4t}, e^{-4t}\}$ .

Arvolla  $\lambda_2 = 1$  saadaan vastaavasti yhtälöt

$$\begin{aligned}-2\alpha_2 + 6\beta_2 &= 0 \\ \alpha_2 - 3\beta_2 &= 0\end{aligned}$$

joilla on (esimerkiksi) ratkaisu  $\alpha_2 = 3, \beta_2 = 1$ . Siten  $\{3e^t, e^t\}$  on ensimmäisen ratkaisuparin kanssa lineaarisesti riippumaton ratkaisupari.

Lauseen 2.3 nojalla yleinen ratkaisu on

$$\{x(t), y(t)\} = \{-2c_1e^{-4t} + 3c_2e^t, c_1e^{-4t} + c_2e^t\}.$$

### 3.2 Reaalinen kaksoisjuuri $\lambda_1 = \lambda_2$

Jos  $\lambda_1 = \lambda_2$ , niin ensimmäinen ratkaisupari

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$$

löydetään kuten Lauseessa (3.1). Toinen Lauseen 3.1 muotoa oleva ratkaisupari

$$\{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$$

on ensimmäisen parin kanssa lineaarisesti riippumaton vain jos Wronskin determinantti

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} & \beta_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} & \beta_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

on nolasta eroava (Lause 2.5). Näin on laita täsmälleen silloin, kun yhtälöparin

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta &= 0 \\ a_{21}\alpha - (a_{22} - \lambda)\beta &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ratkaisuvektorit  $(\alpha_1, \beta_1)$  ja  $(\alpha_2, \beta_2)$  ovat lineaarisesti riippumattomia. Tällaiset lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat olemassa vain jos yhtälöpari toteutuu identtisesti, so. jos  $a_{11} = a_{22} = \lambda_1$  ja  $a_{12} = a_{21} = 0$ . Silloin systeemin (3.1) yhtälöt supistuvat muotoon

$$\begin{aligned} x' &= \lambda_1 x \\ y' &= \lambda_1 y \end{aligned}$$

ja niillä on lineaarisesti riippumattomat ratkaisuparit

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, 0\} \quad \text{ja} \quad \{0, \beta_2 e^{\lambda_1 t}\}.$$

Tässä tapauksessa systeemin (3.1) yhtälöt ovat siis toisistaan riippumattomia, koska kumpikin sisältää vain yhden tuntemattoman funktion.

Jos yhtälöpari (3.8) ei toteudu identtisesti, niin voidaan näyttää, että systeemillä (3.1) on tapauksessa  $\lambda_1 = \lambda_2$  muotoa

$$\{x(t), y(t)\} = \{(\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda_1 t}, (\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda_1 t}\} \tag{3.9}$$

oleva ensimmäisen ratkaisuparin  $\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$  kanssa lineaarisesti riippumaton ratkaisupari. Vakiot  $\alpha_2$  ja  $\beta_2$  määrätään sijoittamalla (3.9) yhtälöihin (3.1).

**Esimerkki 3.2.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= -4x - y \\ y' &= x - 2y \end{aligned} \tag{3.10}$$

Yhtälöt (3.4) – (3.5) ovat

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (4 + \lambda)(2 + \lambda) + 1 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$$



Ratkaisuna on kaksoisjuuri  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ . Yhtälöistä (3.3) saadaan arvolla  $\lambda = -3$  yhtälöpari

$$\begin{aligned} -\alpha_1 - \beta_1 &= 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 &= 0 \end{aligned}$$

jonka ei-triviaali ratkaisu  $\alpha_1 = 1, \beta_1 = -1$  antaa ratkaisuparin  $\{e^{-3t}, -e^{-3t}\}$ . Muotoa (3.9) olevan ratkaisun löytämiseksi sijoitetaan

$$\{x(t), y(t)\} = \{(\alpha_2 + t)e^{-3t}, (\beta_2 - t)e^{-3t}\}$$

yhtälöihin (3.10); saadaan

$$\begin{aligned} e^{-3t}(1 - 3\alpha_2 - 3t) &= -4(\alpha_2 + t)e^{-3t} - (\beta_2 - t)e^{-3t} \\ e^{-3t}(-1 - 3\beta_2 + 3t) &= (\alpha_2 + t)e^{-3t} - 2(\beta_2 - t)e^{-3t}. \end{aligned}$$

Jakamalla termillä  $e^{-3t}$  saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} 1 - 3\alpha_2 &= -4\alpha_2 - \beta_2 \\ -1 - \beta_2 &= \alpha_2 - 2\beta_2 \end{aligned}$$

joka edelleen pelkistyy yhtälöpariksi

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 + 1 &= 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

jolla on ei-triviaali ratkaisu  $\alpha_2 = 1, \beta_2 = -2$ . Tämä antaa systeemille (3.10) toisen ratkaisuparin

$$\{(1+t)e^{-3t}, (-2-t)e^{-3t}\},$$

joka on ensimmäisen parin  $\{e^{-3t}, -e^{-3t}\}$  kanssa lineaarisesti riippumaton, sillä Wronskin determinantti

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \\ (1+t)e^{-3t} & (-2-t)e^{-3t} \end{vmatrix} = [(-2-t) + (1+t)]e^{-6t} = -e^{-6t} \neq 0.$$

**Lause 3.2.** Jos yhtälöllä (3.5) on reaalin kaksoisjuuri  $\lambda$  ja jos yhtälöpari (3.8) ei toteudu identtisesti, niin yhtälöryhmällä (3.1) on lineaarisesti riippumattomat ratkaisut

$$\begin{aligned} \{x_1(t), y_1(t)\} &= \{\alpha_1 e^{\lambda t}, \beta_1 e^{\lambda t}\} \\ \{x_2(t), y_2(t)\} &= \{(\alpha_2 + \alpha_1 t)e^{\lambda t}, (\beta_2 + \beta_1 t)e^{\lambda t}\}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

missä  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  on yhtälöparin (3.3) jokin ei-triviaali ratkaisu ja vakiot  $\alpha_2$  ja  $\beta_2$  löydetään sijoittamalla jälkimmäinen yhtälöistä (3.11) yhtälöihin (3.1).

*Todistus.* Sijoitetaan  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  yhtälöihin (3.1) ja jaetaan puolittain  $e^{\lambda t}$ :llä; saadaan

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \lambda(\alpha_2 + \alpha_1 t) &= a_{11}(\alpha_2 + \alpha_1 t) + a_{12}(\beta_2 + \beta_1 t) \\ \beta_1 + \lambda(\beta_2 + \beta_1 t) &= a_{21}(\alpha_2 + \alpha_1 t) + a_{22}(\beta_2 + \beta_1 t). \end{aligned}$$

Koska  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  on yhtälöryhmän (3.3) ratkaisu, niin ensimmäisen asteen termit kumoutuvat ja jäljelle jää yhtälöpari

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})\alpha_2 - a_{12}\beta_2 &= -\alpha_1 \\ -a_{21}\alpha_2 - (\lambda - a_{22})\beta_2 &= -\beta_1\end{aligned}\tag{3.12}$$

Koska  $\lambda$  on (karakteristisen) yhtälön (3.5) kaksoisjuuri, niin

$$2\lambda_1 = a_{11} + a_{12},$$

josta edelleen

$$\lambda - a_{11} = -(\lambda - a_{22}).$$

Näin ollen joko  $a_{12}$  tai  $a_{21}$  on nollasta eroava, sillä ehdosta  $a_{12} = a_{21} = 0$  ja  $\mathcal{D} = 0$  seuraisi myös  $\lambda - a_{11} = \lambda - a_{22} = 0$ , jolloin vastoin oletusta yhtälöpari (3.8) toteutuisi identtisesti.

Olkoon esimerkiksi  $a_{12} \neq 0$ ; silloin ensimmäinen yhtälöistä (3.12) toteutuu esimerkiksi arvoilla

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \frac{1}{a_{12}}[\lambda - a_{12} + \alpha_1].$$

Samat arvot toteuttavat myös jälkimmäisen yhtälön, sillä

$$\begin{aligned}& -a_{21} + (\lambda - a_{22})\frac{1}{a_{12}}[\lambda - a_{12} + \alpha_1] \\ &= \frac{1}{a_{12}}\{[(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{21}a_{12}] + (\lambda - a_{22})\alpha_1\} \\ &= \frac{\alpha_1}{a_{12}}(\lambda - a_{22}) = -\frac{\alpha_1}{a_{12}}(\lambda - a_{11}) \\ &= -\beta_1.\end{aligned}$$

Viimeinen yhtälö seuraa siitä, että  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  on yhtälöryhmän (3.3) ratkaisu. Samalla tavoin käsitellään myös tapaus  $a_{21} \neq 0$ .

Osoitamme lopuksi, että ratkaisut (3.11) ovat lineaarisesti riippumattomat. Tätä varten muodostetaan Wronskin determinantti

$$\begin{aligned}W(t) &= \begin{vmatrix} x_1(t) & y_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = [\alpha_1(\beta_2 + \beta_1 t) - \beta_1(\alpha_2 + \alpha_1 t)]e^{2\lambda t} \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)e^{2\lambda t}.\end{aligned}$$

Tapauksessa  $a_{12} \neq 0$  saadaan käyttämällä yhtälöitä (3.12) ja (3.3)

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 &= \alpha \left\{ \frac{1}{a_{12}}[\alpha_1 + (\lambda - a_{11})\alpha_2] \right\} - \beta_1\alpha_2 \\ &= \left[ \frac{1}{a_{12}}(\lambda - a_{11})\alpha_1 \right] \alpha_2 - \beta_1\alpha_2 + \frac{1}{a_{12}}\alpha_1^2 \\ &= \frac{1}{a_{12}}\alpha_1^2.\end{aligned}$$

Edelleen  $\alpha_1 \neq 0$ , sillä muuten systeemin (3.3) ensimmäisestä yhtälöstä seuraisi  $\beta_1 = 0$ , eikä  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  olisi ei-triviaali ratkaisu. Siis

$$W(t) = \frac{1}{a_{12}} \alpha_1^2 e^{2\lambda t} \neq 0$$

ja ratkaisut (3.11) ovat lineaarisesti riippumattomat (Lause 2.5). Samalla tavoin käsitellään tapaus  $a_{21} \neq 0$ .  $\square$

### 3.3 Ei reaalisia juuria

Sanomme, että pari  $\{u, v\}$  kompleksiarvoisia funktioita

$$u = u_1 + iu_2 \quad \text{ja} \quad v = v_1 + iv_2$$

on systeemin (3.1) *kompleksinen ratkaisu*, jos reaali- ja imaginaariosien muodostamat parit  $\{u_1, v_1\}$  ja  $\{u_2, v_2\}$  ovat systeemin (3.1) ratkaisuja.

**Lemma 3.1.** *Jos karakteristisen yhtälön (3.5) juuret ovat kompleksisia liittolukuja*

$$\lambda_1 = a + ib \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = a - ib,$$

*ja jos  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  ja  $\{\alpha_2, \beta_2\}$  ovat yhtälöryhmän (3.3) kompleksisia ratkaisuja vastaavasti arvoilla  $\lambda = \lambda_1$  ja  $\lambda = \lambda_2$ , niin parit*

$$\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\} \quad \text{ja} \quad \{\alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \beta_2 e^{\lambda_2 t}\}$$

*ovat systeemin (3.1) kompleksisia ratkaisuja.*

*Todistus.* Jos  $\alpha_1 = A_1 + iA_2$  ja  $\beta_1 = B_1 + iB_2$ , niin

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} = (A_1 + iA_2) e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

$$\beta_1 e^{\lambda_1 t} = (B_1 + iB_2) e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

Näin ollen  $\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \beta_1 e^{\lambda_1 t}\}$  on systeemin (3.1) kompleksinen ratkaisu, jos reaali- ja imaginaariosien muodostamat parit

$$\begin{aligned} \{x_1(t), y_1(t)\} &= \{e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt), e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt)\} \\ \{x_2(t), y_2(t)\} &= \{e^{at}(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt), e^{at}(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ovat systeemin (3.1) ratkaisuja. Tämä todetaan sijoittamalla parit (3.13) yhtälöihin (3.1).

Esimerkiksi pari  $\{x_1(t), y_1(t)\}$  toteuttaa ensimmäisen yhtälöistä (3.1), sillä systeemin (3.3) ensimmäisen yhtälön nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda_1 - a_{11}\alpha_1 - a_{12}\beta_1) \\ &= (a + ib)(A_1 + iA_2) - a_{11}(A_1 + iA_2) - a_{11}(B_1 - iB_2) \\ &= [aA_1 - bA_2 - a_{11}A_1 - a_{12}B_1] + i[bA_1 + aA_2 - a_{11}A_2 - a_{12}B_2], \end{aligned}$$

josta seuraa

$$\begin{cases} aA_1 - bA_2 - a_{11}A_1 - a_{12}B_1 = 0 \\ bA_1 + aA_2 - a_{11}A_2 - a_{12}B_2 = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

ja lopuksi

$$\begin{aligned} x'(t) - a_{11}x_1(t) - a_{12}y_1(t) &= e^{at} \{ aA_1 \cos bt - aA_2 \sin bt - bA_1 \sin bt - bA_2 \cos bt \\ &\quad - a_{11}A_1 \cos bt + a_{11}A_2 \sin bt - a_{12}B_1 \cos bt + a_{12}B_2 \sin bt \} \\ &= e^{at} \cos bt [aA_1 - bA_2 - a_{11}A_1 - a_{12}B_1] \\ &\quad + e^{at} \sin bt [-aA_2 - bA_1 + a_{11}A_2 + a_{12}B_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

yhtälöiden (3.14) perusteella. Pari  $\{x_2(t), y_2(t)\}$  todetaan vastaavasti.  $\square$

**Lause 3.3.** *Jos yhtälöllä (3.5) on kompleksiset juuret*

$$\lambda_1 = a + ib \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = a - ib,$$

missä  $b \neq 0$ , niin parit (3.13) ovat yhtälöryhmän (3.1) lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja aina, kun  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  on yhtälöryhmän (3.3) ei-triviaali kompleksinen ratkaisu arvolla  $\lambda = \lambda_1$ .

*Todistus.* Lemman 3.1 todistuksessa todettiin, että parit (3.13) ovat systeemin (3.1) ratkaisuja. Niiden Wronskin determinantti on

$$\begin{aligned} W(t) &= e^{2at} [(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt)(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt) \\ &\quad - (A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt)] \\ &= e^{2at} [A_1 B_1 (\cos^2 bt + \sin^2 bt) - A_2 B_1 (\cos^2 bt + \sin^2 bt)] \\ &= e^{2at} (A_1 B_2 - A_2 B_1) \end{aligned}$$

Lausekkeen  $(A_1 B_2 - A_2 B_1)$  tutkimista varten osoitetaan aluksi, että

$$\alpha_1 = A_1 + iA_2 \neq 0.$$

Koska  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  on systeemin (3.3) ratkaisu arvolla  $\lambda = \lambda_1$ , niin ehdosta  $\{\alpha_1 = 0\}$  seuraisi  $(a_{22} - \lambda)\beta_1 = 0$  ja edelleen  $\beta_1 = 0$ , sillä luvun  $(a_{22} - \lambda)$  imaginaariosa on  $-b \neq 0$ . Tämä on vastoin oletusta  $\{\alpha_1, \beta_1\} \neq \{0, 0\}$ . Siis  $\alpha_1 \neq 0$ .

Systeemin (3.3) ensimmäisestä yhtälöstä seuraa nyt

$$a_{11} - \lambda_1 = -a_{12} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = -a_{12} \frac{B_1 + iB_2}{A_1 + iA_2} = -a_{12} \frac{(A_1 - iA_2)(B_1 + iB_2)}{A_1^2 + A_2^2}.$$

Merkitsemällä tämän imaginaariosat yhtäsuuriksi saadaan

$$-b = -a_{12} \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1^2 + A_2^2}.$$

Koska  $b \neq 0$ , myös  $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$  ja siten myös

$$W(t) = e^{2at}(A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0.$$

□

**Esimerkki 3.3.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= 4x + y \\y' &= -8x + 8y.\end{aligned}$$

Nyt

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -8 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(8 - \lambda) + 8 = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0.$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat  $\lambda_1 = 6 + 2i$  ja  $\lambda_2 = 6 - 2i$ , joten Lauseen 3.3 antamat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}\{x_1(t), y_1(t)\} &= \{e^{6t}(A_1 \cos 2t - A_2 \sin 2t), e^{6t}(B_1 \cos 2t - B_2 \sin 2t)\} \\ \{x_2(t), y_2(t)\} &= \{e^{6t}(A_1 \sin 2t + A_2 \cos 2t), e^{6t}(B_1 \sin 2t + B_2 \cos 2t)\}\end{aligned}$$

Tässä vakiot  $A_1, A_2, B_1$  ja  $B_2$  on valittava siten, että

$$\{\alpha_1, \beta_1\} = \{A_1 + iA_2, B_1 + iB_2\}$$

on yhtälöryhmän (3.3) ei-triviaalinen ratkaisu arvolla  $\lambda = 6 + 2i$ . Silloin

$$\begin{cases} (4 - 6 - 2i)\alpha + \beta = 0 \\ -8\alpha + (8 - 6 - 2i)\beta = 0 \end{cases}$$

eli

$$\begin{cases} -2(1 + i)\alpha + \beta = 0 \\ -4\alpha + (1 - i)\beta = 0. \end{cases}$$

Yhtälöryhmä toteutuu esimerkiksi arvoilla  $\alpha = 1 + \frac{1}{2}i, \beta = 1 + 3i$ . Vastaavat lineaarisesti riippumattomat ratkaisut ovat

$$\begin{aligned}\{x_1(t), y_1(t)\} &= \left\{e^{6t}\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right), e^{6t}(\cos 2t - 3\sin 2t)\right\} \\ \{x_2(t), y_2(t)\} &= \left\{e^{6t}\left(\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\right), e^{6t}(\sin 2t + 3\cos 2t)\right\}\end{aligned}$$

Näiden ratkaisuparien lineaarikombinaatio on systeemin yleinen ratkaisu.

## 4 Lineaaristen systeemien stabiilisuus

Tarkastellaan kahden ensimmäisen kertaluvun yhtälön muodostamaa autonomista yhtälöryhmää

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Piste  $(x_0, y_0)$  on systeemin (4.1) *kriittinen piste*, jos

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0.$$

Jokainen kriittinen piste  $(x_0, y_0)$  antaa systeemille (4.1) vakioratkaisun  $\{x(t), y(t)\} = \{x_0, y_0\}$ , sillä vakion derivaatta on nolla:

$$\begin{aligned}x' &= 0 = f(x_0, y_0) \\ y' &= 0 = g(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Kriittisessä pisteessä  $(x_0, y_0)$  systeemi (4.1) on tasapainossa: sen tila ei muutu ajan funktiona.

Fysiikan sovelluksissa kriittinen piste on usein potentiaalienergian minimikohta. Esimerkkinä tarkastelemme Esimerkin 1.2 heiluria, jonka differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

palautuu sijoituksella  $\mu = \frac{d\theta}{dt}$  systeemiksi

$$\begin{aligned}\theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \sin \theta.\end{aligned}$$

Selvästi potentiaalienergia on pienimmillään, kun  $\theta = 0$ , ja systeemi on tasapainossa pisteessä  $(0, 0)$ . Muitakin kriittisiä pisteitä löytyy:

**Esimerkki 4.1.** Äskeisellä systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -\omega^2 \sin x\end{aligned}$$

on äärettömän monta kriittistä pistettä, nimittäin kaikki pisteet  $(k\pi, 0)$ , missä  $k$  on kokonaisluku.

**Esimerkki 4.2.** Systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= -x^2 + y \\ y' &= x - y^2\end{aligned}$$

on kaksi kriittistä pistettä, nimittäin pisteet  $(0, 0)$  ja  $(1, 1)$ .

Alkuarvotekävän ratkaisu  $\phi(t)$  on stabiili, jos pieni muutos alkuarvossa  $\phi(t_0)$  ei aiheuta suurta muutosta ratkaisuun  $t \geq t_0$ . Ratkaisu  $\phi(t)$  on asympotoottisesti stabiili, jos se on stabiili ja kaikki "lähellä" olevat ratkaisut ovat asympotoottisesti yhtäsuuret, so. lähestyvät toisiaan, kun  $t \rightarrow +\infty$ . Ratkaisu  $\phi(t)$  on epästabiili, jos se ei ole stabiili.

Esimerkissä 1.5 tarkasteltu systeemi

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x\end{aligned}$$

on stabiili. Systeemin radat ovat nimittäin origokeskisiä ympyröitä, joille säde on

$$\sqrt{x(0)^2 + y(0)^2}.$$

Pieni muutos alkuarvoissa  $x(0), y(0)$  muuttaa radan sädettä vain vähän, ja myös uusi ratkaisu on lähellä alkuperäistä ratkaisua kaikilla arvoilla  $t \geq 0$

Stabiilisuuden määritelmät voidaan täsmentää käyttämällä tason pisteiden  $(x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  euklidista etäisyyttä

$$d[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Olkoon  $\{x(t, x^*), y(t, y^*)\}$  se systeemin 4.1 (yksikäsitteisesti määrätty) ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$\begin{aligned}x(0) &= x^* \\y(0) &= y^*\end{aligned}$$

Sanomme, että systeemin (4.1) vakioratkaisu (so. kriittinen piste)  $(x_0, y_0)$  on

- (i) *stabiili*, jos jokaista  $\varepsilon > 0$  kohden on olemassa  $\delta > 0$  siten, että kaikille  $t \geq 0$

$$d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0)] \leq \varepsilon \tag{4.2}$$

aina kun  $d[(x^*, y^*), (x_0, y_0)] \leq \delta$ .

- (ii) *asympotoottisesti stabiili*, jos  $(x_0, y_0)$  on stabiili ja on olemassa  $\delta > 0$  siten, että

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (x_0, y_0)] = 0 \tag{4.3}$$

aina kun  $d[(x^*, y^*), (x_0, y_0)] \leq \delta$ .

- (iii) *epästabiili*, jos  $(x_0, y_0)$  ei ole stabiili.

**Huomautus.** Asympotoottisen stabiilisuuden määritelmässä vaaditaan, että piste  $(x_0, y_0)$  on stabiili. Tämä vaatimus on oleellinen, sillä ehto (4.2) ei seuraa ehdosta (4.3).

**Esimerkki 4.3.** Tarkastellaan jälleen harmonista värähtelijää

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x\end{aligned}$$

Selvästi  $(0, 0)$  on vakioratkaisu. Alkuehtoja  $x(0) = x^*$ ,  $y(0) = y^*$  vastaava ratkaisupari on

$$(x(t, x^*), y(t, y^*)) = (x^* \cos t + y^* \sin t, -x^* \sin t + y^* \cos t),$$

joten

$$\begin{aligned}d\left[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0, 0)\right] &= [(x^* \cos t + y^* \sin t)^2 + (-x^* \sin t + y^* \cos t)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= ((x^*)^2 + (y^*)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= d[(x^*, y^*), (0, 0)].\end{aligned}$$

Stabiilisuusehto (4.2) on siis voimassa, kun valitaan  $\delta = \varepsilon$ , ja  $(0, 0)$  on stabiili.

**Esimerkki 4.4.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -2x - 3y.\end{aligned}$$

Jälleen  $(0, 0)$  on kriittinen piste. Alkuehdot  $x(0) = x^*$ ,  $y(0) = y^*$  toteuttava ratkaisupari on

$$(x(t, x^*), y(t, y^*)) = ((2x^* + y^*)e^{-t} - (x^* + y^*)e^{-2t}, -(2x^* + y^*)e^{-t} + 2(x^* + y^*)e^{-2t}).$$

Selvästi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t, y^*) = 0$$

riippumatta alkuarvoista  $x^*$ ,  $y^*$  ja lisäksi  $(0, 0)$  on stabiili. Näin ollen  $(0, 0)$  on asymptoottisesti stabiili. Ehto (4.3) on tässä tapauksessa voimassa kaikille  $\delta > 0$ ; tämä ilmaistaan sanomalla, että  $(0, 0)$  on *globaalisesti asymptoottisesti stabiili*.

**Esimerkki 4.5.** Systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -2x + 3y.\end{aligned}$$

on kriittinen piste  $(0, 0)$ . Se on kuitenkin epästabiili, sillä ratkaisuparin

$$(x(t, x^*), y(t, y^*)) = ((2x^* - y^*)e^t + (x^* - y^*)e^{2t}, (2x^* - y^*)e^t + 2(x^* - y^*)e^{2t})$$

etäisyys origosta kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$  aina jos  $(x^*, y^*) \neq (0, 0)$ .

Valitaan esimerkiksi  $\varepsilon = 1$  ja olkoon  $\delta > 0$  mielivaltainen. Asettamalla  $(x^*, y^*) = (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$  pätee  $d[(x^*, y^*), (0, 0)] = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$ , toisin sanoen etäisyys origosta on pienempää kuin  $\delta$ , mutta

$$d\left[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0, 0)\right] \geq |x(t, x^*)| \geq \frac{\delta}{2}e^t > 1 = \varepsilon,$$

kun  $e^t > \frac{2}{\delta}$ .



Esimerkeissä 4.3 – 4.5 systeemit olivat lineaarisia. Epälineaaristen systeemien stabiilisuuden tutkiminen on hankalampaa, sillä yleensä ratkaisuja ei tunneta eksplisiittisesti. Systeemejä voidaan kuitenkin yrittää approksimoida lineaarisilla systeemeillä, jotka ovat muotoa

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y \\y' &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\tag{4.4}$$

missä kertoimet  $a_{ij}$  ovat reaalisia vakioita. Vastaava karakteristinen yhtälö on

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.\tag{4.5}$$

Osoittautuu, että systeemin (4.4) ratojen tyyppi voidaan päätellä yhtälön (4.5) juurista  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ . Seuraavassa tutkimme erikseen kaikki ne tapaukset, joissa  $(0, 0)$  on systeemin (4.4) ainoa kriittinen piste. Tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että yhtälön (4.5) juuret ovat nolasta eroavia.

#### 4.1 Tapaus 1: $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat reaaliset, erisuuret ja samanmerkkiset

Voidaan olettaa  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Lauseen 3.1 nojalla jokainen ratkaisupari on muotoa

$$(x(t), y(t)) = (c_1\alpha_1e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2e^{\lambda_2 t}, c_1\beta_1e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2e^{\lambda_2 t}),\tag{4.6}$$

missä  $\{\alpha_1, \beta_1\}$  ja  $\{\alpha_2, \beta_2\}$  ovat yhtälöparin (3.3) ei-triviaaleja ratkaisuja. Vastaavasti arvoilla  $\lambda = \lambda_1$  ja  $\lambda = \lambda_2$   $c_1, c_2$  ovat vakioita. Jaetaan tapauksen tarkastelu kahteen osaan juurien etumerkien mukaan.

##### Tapaus 1(a): $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Selvästi kaikki ratkaisut lähestyvät origoa, kun  $t \rightarrow \infty$ . Ratojen tutkimiseksi tarkastellaan esim. tapausta  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$ . Silloin

$$\beta_2 x = \alpha_2 y,$$

joten rata on suora viiva (puolisuora). Vastaavasti tapauksen  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  rata on suora

$$\beta_1 x = \alpha_1 y.$$

Muiden ratojentutkimiseksi oletetaan, että  $c_1 \neq 0$  ja  $c_2 \neq 0$ . Silloin

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1e^{\lambda_1 t} + c_2\beta_2e^{\lambda_2 t}}{c_1\alpha_1e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha_2e^{\lambda_2 t}},\tag{4.7}$$

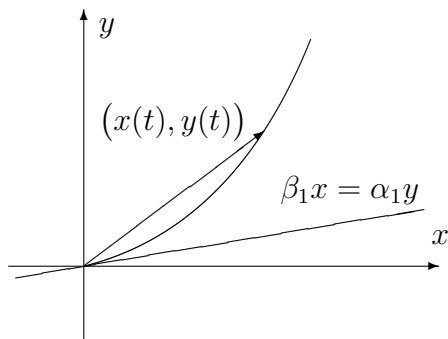
josta termillä  $e^{\lambda_1 t}$  jakamalla saadaan

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}.$$

Antamalla nyt  $t \rightarrow \infty$  saadaan

$$\frac{y(t)}{x(t)} \rightarrow \frac{c_1\beta_1}{c_1\alpha_1} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Origoa lähestyttäessä ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran  $\beta_1x = \alpha_1y$  suuntaa.



Samoin tavoin nähdään, että annettaessa  $t \rightarrow -\infty$  ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran  $\beta_2x = \alpha_2y$  suuntaa. On selvää, että vakioratkaisu  $(0, 0)$  on asymptoottisesti stabiili. Sanomme, että origo on *stabiili risteys* (engl. stable node).

### Tapaus 1(b): $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

Vakioratkaisua lukuunottamatta jokaisen ratapisteen  $(x(t), y(t))$  etäisyys origosta kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$ . Siis  $(0, 0)$  on epästabiili. Radat ovat muuten samanlaiset kuin tapauksessa 1(a) mutta vastakkaisuuntaiset. Sanomme, että origo on *epästabiiliristeys* (engl. unstable node).

Kun  $t \rightarrow -\infty$ , radat lähestyvät origoa ja ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran  $\beta_2x = \alpha_2y$  suuntaa. Annettaessa  $t \rightarrow +\infty$ , ratapisteen suunta lähestyy vastaavasti suoran  $\beta_1x = \alpha_1y$  suuntaa.

## 4.2 Tapaus 2: $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ ovat reaaliset ja vastakkaismerkkiset

Voidaan olettaa  $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ . Yleinen ratkaisu on edelleen muotoa (4.6). Tapauksessa  $c_1 = 0, c_2 \neq 0$  pätee  $\beta_2x = \alpha_2y$  ja  $(x(t), y(t))$  lähestyy origoa kun  $t \rightarrow \infty$ . Tapauksessa  $c_1 \neq 0, c_2 = 0$  pätee  $\beta_1x = \alpha_1y$ , ja  $(x(t), y(t))$  liikkuu tällä suoralla origosta pois päin kun  $t \rightarrow \infty$ , mutta lähestyy origoa kun  $t \rightarrow -\infty$ .

Yleinen tapaus, jossa  $c_1 \neq 0$  ja  $c_2 \neq 0$ , on monimutkaisempi. Kirjoittamalla osamäärä (4.7) muodossa

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{c_1\beta_1 + c_2\beta_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} = \frac{c_1\beta_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\beta_2}{c_1\alpha_1e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + c_2\alpha_2}$$

nähdään, että annettaessa  $t \rightarrow \infty$  (vastaavasti  $t \rightarrow -\infty$ ) osamäärä lähestyy arvoa  $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$  (vastaavasti  $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ ). Kummassakin tapauksessa ratapisteen  $(x(t), y(t))$  etäisyys origosta kasvaa rajatta, sillä

$$(\alpha_1, \beta_1) = (0, 0).$$

Radalla on asymptoottinen suora  $\beta_1 x = \alpha_1 y$  (vastaavasti  $\beta_2 x = \alpha_2 y$ ), kun  $t \rightarrow \infty$  (vastaavasti  $t \rightarrow -\infty$ ).

Lauseen 2.1 nojalla vakioratkaisu  $(0, 0)$  on ainoa systeemin (4.4) ratkaisu, jota vastaava rata kulkee origon kautta. Suoralla  $\beta_2 x = \alpha_2 y$  sijaitsevat radat lähestyvät kuitenkin origoa, kun  $t \rightarrow \infty$ ; kaikkien muiden ratojen suhteen origo on "luotaantyöntävä". Ratakuvion perusteella sanomme, että origo on *satulapistee*. Se on selvästi epästabiili.

### 4.3 Tapaus 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (reaalinen kaksoisjuuri)

Käsitlemme erikseen tapaukset  $\lambda < 0$  ja  $\lambda > 0$ .

#### Tapaus 3(a): $\lambda < 0$

Lauseen 3.2 nojalla on kaksi mahdollisuutta sen mukaan toteutuuko yhtälöpari (3.8) identtisesti vai ei. Jos (3.8) toteutuu identtisesti, niin

$$a_1 1 = a_2 2 = \lambda \quad \text{ja} \quad a_{21} = a_{12} = 0.$$

Systeemi (4.4) on silloin

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x \\ y' &= \lambda y \end{aligned}$$

ja ratkaisut ovat muotoa  $(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t})$ . Rata toteuttaa siis yhtälön

$$c_2 x = c_1 y,$$

joten kysymyksessä on origon kautta kulkeva suora. Ehdosta  $\lambda > 0$  seuraa

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t),$$

joten origo on asymptoottisesti stabiili. Sanomme tässä tapauksessa, että origo on *tähdenmuotoinen* stabiili risteys.

Jos (3.8) ei toteudu identtisesti, niin Lauseen 3.2 perusteella yleinen ratkaisu on muotoa

$$(x(t), y(t)) = \left( [c_1 \alpha_1 + c_2 (\alpha_2 + \alpha_1 t)] e^{\lambda t}, [c_1 \beta_1 + c_2 (\beta_2 + \beta_1 t)] e^{\lambda t} \right) \quad (4.8)$$

Silloin

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 \beta_1 + c_2 (\beta_2 + \beta_1 t)}{c_1 \alpha_1 + c_2 (\alpha_2 + \alpha_1 t)} = \frac{(c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2)/t + c_2 \beta_1}{(c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2)/t + c_2 \alpha_1},$$

joten

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}.$$

Lisäksi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$$

ja origo on asymptoottisesti stabiili. Ratapisteen paikkavektorin suunta lähestyy suoran  $\beta_1 x = \alpha_1 y$  suuntaa, kun  $t \rightarrow \pm\infty$ .

### Tapaus 3(b): $\lambda > 0$

Radat ovat samanlaiset kuin tapauksessa 3(a) mutta vastakkaisuuntaiset, sillä pisteen  $(x(t), y(t))$  etäisyys origosta kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$ . Origo on epästabili risteys.

### 4.4 Tapaus 4: $\lambda_1$ ja $\lambda_2$ eivät ole reaalisia

Olkoot  $\lambda_1 = a + ib$  ja  $\lambda_2 = a - ib$  siten, että  $b \neq 0$ . Lauseen 3.3 nojalla yleinen ratkaisu on

$$(x(t), y(t)) = \left( e^{at} [c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)], \right. \\ \left. e^{at} [c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \right), \quad (4.9)$$

missä  $(A_1 + iA_2, B_1 + iB_2)$  on jokin yhtälöryhmän (3.3) ei-triviaali kompleksinen ratkaisu arvolla  $\lambda = \lambda_1$ . Merkitsemällä

$$\begin{aligned} k_1 &= c_1 A_1 + c_2 A_2 \\ k_2 &= -c_1 A_2 + c_2 A_1 \\ k_3 &= c_1 B_1 + c_2 B_2 \\ k_4 &= -c_1 B_2 + c_2 B_1 \end{aligned}$$

voidaan (4.9) kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at} (k_1 \cos bt + k_2 \sin bt) \\ y(t) &= e^{at} (k_3 \cos bt + k_4 \sin bt) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esitetään tason pisteet  $(k_1, -k_2)$  ja  $(k_3, -k_4)$  napakoordinaattimuodossa:

$$\begin{aligned} (k_1, -k_2) &= (A \cos \alpha_1, A \sin \alpha_1) \\ (k_3, -k_4) &= (B \cos \alpha_2, B \sin \alpha_2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

missä  $A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ ,  $B = \sqrt{k_3^2 + k_4^2}$  ja  $\alpha_1, \alpha_2$  sijaitsevat välillä  $[0, 2\pi]$ . Yhtälöistä (4.10) ja (4.11) seuraa

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{at} (\cos \alpha_1 \cos bt - \sin \alpha_1 \sin bt) = Ae^{at} \cos (bt + \alpha_1) \\ y(t) &= Be^{at} (\cos \alpha_2 \cos bt - \sin \alpha_2 \sin bt) = Be^{at} \cos (bt + \alpha_2) \end{aligned} \quad (4.12)$$

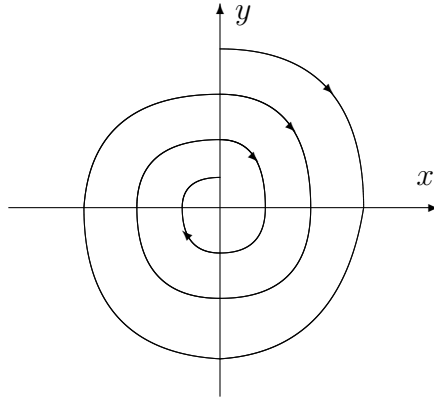
Lauseen 3.3 todistuksessa totesimme, että  $A_1^2 + A_2^2 > 0$ . Koska

$$\begin{aligned} A^2 &= k_1^2 + k_2^2 = (c_1 A_1 + c_2 A_2)^2 + (-c_1 A_2 + c_2 A_1)^2 \\ &= c_1^2 (A_1^2 + A_2^2) + c_2^2 (A_1^2 + A_2^2) = (c_1^2 + c_2^2) (A_1^2 + A_2^2), \end{aligned}$$

niin  $A$  häviää vain jos  $c_1^2 + c_2^2 = 0$ , so. jos kysymyksessä on triviaaliratkaisu  $x(t) = y(t) = 0$ . Samalla tavoin nähdään, että ei-triviaalin ratkaisun tapauksessa myös  $B \neq 0$ , ja alkuarvoitehtävän yksikäsitteisyyden perusteella  $\cos(bt + \alpha_1)$  ja  $\cos(bt + \alpha_2)$  eivät häviä samanaikaisesti millään muuttujan  $t$  arvolla.

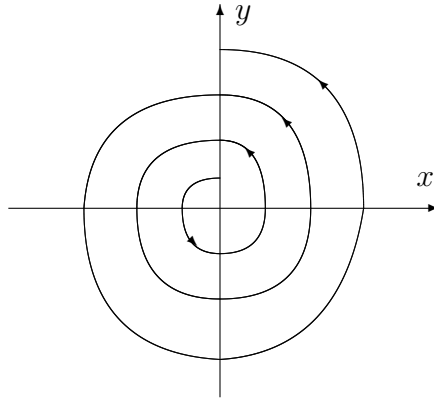
### Tapaus 4(a): $a < 0$

Yhtälöiden (4.12) esittämä käyrä on spiraalimuotoinen, ja ehdon  $a < 0$  nojalla ratapiste  $(x(t), y(t))$  lähestyy origoa, kun  $t \rightarrow \infty$ . Origo on siis asympotoottisesti stabiili; sanomme, että origo on *stabiili spiraalipiste* (stable focus).



### Tapaus 4(b): $a > 0$

Radat ovat samanlaiset kuin tapauksessa 4(a) mutta vastakkaisuuntaiset. Pisteiden  $(x(t), y(t))$  etäisyys origosta kasvaa rajatta, kun  $t \rightarrow \infty$ . Origo on *epästabiili spiraalipiste* (unstable focus).



### Tapaus 4(c): $a = 0$

Yhtälöistä (4.12) seuraa nyt

$$(x(t), y(t)) = (A \cos(bt + \alpha_1), B \cos(bt + \alpha_2)) \quad (4.13)$$

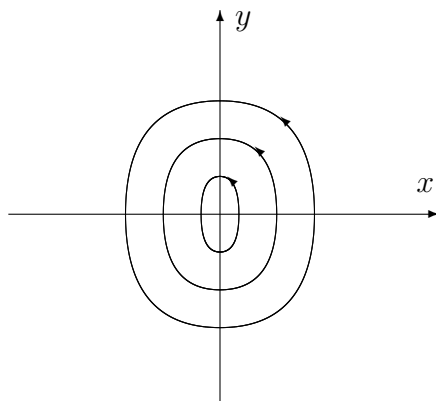
Funktiolla  $x(t)$  ja  $y(t)$  on siten jaksona  $\frac{2\pi}{b}$ , joten pisteestä  $(x_0, y_0)$  hetkellä  $t = t_0$  alkava rata palaa takaisin samaan pisteeseen hetkellä  $t = t_0 + \frac{2\pi}{b}$ . Radat ovat siis suljettuja käyriä ja toteuttavat yhtälön

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \cos^2(bt + \alpha_1) + \cos^2(bt + \alpha_2). \quad (4.14)$$

Erikoistapauksessa  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$  yhtälön (4.14) oikea puoli on

$$\cos^2 bt + \sin^2 bt = 1,$$

jolloin yhtälö esittää ellipsiä, jonka akseleina ovat  $x$ - ja  $y$ -akselit. Myös yleisessä tapauksessa (4.14) esittää ellipsiä, joka kiertää origon ympäri. Origo on näin ollen stabiili, mutta ei asympotoottisesti stabiili, sillä radat kiertävät origoa mutta eivät lähesty sitä. Sanomme tällöin, että origo on *keskus*.



## 4.5 Yhteenveto

Edellä olleiden stabiilisuustarkastelujen tulokset voidaan koota yhteen seuraavasti.

**Lause 4.1.** *Olkoot  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  vakiokertoimisen systeemin*

$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$

*karakteristisen yhtälön (4.5) juuret. Oletetaan, että  $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ , jolloin origo on ainoa kriittinen piste. Silloin*

- (a) *origo on stabiili, jos  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  ovat puhtaasti imaginaarisia*
- (b) *origo on asympotoottisesti stabiili, jos  $\text{Re } \lambda_1 < 0$  ja  $\text{Re } \lambda_2 < 0$*
- (c) *origo on epästabiili kaikissa muissa tapauksissa.*

Ratojen luonne origon lähellä käy ilmi seuraavasta taulukosta.

Karakteristisen yhtälön juuret $\lambda_1$ ja $\lambda_2$	Kriittinen piste
reaaliset, erisuuret, negatiiviset	stabiili risteys
reaaliset, erisuuret, positiiviset	epästabiili risteys
reaaliset, vastakkaismerkkiset	satulapiste (epästabiili)
reaaliset, yhtäsuuret, negatiiviset	stabiili risteys
reaaliset, yhtäsuuret, positiiviset	epästabiili risteys
kompleksiset, reaaliosa negatiivinen	stabiili spiraalipiste
kompleksiset, reaaliosa positiivinen	epästabiili spiraalipiste
puhtaasti imaginaariset	keskus (stabiili)

**Esimerkki 4.6.** Systeemin

$$\begin{aligned}x' &= x - 3y \\y' &= x - y\end{aligned}$$

karakteristisen yhtälön  $\lambda^2 + 2 = 0$  juuret ovat  $\pm\sqrt{2}i$ . Origo on siis stabiili ja keskus.

**Esimerkki 4.7.** Systeemin

$$\begin{aligned}x' &= 4x - y \\y' &= 6x - 3y\end{aligned}$$

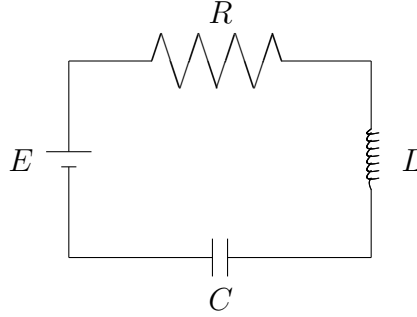
karakteristisen yhtälön  $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$  juuret ovat 3 ja  $-2$ . Origo on siis satulapiste ja niin ollen epästabiili.

**Esimerkki 4.8.** Systeemin

$$\begin{aligned}x' &= -4x - y \\y' &= x - 2y\end{aligned}$$

karakteristisella yhtälöllä  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$  on kaksoisjuuri  $\lambda = -3$ . Origo on siis stabiili risteys ja myös asympotoottisesti stabiili.

**Esimerkki 4.9.** Tarkastellaan oheista RLC-piiriä.



Piirin virranvoimakkuus  $I$  toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{CL} I = 0,$$

joka voidaan palauttaa systeemiksi

$$\begin{aligned} I' &= y \\ y' &= -\frac{1}{CL} I - \frac{R}{L} y. \end{aligned}$$

Karakterisella yhtälöllä

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{CL} = 0$$

on juuret

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}.$$

Kriittisen pisteen  $(0, 0)$  luonne riippuu diskriminantin  $R^2 - 4L/C$  suuruudesta:

- (i) Jos  $R^2 - 4L/C > 0$ , niin  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  ovat reaaliset, erisuuret ja negatiiviset; tällöin origo on stabiili risteys.
- (ii) Jos  $R^2 - 4L/C = 0$ , niin  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L}$ , joten origo on jälleen stabiili risteys
- (iii) Jos  $R^2 - 4L/C < 0$ , niin  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  ovat kompleksilukuja, joilla on negatiivinen reaaliosa; origo on tällöin stabiili spiraalipiste

Kaikissa tapauksissa kriittinen piste on asymptoottisesti stabiili, ja virran voimakkuus lähestyy siten nollaa, kun  $t \rightarrow \infty$ .



## 5 Epälineaaristen systeemien stabiilisuus

Tarkastellaan autonomista epälineaarista systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}\tag{5.1}$$

missä  $f$  ja  $g$  ovat kaksi kertaa jatkuvasti derivoituvia funktioita. Oletamme, että

$$f(0, 0) = g(0, 0) = 0,$$

jolloin origo on kriittinen piste. Muodostetaan funktioille  $f$  ja  $g$  Taylorin kehitelmät

$$\begin{aligned}f(x, y) &= f(0, 0) + xD_1f(0, 0) + yD_2f(0, 0) + f_1(x, y) \\g(x, y) &= g(0, 0) + xD_1g(0, 0) + yD_2g(0, 0) + g_1(x, y)\end{aligned}\tag{5.2}$$

missä

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= \frac{1}{2}(xD_1 + yD_2)^2 f(\theta_1x, \theta_1y) \\g_1(x, y) &= \frac{1}{2}(xD_1 + yD_2)^2 g(\theta_2x, \theta_2y)\end{aligned}\tag{5.3}$$

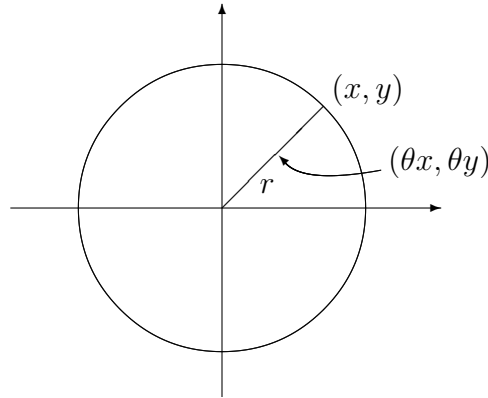
ja funktioista  $x$  ja  $y$  riippuvat luvut  $\theta_1, \theta_2$  sijaitsevat välillä  $(0, 1)$ . Tässä  $(xD_1 + yD_2)^2 = x^2D_{11} + y^2D_{22} + 2xyD_{12}$ . Koska  $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ , kehitelmät (5.2) voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}f(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + f_1(x, y) \\g(x, y) &= a_{21}x + a_{22}y + g_1(x, y)\end{aligned}$$

missä  $a_{11} = D_1f(0, 0)$ ,  $a_{12} = D_2f(0, 0)$ ,  $a_{21} = D_1g(0, 0)$  ja  $a_{22} = D_2g(0, 0)$ . Jäännöstermille pätee

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.\tag{5.4}$$

Tämä nähdään siirtymällä napakoordinaatteihin  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .



Kaavoissa (5.3) esiintyvät funktion  $f$  toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat nimittäin jatkuvuuden perusteella rajoitettuja origon ympäristössä:

$$|D_{11}f(\theta_1x, \theta_1y)| + 2|D_{12}f(\theta_1x, \theta_1y)| + |D_{22}f(\theta_1x, \theta_1y)| \leq M < \infty,$$

kun  $r$  on kyllin pieni. Tällaisilla  $r$ :n arvoilla

$$\begin{aligned} |f_1(x, y)| &= \frac{1}{2} |x^2 D_{11}f(\theta_1x, \theta_1y) + 2xy D_{12}f(\theta_1x, \theta_1y) + y^2 D_{22}f(\theta_1x, \theta_1y)| \\ &\leq \frac{r^2}{2} |\cos^2 \theta D_{11}f(\theta_1x, \theta_1y)| + r^2 |\cos \theta \sin \theta D_{12}f(\theta_1x, \theta_1y)| \\ &\quad + \frac{r^2}{2} |\sin^2 \theta D_{22}f(\theta_1x, \theta_1y)| \\ &\leq \frac{r^2}{2} M \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\left| \frac{f_1(x, y)}{r} \right| \leq \frac{r}{2} M \rightarrow 0,$$

kun  $r \rightarrow 0$ . Samoin tavoin näytetään, että myös

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Seuraavaksi oletamme lisäksi, että

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0; \tag{5.5}$$

tämä merkitsee sitä, että kuvauksen  $(f, g)$  Jacobin determinantti

$$\begin{vmatrix} D_1f & D_2f \\ D_1g & D_2g \end{vmatrix}$$

on origossa nollasta eroava.

**Esimerkki 5.1.** Systemi

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 3y + x^3 \\ y' &= x - 2y - y^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

toteuttaa ehdot (5.4) ja (5.5), sillä

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Käymme tarkastelemaan systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + f_1(x, y) \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + g_1(x, y) \end{aligned} \tag{5.6}$$

joka toteuttaa ehdot (5.4) ja (5.5), ja vastaavaa lineaarista systeemiä

$$\begin{aligned}x' &= a_{11}x + a_{12}y \\y' &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\tag{5.7}$$

Molemmilla systeemeillä on kriittinen piste  $(0, 0)$ . Sen luonne voidaan päätellä seuraavasta lauseesta, jonka todistus sivuutetaan.

**Lause 5.1.** *Olkoot  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  lineaariseen systeemiin (5.7) liittyvän karakteristisen yhtälön juuret.*

- (i) *Systeemien (5.6) ja (5.7) origossa sijaitsevilla kriittisillä pisteillä on sama tyyppi, mikäli*
  - (a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  ja origo on systeemin (5.7) risteys
  - (b)  $\lambda_1 = \lambda_2$  ja origo ei ole systeemin (5.7) tähdenmuotoinen risteys
  - (c) origo on systeemin (5.7) satulapiste
  - (d) origo on systeemin (5.7) spiraalipiste
- (ii) *Systeemien (5.6) ja (5.7) origossa sijaitsevat kriittiset pisteet eivät aina ole samantyyppiset, mikäli*
  - (e)  $\lambda_1 = \lambda_2$  ja origo on systeemin (5.7) tähdenmuotoinen risteys; silloin  $(0, 0)$  on joko systeemin (5.6) risteys tai systeemin (5.6) spiraalipiste.
  - (f) origo on systeemin (5.7) keskus; silloin  $(0, 0)$  on joko systeemin (5.6) keskus tai systeemin (5.6) spiraalipiste

Epälineaarisen systeemin (5.6) stabiilisuutta voidaan tutkia seuraavan lauseen avulla, jonka todistus myös sivuutetaan.

**Lause 5.2.**

- (i) *Jos origo on asymptoottisesti stabiili systeemissä (5.7), se on asymptoottisesti stabiili myös systeemissä (5.6)*
- (ii) *Jos origo on epästabiili systeemissä (5.7), se on epästabiili myös systeemissä (5.6)*
- (iii) *Jos origo on systeemissä (5.7) stabiili mutta ei asymptoottisesti stabiili, niin systeemissä (5.6) origo voi olla joko asymptoottisesti stabiili, stabiili tai epästabiili*

**Huomautus.** Lauseen 5.2 tulos (ii) pätee myös tapauksessa, jossa ehto (5.5) ei ole täytetty. Tällainen tilanne esiintyy myös Esimerkissä 5.3.

Lauseet 5.1 ja 5.2 on helppo uskoa sen perusteella, että lähellä origoa systeemit (5.6) ja (5.7) ovat likipitään samat; rajoituttaessa sopivaan origon ympäristöön voidaan ajatella, että epälineaarinen systeemi (5.6) syntyy lineaarisesta systeemistä (5.7), kun yhtälöissä tapahtuu pieni häiriö.

**Esimerkki 5.2.** Ensimmäisessä luvussa tarkasteltuja Lotkan-Volterran yhtälöitä

$$\begin{aligned}x' &= \beta_1 x - \delta_{11} x^2 - \delta_{12} xy \\y' &= -\beta_2 y + \delta_{21} xy - \delta_{22} y^2\end{aligned}\tag{5.8}$$

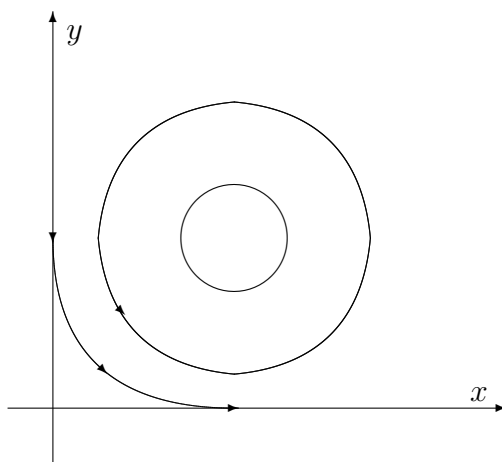
voidaan origon ympäristössä approksimoida vastaavalla lineaarisella systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= \beta_1 x \\y' &= -\beta_2 y\end{aligned}\tag{5.9}$$

jonka yleinen ratkaisu on

$$(x(t), y(t)) = (c_1 e^{\beta_1 t}, c_2 e^{-\beta_2 t})$$

Ehdot (5.4) ja (5.5) ovat selvästi voimassa, koska  $\beta_1 \neq 0$  ja  $\beta_2 \neq 0$ .



Lineaarisen systeemin (5.9) karakterisella yhtälöllä on vastakkaismerkkiset reaaliuuret  $\lambda_1 = \beta_1$  ja  $\lambda_2 = -\beta_2$ . Origgo on siten (epä)stabiili satulapiste. Lauseen 5.2 nojalla origgo on epästabiili myös systeemissä (5.8). Lauseen 5.1 nojalla origgo on myös systeemin (5.8) satulapiste.

**Esimerkki 5.3.** Systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= -2xy = f(x, y) \\y' &= -x + y + xy - y^3 = g(x, y)\end{aligned}\tag{5.10}$$

on kolme kriittistä pistettä,  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  ja  $(0, -1)$ , jotka löydetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} -2xy = 0 \\ -x + y + xy - y^3 = 0 \end{cases}$$

Tutkitaan systeemiä erikseen kunkin kriittisen pisteen ympäristössä.

1.  $(0, 0)$  Vastaava lineaarinen systeemi on

$$\begin{aligned}x' &= 0 \\y' &= -x + y\end{aligned}\tag{5.11}$$

Siihen liittyvällä karakteristisella yhtälöllä  $\lambda^2 - \lambda = 0$  on juuret  $\lambda_1 = 0$  ja  $\lambda_2 = 1$ . Origo on epästabiili systeemissä (5.11), joten Lausetta 5.2 seuraavan huomautuksen nojalla origo on epästabiili myös systeemissä (5.10).

2.  $(0, 1)$  Kriittinen piste saadaan origoon suorittamalla muuttujan vaihto  $x = x$  ja  $z = y - 1$ . Silloin systeemi (5.10) tulee muotoon

$$\begin{aligned}x' &= -2x(z + 1) \\z' &= -x + z + 1 + x(z + 1) - (z + 1)^3 \\&= z + 1 + xz - (z^3 + 3z^2 + 3z + 1) \\&= -2z + xz - 3z^2 - z^3\end{aligned}$$

ja vastaava lineaarinen systeemi on

$$\begin{aligned}x' &= -2x \\z' &= -2z\end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat  $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ , ja origo on tähdenmuotoinen stabiili risteys. Lauseen 5.2 nojalla  $(0, 1)$  on systeemin (5.10) asymptoottisesti stabiili kriittinen piste, ja Lauseen 5.1 perusteella se on systeemissä (5.10) joko risteys tai spiraalipiste.

3.  $(0, -1)$  Nyt tarvittava tason siirto määritellään yhtälöillä  $x = x$  ja  $z = y + 1$ . Systeemin (5.10) yhtälöt ovat silloin

$$\begin{aligned}x' &= -2x(z - 1) \\z' &= -x + z - 1 + x(z - 1) - (z - 1)^3 \\&= -2x + z - 1 + xz - (z^3 - 3z^2 + 3z - 1) \\&= -2x - 2z + xy + 3z^2 - z^3\end{aligned}$$

ja vastaava lineaarinen systeemi

$$\begin{aligned}x' &= 2x \\z' &= -2x - 2z.\end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön juuret ovat  $\lambda_1 = 2$  ja  $\lambda_2 = -2$ , joten piste  $(0, -1)$  on systeemin (5.10) epästabiili satulapiste.

**Esimerkki 5.4.** Esimerkissä 1.2 tarkasteltiin vaimentamattoman heilurin differentiaaliyhtälöä

$$\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0.$$

Asettamalla  $\mu = \theta'$  saadaan systeemi

$$\begin{aligned} \theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \sin \theta \end{aligned} \tag{5.12}$$

jonka kriittiset pisteet ovat  $(k\pi, 0)$ , missä  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Koska

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

niin kriittistä pistettä  $(0, 0)$  vastaava lineaarinen systeemi on

$$\begin{aligned} \theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \theta \end{aligned}$$

Tälle systeemille origo on keskus, joten Lauseesta 5.2 ei voida päätellä mitään origon stabiilisuudesta systeemissä (5.12). Kriittisen pisteen  $(\pi, 0)$  luonne saadaan sen sijaan selville suorittamalla muuttujanvaihto  $z = \theta - \pi$ , jolloin systeemi (5.12) saa muodon

$$\begin{aligned} z' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \sin(z + \pi) = -\omega^2 \sin z \cos \pi = \omega^2 \sin z, \end{aligned}$$

ja vastaava lineaarinen systeemi on

$$\begin{aligned} z' &= \mu \\ \mu' &= \omega^2 z \end{aligned}$$

Karakteristisen yhtälön  $\lambda^2 - \omega^2 = 0$  juuret ovat  $\lambda_1 = \omega$  ja  $\lambda_2 = -\omega$ . Näin ollen origo on satulapiste, joten Lauseen 5.1 nojalla  $(\pi, 0)$  on epästabiili satulapiste myös epälinearisessa systeemissä (5.12).

Energiaperiaatteen avulla voidaan osoittaa, että origo on todella keskus. Lauseen 5.1 nojalla origo on nimittäin joko keskus tai spiraalipiste. Systeemin konservatiivisuudesta seuraa kuitenkin, että sen kokonaisenergia ei kasva eikä pienene. Sen vuoksi origo ei voi olla spiraalipiste, sillä stabiilin (vastaavasti epästabiilin) spiraalipisteen tapauksessa kokonaisenergian tulisi pienetä (vastaavasti kasvaa). Näin ollen origon on oltava keskus.

Koska funktiolla  $\sin \theta$  on jaksona  $2\pi$ , niin kriittisellä pisteellä  $(k\pi, 0)$  on sama tyyppi

- (a) origon kanssa, jos  $k$  on parillinen
- (b) pisteen  $(\pi, 0)$  kanssa, jos  $k$  on pariton.

**Esimerkki 5.5.** Tarkastellaan edellisen esimerkin heiluria, mutta oletetaan, että heilahtelua on vaimentamassa kulmanopeuteen  $\theta'$  verrannollinen voima. Jos verrannollisuuskerroin on vakio  $\varepsilon > 0$  saadaan differentiaaliyhtälö

$$\theta'' + \varepsilon\theta' + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

jonka kanssa yhtäpitävä on systeemi

$$\begin{aligned}\theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \sin \theta - \varepsilon \mu\end{aligned}\tag{5.13}$$

Fysikaalisesti on ilmeistä, että origo on asymptoottisesti stabiili kriittinen piste. Tämän todistamiseksi tarkastellaan vastaavaa lineaarista systeemiä

$$\begin{aligned}\theta' &= \mu \\ \mu' &= -\omega^2 \theta - \varepsilon \mu\end{aligned}\tag{5.14}$$

jonka karakteristisella yhtälöllä  $\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \omega^2 = 0$  on juuret (vrt. Esimerkki 4.9)

$$\lambda_1 = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \text{ja} \quad \lambda_2 = \frac{-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\omega^2}}{2}.$$

Origo on systeemissä (5.14) siten

- stabiili risteys, jos  $\varepsilon \geq 2\omega$
- stabiili spiraalipiste, jos  $\varepsilon < 2\omega$

Lauseen 5.2 perusteella origo on systeemissä (5.13) aina asymptoottisesti stabiili.

## 6 Ljapunovin lause

**Määritelmä 6.1.** Olkoon  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti määritelty funktio ja  $V(0, 0) = 0$ .

- (a) Jos  $V(x, y) > 0$  kaikille  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $V$  on *positiivisesti definiitti*
- (b) Jos  $V(x, y) < 0$  kaikille  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $V$  on *negatiivisesti definiitti*.
- (c) Jos  $V(x, y) \geq 0$  kaikille  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $V$  on *positiivisesti semidefiniitti*.
- (d) Jos  $V(x, y) \leq 0$  kaikille  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $V$  on *negatiivisesti semidefiniitti*.
- (e) Jos  $V$  ei ole positiivisesti eikä negatiivisesti semidefiniitti,  $V$  on *indefiniitti*.

Havainnollistetaan määritelmää seuraavalla esimerkillä.

**Esimerkki 6.1.**

- (a) Funktio  $V(x, y) = x^2 + y^2$  on positiivisesti definiitti.
- (b)  $V(x, y) = -(x^2 + y^2)$  on negatiivisesti definiitti.
- (c)  $V(x, y) = x^2$  on positiivisesti semidefiniitti, sillä  $V(0, a) = 0$  kaikilla  $a \in \mathbb{R}$ .
- (d) Funktio  $V(x, y) = -y^2$  on negatiivisesti semidefiniitti.
- (e)  $V(x, y) = xy$  on indefiniitti, sillä

$$V(a, a) = a^2 > 0 \quad \text{ja} \quad V(a, -a) = -a^2 < 0$$

kaikille  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Palautetaan mieleen neliömuotoihin liittyvä tulos Analyysin kurssilta:

**Lause 6.1.** Funktio (neliömuoto)  $V(x, y) = x^2 + axy + by^2$  on

- (a) *positiivisesti definiitti*, jos ja vain jos  $4b - a^2 > 0$
- (b) *positiivisesti semidefiniitti*, jos ja vain jos  $4b - a^2 \geq 0$
- (c) *indefiniitti*, jos  $4b - a^2 < 0$ .

*Todistus.* Kirjoitetaan funktio  $V(x, y)$  muodossa

$$\begin{aligned} V(x, y) &= x^2 + axy + by^2 \\ &= x^2 + 2x \frac{a}{2}y + \frac{a^2}{4}y^2 + \frac{4}{4}by^2 - \frac{a^2}{4}y^2 \\ &= \left(x + \frac{a}{2}y\right)^2 + \frac{1}{4}(4b - a^2)y^2. \end{aligned}$$

Lause seuraa. □



**Huomautus.** Vastaava lause negatiivisesti definiiteille ja semidefiniiteille neliömuodoille seuraa siitä, että  $V(x, y)$  on negatiivisesti (semi)definiitti, jos ja vain jos  $-V(x, y)$  on positiivisesti (semi)definiitti.

**Esimerkki 6.2.**

- (a) Funktio  $x^2 - xy + 2y^2$  on positiivisesti definiitti, sillä  $4b - a^2 = 4 \cdot 2 - (-1)^2 = 7 > 0$ .
- (b)  $V(x, y) = -x^2 + 4xy - 4y^2$  on negatiivisesti semidefiniitti, sillä  $-V(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2$  on positiivisesti semidefiniitti ( $4b - a^2 = 4 \cdot 4 - (-4)^2 = 0$ ).
- (c)  $x^2 + 4xy - 4y^2$  on indefiniitti, sillä  $4b - a^2 = 4 \cdot (-4) - 4^2 = -32 < 0$ .

Tarkastellaan autonomista systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \tag{6.1}$$

jolla on kriittinen piste origossa. Olkoon  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti derivoituva positiivisesti definiitti funktio. Määritellään funktion  $V$  derivaatta systeemin (6.1) ratoja pitkin yhtälöllä

$$V'(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = \frac{\partial V}{\partial x}f(x, y) + \frac{\partial V}{\partial y}g(x, y). \tag{6.2}$$

Sanomme, että  $V$  on systeemin (6.1) *Ljapunovin funktio*, jos  $V'(x, y)$  on negatiivisesti semidefiniitti.

**Lause 6.2** (Ljapunovin lause). *Olkoon  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti derivoituva positiivisesti definiitti funktio.*

- (i) *Jos  $V$  on systeemin (6.1) Ljapunovin funktio, niin origo on stabiili.*
- (ii) *Jos  $V'(x, y)$  on negatiivisesti definiitti, niin origo on asympotoottisesti stabiili*
- (iii) *Jos  $V'(x, y)$  on positiivisesti definiitti, niin origo on epästabiili.*

*Todistus, kohta (i).* Annetaan  $\varepsilon > 0$  ja merkitään

$$m = \min\{V(x, y) : d[(x, y), (0, 0)] = \varepsilon\}.$$

Tämä minimi on olemassa, sillä  $V$  on jatkuva ja ympyrä  $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$  on kompakti. Edelleen  $m > 0$ , koska  $V$  on positiivisesti definiitti. Koska

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} V(x, y) = V(0, 0) = 0,$$

on olemassa  $\delta > 0$  siten, että  $\delta < \varepsilon$  ja  $V(x, y) \leq \frac{m}{2}$  aina, kun

$$d[(x, y), (0, 0)] \leq \delta.$$

Stabiilisuuden todistamiseksi valitaan  $(x^*, y^*)$  siten, että

$$d[(x^*, y^*), (0, 0)] \leq \delta.$$

Sovelletaan väliarvolausetta funktioon  $f(t) = V(x(t, x^*), y(t, y^*))$ , missä  $x(t, x^*)$  ja  $y(t, y^*)$  määritellään kuin luvussa 4; saadaan

$$f(t) - f(0) = tf'(\xi),$$

missä

$$f'(\xi) = V'(x(\xi, x^*), y(\xi, y^*)).$$

Koska  $V'(x, y)$  on negatiivisesti semidefiniitti, niin  $f'(\xi) \leq 0$ , joten siis

$$f(t) - f(0) \leq 0$$

kaikille  $t \geq 0$ . Näin ollen

$$V(x(\xi, x^*), y(\xi, y^*)) \leq V(x^*, y^*) \leq \frac{m}{2}$$

kaikille  $t \geq 0$ , joten mikään pisteistä  $(x(\xi, x^*), y(\xi, y^*))$  ei voi sijaita ympyrällä.

Määritellään

$$g(t) = x(t, x^*)^2 + y(t, y^*)^2.$$

Silloin funktio  $g$  on jatkuva arvoilla  $t \geq 0$ . Edelleen

$$g(0) = (x^*)^2 + (y^*)^2 \leq \delta^2 < \varepsilon^2$$

ja  $g$  ei saa arvoa  $\varepsilon^2$ . Näin ollen  $g(t) < \varepsilon^2$  kaikille  $t \geq 0$ , joten

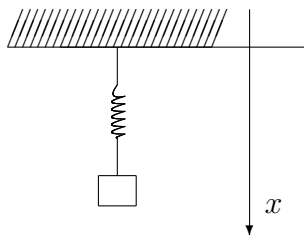
$$d\left[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0, 0)\right] \leq \varepsilon$$

kaikille  $t \geq 0$ . Ehto (4.2) on täytetty, joten origo on stabiili. □

**Esimerkki 6.3.** Jouseen ripustetun massan liikettä kuvaa vaimennetun värähtelyliikkeen differentiaaliyhtälö

$$x'' + \varepsilon x' + \mu x = 0, \tag{6.3}$$

missä  $\varepsilon$  on vaimennussuhde ja  $\mu$  riippuu jousivakiosta.



Oletamme, että  $\varepsilon$  ja  $\mu$  ovat vakioita, ja että  $\mu = 1$ . Silloin (6.3) voidaan korvata systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -x - \varepsilon y\end{aligned}\tag{6.4}$$

Funktio  $V(x, y) = x^2 + y^2$  on tämän systeemin Ljapunovin funktio, sillä  $V$  on positiivisesti definiitti ja

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = 2xy + 2y(-x - \varepsilon y) = -2\varepsilon y^2$$

on negatiivisesti semidefiniitti. Lauseesta 6.2 seuraa siis, että origo on stabiili.

**Huomautus.** Ljapunovin funktio on usein verrannollinen systeemin kokonaisenergiaan. Esimerkissä 6.3 potentiaalienergian  $\frac{1}{2}mx^2$  ja liike-energian  $\frac{1}{2}my^2$  summa on

$$\frac{1}{2}m(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}mV(x, y).$$

Systeemissä (6.4) origo on itse asiassa asymptoottisesti stabiili (vrt. vastaavaan systeemiin (5.14) Esimerkissä 5.5). Tätä ei kuitenkaan nähdä Lauseen 6.2 perusteella käytettäessä funktiota  $V(x, y) = x^2 + y^2$ .

**Esimerkki 6.4.** Edellisessä esimerkissä jousivoima oli verrannollinen tasapainokohdasta mitattuun poikkeamaan  $x$ . Epälineaarinen jousi syntyy, kun ko. voima on muotoa  $-f(x)$ , missä  $f(x)$  on jokin  $x$ :n epälineaarinen funktio. Jos vaimennussuhde  $\varepsilon$  oletetaan nolaksi, systeemin liikeyhtälö on silloin

$$x'' + f(x) = 0.\tag{6.5}$$

Oletetaan, että  $f$  on jatkuva ja että

$$f(0) = 0 \quad \text{ja} \quad xf(x) > 0\tag{6.6}$$

kaikille  $x \neq 0$ , so.  $x$  ja  $f(x)$  ovat samanmerkkiset. Korvataan yhtälö (6.5) systeemillä

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -f(x)\end{aligned}\tag{6.7}$$

Systeemillä (6.7) on kriittinen piste vain origossa. Kokonaisenergia on verrannollinen lausekkeeseen

$$V(x, y) = F(x) + \frac{y^2}{2},$$

missä  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  edustaa potentiaalienergiaa ja  $\frac{y^2}{2}$  liike-energiaa.

Funktio  $V(x, y)$  on positiivisesti definiitti, sillä  $x$  ja  $f(x)$  oletettiin samanmerkkisiksi ehdossa (6.6). Edelleen  $V$  on systeemin (6.7) Ljapunovin funktio, sillä

$$V'(x, y) = F'(x)x' + yy' = f(x)y + y(-f(x)) = 0.$$

Lauseen 6.2 nojalla origo on stabiili.

**Huomautus.** Sopivan Ljapunovin funktion löytäminen voi olla vaikeaa erityisesti silloin, kun systeemin kokonaisenergiaa ei kyetä arvioimaan. Usein kannattaa kuitenkin kokeilla tyyppiä

$$V(x, y) = x^2 + axy + by^2$$

olevia neliömuotoja.

**Esimerkki 6.5.** Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{aligned} x' &= xy^2 + x^2y + x^3 \\ y' &= y^3 - x^3 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Funktion  $V(x, y) = x^2 + axy + by^2$  derivaatta systeemin (6.8) ratoja pitkin on

$$V'(x, y) = (2x + ay)(xy^2 + x^2y + x^3) + (ax + 2by)(y^3 - x^3).$$

Jos valitaan  $a = 0$  ja  $b = 1$ , niin  $4b - a^2 = 4 > 0$  ja Lauseen 6.1 nojalla  $V(x, y)$  on positiivisesti definiitti. Edelleen

$$V'(x, y) = 2x(xy^2 + x^2y + x^3) + 2y(y^3 - x^3) = 2(x^2y^2 + x^4 + y^4).$$

Siis myös  $V'(x, y)$  on positiivisesti definiitti, joten Lauseen 6.2 perusteella origo on epästabili.

Todistetaan vielä lopuksi Lauseen 6.2 kohta (ii). Tätä varten tarvitaan seuraava apulause.

**Lemma 6.1.** *Olkoon  $h(t)$  arvoilla  $t \geq 0$  määritelty derivoituva funktio siten, että  $h'(t) \leq 0 \leq h(t)$  kaikille  $t \geq 0$ . Silloin*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} h'(t) = 0.$$

*Todistus.* Funktio  $h(t)$  on pienenevä ja alhaalta rajoitettu, joten on olemassa raja-arvo

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Annetaan  $\varepsilon > 0$  ja valitaan  $T \geq 0$  siten, että

$$h(T) - \lambda \leq \varepsilon.$$

Väliarvolauseen nojalla on olemassa  $\xi \geq T$  siten, että

$$h(T+1) - h(T) = h'(\xi).$$

Koska  $h$  on pienenevä, niin

$$\lambda = \inf_{t \geq 0} h(t)$$

ja

$$\lambda \geq h(T+1) \geq h(T) \geq \lambda + \varepsilon$$

Näin ollen

$$-\varepsilon \leq h(T+1) - h(T) \leq 0,$$

joten siis

$$-\varepsilon \leq h'(\xi) \leq 0.$$

Tästä seuraa väite. □

*Todistus, Lause 6.2 (ii).* Kohdan (i) perusteella origo on stabiili. Näin ollen jokaista kokonaislukua  $n = 1, 2, \dots$  kohden on olemassa  $\delta_n > 0$  siten, että  $\delta_n \leq 1$  ja

$$d\left[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0, 0)\right] \leq 2^{-n} \quad (6.9)$$

kaikille  $t \geq 0$  aina, kun

$$d[(x^*, y^*), (0, 0)] \leq \delta_n.$$

Annetaan  $\varepsilon > 0$  ja valitaan  $(x^*, y^*)$  siten, että

$$d[(x^*, y^*), (0, 0)] \leq \delta_1.$$

Riittää näyttää, että on olemassa  $T > 0$  siten, että

$$d\left[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0, 0)\right] \leq \varepsilon$$

kun  $t \geq T$ . Kiinnitetään  $n$  siten, että  $2^{-n} \leq \varepsilon$  ja merkitään

$$M = \max\{V'(x, y) \mid \delta_n \leq d[(x, y), (0, 0)] \leq 1\}. \quad (6.10)$$

Silloin  $M < 0$ , koska  $V'(x, y)$  on negatiivisesti definiitti. Funktio  $h(t) = V(x(t, x^*), y(t, y^*))$  toteuttaa Lemman 6.1 ehdot, sillä

$$h'(t) = V'(x(t, x^*), y(t, y^*)) \leq 0$$

kaikilla  $t \geq 0$ . Näin ollen

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} h'(t) = 0,$$

joten on olemassa  $T > 0$  siten, että  $h'(T) > M$ . Silloin

$$V'(x(T, x^*), y(T, y^*)) > M,$$

mikä on yhtälön (6.10) perusteella mahdollista vain jos joko

$$d\left[(x(T, x^*), y(T, y^*)), (0, 0)\right] \leq \delta_n \quad (6.11)$$

tai

$$d\left[(x(T, x^*), y(T, y^*)), (0, 0)\right] > 1.$$

Jälkimmäinen vaihtoehto ei kuitenkaan ehdon (6.9) perusteella tule kysymykseen, koska

$$d[(x^*, y^*), (0, 0)] \leq \delta_1.$$

Siis epäyhtälö (6.11) on voimassa, mistä seuraa, että

$$d\left[(x(t, x^*), y(t, y^*)), (0, 0)\right] \leq \varepsilon,$$

kun  $t \geq T$ . □